Batxilergo Zientifiko-Teknikoa

MATEMATIKA II

GEOMETRIA

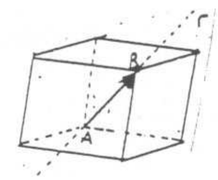
Ignazio Zuloaga B.H.I. (Eibar)

AURKIBIDEA

BEKTOREAK ESPAZIOAN

BEKTOREAK ESPAZIOAN

Ordenatuta dauden A eta B bi puntuk, bektore finko bat definitzen dute: $\overrightarrow{AB}$
A puntua jatorria da eta B muturra
Ordenak, bektorearen norantza adierazten du.
Bi puntuek, “r” zuzenaren norabidea determinatzen dute
A eta B-ren arteko distantzia, bektorearen modulua da



$\overrightarrow{AB}$ -ren modulua = dist (A,B) = $\left|\overrightarrow{AB}\right|$
“ norabidea :“r” eta “r”-rekin paraleloak diren zuzen guztiena
“ norantza : A-tik B-runtz

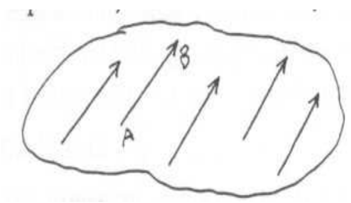
Norabide bakoitzak bi norantza ditu: A-tik B-ra eta B-tik A-ra
$\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$,... bektore nuluak, norabide eta norantza gabekoak dira

EKIPOLENTZIA ERLAZIOA

Bi bektore espazioan *ekipolenteak* direla diogu baldin modulu, norabide eta norantza berdinekoak direnean.

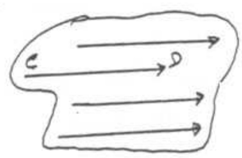
BEKTORE ASKEA

A $\nearrow$ B $\overrightarrow{AB}$ -rekin ekipolenteak diren bektore multzoari **bektore askea** deitzen zaio; hau da, espazioan, $\overrightarrow{AB}$ -ren modulu, norabide eta norantza berdinekoak diren infinitu bektoreak



Infinitu hoietatik, ordezkari gisa, bat erabiliko dugu:
[$\overrightarrow{AB}$] izendatzen da edota $\vec{a}$, $\vec{b}$,...

C $\longrightarrow$ D $\overrightarrow{CD}$ -rekin ekipolenteak diren multzoa



beste bektore aske bat izango da.

Bektore bat erabili nahi dugunean, bere ordez, bektore horren berdinak diren guztietako edozein har dezakegu

Espazioko bektore askeen multzoa V_3 adieraziko dugu

Aipa ditzagun ondoko multzo hauek:

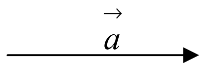
$E = \{A, B, C, ...\}$, espazioko puntuen multzoa

$E_3 = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, ...\}$, espazioko bektore finkoen multzoa

$V_3 = \{\vec{a}, \vec{b}, ...\}$, espazioko bektore askeen multzoa

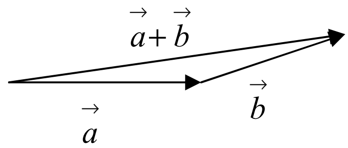
ERAGIKETAK V_3 MULTZOAN

Batuketa

Eman ditzagun $\vec{a}$ eta $\vec{b}$ bektore askeak  eta 

Ondoko barne-eragiketa definitzen da:

$V_3 \quad + \quad V_3 \quad \rightarrow \quad V_3$, modu honetan:



Propietateak:

1.- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2.- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ “TALDE ABELIARRA”

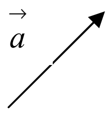
3.- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

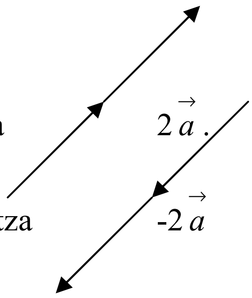
4.- $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$

Zenbaki erreal bat bider bektore bat

Emaitza, norabide berdineko beste bektore bat da

Ondoko kanpo-eragiketa definitzen da: $R \ . \ V_3 \ \rightarrow \ V_3$

Demagun  dela.



$2\vec{a}$ bektorea, norabide eta norantza berdinekoa da eta luzera bikoitza $2\vec{a}$.

$-2\vec{a}$ bektorea, norabidez berdina, norantza aurkakoa eta luzera bikoitza $-2\vec{a}$

Propietateak:

5.- $(t+s)\vec{a}=t\vec{a}+s\vec{a}$

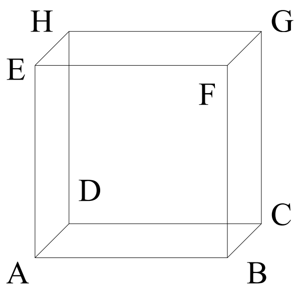
6.- $t(\vec{a}+\vec{b})=t\vec{a}+t\vec{b}$ $t, s\in \Re$ eta $\vec{a},\vec{b}\in V^3$ -koak izanik

7.- $((t\cdot s)\vec{a}=t\cdot(s\cdot\vec{a})$

8.- $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

Froga daiteke V_3 multzoak BEKTORE- ESPAZIOAREN egitura duela: $(V_3, +, \cdot\Re)$

Ariketa



Kalkulatu:

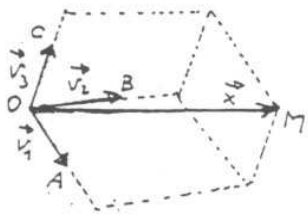
a) $\left[\vec{AD}\right]+\left[\vec{DC}\right]$ b) $\left[\vec{AD}\right]+\left[\vec{DB}\right]+\left[\vec{AE}\right]$

c) $\left[\vec{BC}\right]+\left[\vec{DH}\right]$ c) $\left[\vec{HG}\right]+\left[\vec{FB}\right]-\left[\vec{EB}\right]$

V3 BEKTORE-ESPAZIOA. DEFINIZIOAK

- Bektoreak, zuzen berdinekoak edo paraleloak badira, linealki menpekoak dira
- Bi bektore norabide ezberdinekoak, linealki independienteak dira
- Hiru bektore (edo gehiago) plano berdinekoak, linealki menpekoak dira
- Hiru bektore ez koplanarioak linealki independienteak dira. Gainera, V_3 osoaren sortzaile dira $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$
- V_3-ren **oinarria,** plano ezberdinetan dauden hiru bektorek osatzen dute . Edozein $\vec{x}$ bektorea, $\vec{v_1}, \vec{v_1}$ *eta* $\vec{v_3}$ bektoreen konbinazio lineala da

  $\vec{x} = x\vec{v_1} + y\vec{v_2} + z\vec{v_3}$



- V_3 espazioaren dimentsioa 3 da. Lau bektore (edo gehiago) espazioan, linealki menpekoak dira

E , V3 eta R3 MULTZOEN ARTEKO ERLAZIOA

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{(1)} & V_3 & \xrightarrow{(2)} & R_3 \\ \text{M} & & \vec{x} & & (x,y,z) \end{array}$$

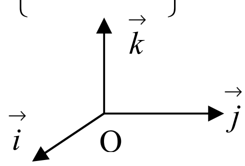
(1). Espazioan O jatorria finkatuz, $M \in E$ puntuari $\left[\vec{OM}\right] = \vec{x} \in V_3$ bektorea dagokio

(2). $\left\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\right\}$ oinarria finkatuz gero, $\left[\vec{OM}\right] = \vec{x}$ bektorea adierazteko modu bakarra dago: $\vec{x} = x\vec{v_1} + y\vec{v_2} + z\vec{v_3}$. Beraz, $\vec{x}$ bektorea, $(x, y, z) \in R^3$ hirukotearekin erlazionatzen dugu*, x , y* eta *z* **koordenatuak** direlarik

ERREFERENTZIA SISTEMA AFINA

O puntua eta V_3-ko $\left\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\right\}$ oinarri bat emanik, R = $\left\{O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\right\}$ multzoari E espazio afinaren erreferentzia-sistema esaten zaio.

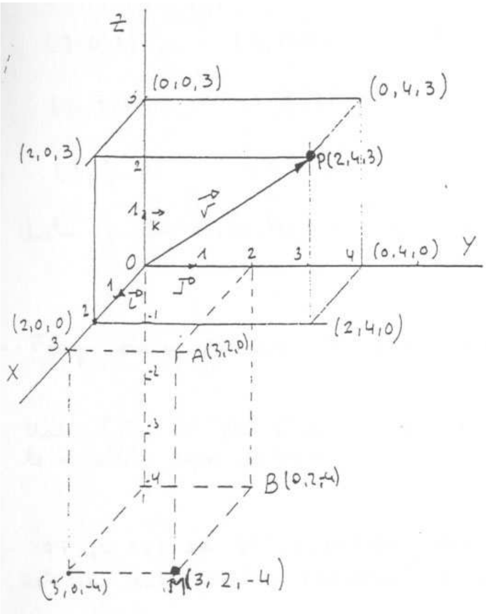
Erreferentzia ezagunena R = $\left\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ da.



- O jatorri puntua
- $\left\{\vec{i} . \vec{j}, \vec{k}\right\}$ oinarri kanonikoa; hau da, $\vec{i}$ (1, 0, 0); $\vec{j}$ (0, 1, 0); $\vec{k}$ (0, 0, 1)
- $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ bektore elkartzutak eta unitarioak dira. Oinarri ortonormala delakoa osatzen dute.

Espazioa edonola kontsidera genezake: puntuz, bektorez edo hirukotez osatua. A puntu bakoitzari (x, y, z) $\in \Re$ hirukotea dagokio, $\vec{a} = \left[\vec{OA}\right]$ bektorearen koordenatuak x, y eta z direlarik.

Adibidea P (2, 4, 3) eta M (3, 2, -4) puntuen adierazpena espazioan:



P (2, 4, 3)

x = 2 : P-tik YZ planora dagoen distantzia.

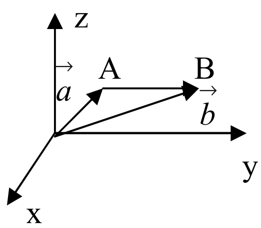
y = 4 : P-tik XZ planora dagoen distantzia.

z = 3 : P-tik XY planora dagoen distantzia.

$$\left[\vec{OP}\right] = \vec{v} = (2,4,3)$$

V^3 an egindako eragiketak, modu berean egin daitezke $\Re^3$ -ko elementuekin.

BEKTORE ASKE BATEN KOORDENATUAK



Ikusten denez, $\vec{a}+\left[\vec{AB}\right]=\vec{b}$ betetzen da.

Beraz, $\left[\vec{AB}\right]=\vec{b}-\vec{a}$

Koordenatuak, A (a_1, a_2, a_3) eta B (b_1, b_2, b_3) badira,

$\vec{AB}$ = (b_1- a_1, b_2- a_2, b_3- a_3)

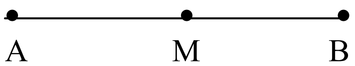
Adibidez, A (2, 0, 3) eta B (3, 1, 0) puntuak emanik,

$\vec{AB}$ = (1, 1, -3)

$\vec{BA}$ = (-1, -1, 3)

"Modulu eta norabide berdinak, baina norantza aurkakoak"

ZUZENKI BATEN ERDIKO PUNTUA



A (a_1, a_2, a_3) eta B (b_1, b_2, b_3) izanik, erdiko puntuaren koordenatuak :

$$M = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

A(1, 2, 0) eta B(3, 0, 1) –en erdiko puntua : M = (2, 1, $\frac{1}{2}$)

ARIKETAK

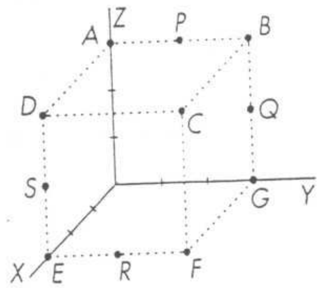
1. Irudi honetako puntuen koordenatuak hauek dira:

   $(0, 0, 3)$ $(0, 3, 3)$ $(3, 3, 3)$

   $(3, 0, 3)$ $(3, 0, 0)$ $(3, 3, 0)$

   $(0, 3, 0)$ $(0, \frac{3}{2}, 3)$ $(0, 3, \frac{3}{2})$

   $(3, \frac{3}{2}, 0)$ $(3, 0, \frac{3}{2})$



   Lotu puntu bakoitza bere koordenatuekin.

2. Froga ezazu A(4, 5, 7), B(-1, 2, 3) eta C(9, 8, 11) puntuak lerrokatuta daudela.

3. Kalkulatu "a" eta "b"-ren balioak, A(1, 2, -1), B(3, 0, -2) eta C(4, a, b) puntuak lerrokatuta egon daitezen.

4. A(1, 7, 11) eta B(4, -2, 17) ezagutuz, AB zuzenkia hiru zati berdinetan zatitzan duten puntuen koordenatuak aurki itzazu.

5. A(1, -7, 4) P(5, 3, 1) A´

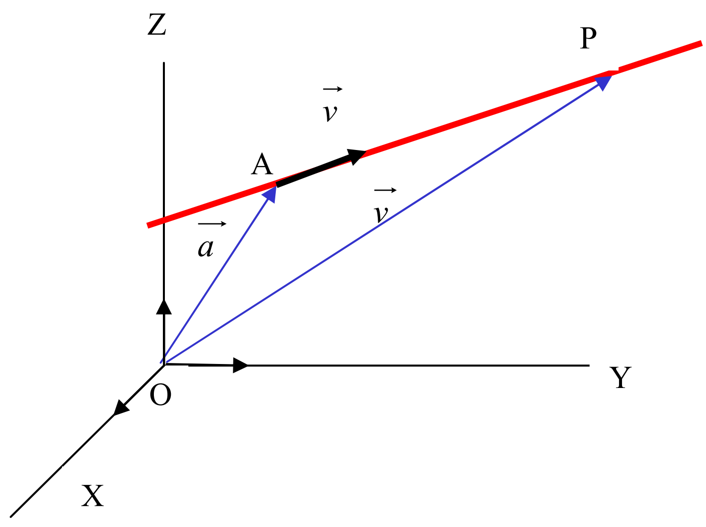
   P erdiko puntua dela jakinik, aurkitu A´ puntuaren koordenatuak

GEOMETRIA AFINA

ZUZENAREN EKUAZIOAK ESPAZIOAN

Zuzen bat determinatzeko, bi puntu behar dira, edo bestela, **puntu bat eta norabidea**. Norabide bektoreari **bektore zuzentzailea** esaten zaio.

Demagun zuzena A=(a_1 , a_2 , a_3) puntutik pasatzen dela eta bektore zuzentzailea $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dela.



Zuzen hori era askotan adieraz daiteke.

Adibide baten bidez azalduko ditugu era guztiak.

Har ditzagun A = (1 , 3 , -2) puntua eta $\vec{v} = (2,-1,3)$ bektore zuzentzailea.

Goiko irudian honako hau dugu: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ edo $\vec{p} = \vec{a} + k\,.\vec{v}$

Ekuazio bektoriala

(x , y , z) = (a_1 , a_2 , a_3) + k . (v_1 , v_2 , v_3)

Esate baterako, A = (1 , 3 , -2) puntua duen eta $\vec{v} = (2,-1,3)$ bektore zuzentzailea den zuzenaren ekuazio bektoriala zera da: (x , y , z) = (1 , 3 , -2) + k . (2 , -1 , 3)

Ekuazio parametrikoak

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 + k.v_1 \\ y &= a_2 + k.v_2 \\ z &= a_3 + k.v_3 \end{aligned}\right\}$$

Adibidetzat hartu dugun zuzenaren ekuazio parametrikoak hauek izango dira:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1+2k \\ y &= 3-k \\ z &= -2+3k \end{aligned}\right\}$$

Ekuazio jarraitua

Ekuazio parametrikoetan v_1 , v_2 eta v_3 zero ez badira, hiru ekuazioetan k bananduta , eta adibidearekin jarraituz, ondokoa lortuko dugu:

$$\frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

Puntua: A = (1 , 3 , -2) ; $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = (2,-1,3)$

Ekuazio laburtua

r zuzenaren ekuazio jarraituetatik abiatuz, hauek lor ditzakegu:

$$\left.\begin{aligned} -x+1 &= 2y-6 \\ 3y-9 &= -z-2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= -2y+7 \\ z &= -3y+7 \end{aligned}\right\}$$

Kasu honetan, ekuazio laburtuak ***y*-arekiko** lortu ditugu

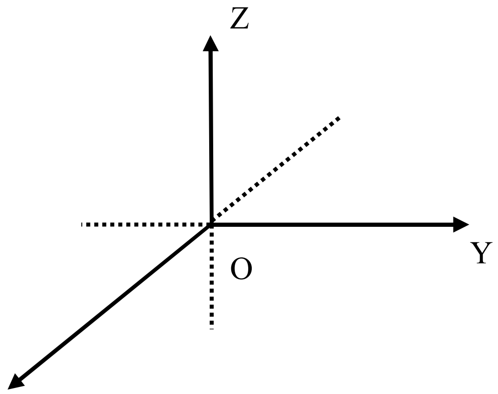
Ekuazio orokorra edo ekuazio inplizituak

Aurreko bi ekuazio laburtuak modu honetan adierazten dira era orokorrean:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-7=0 \\ 3y+z-7=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\}$$

Ardatz cartesiarren ekuazioak

- OX ardatzaren ekuazioa: $r:\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$
- OY ardatzaren ekuazioa: $r:\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$
- OZ ardatzaren ekuazioa: $r:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$



Ariketa ebatzia 1

Idatzi $r:\begin{cases} x=-1+6t \\ y=4t \\ z=6-t \end{cases}$ *zuzena era jarraituan eta era inplizituan. Aurkitu zuzenaren bi puntu eta bektore zuzentzailea.*

Era jarraituan: $\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{y-0}{4}=\dfrac{z-6}{-1}$

Era inplizituan: $\left.\begin{array}{l} -x-1=6z-36 \\ -y=4z-24 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+6z-35=0 \\ y+4z-24=0 \end{array}\right\}$

Bektore zuzentzailea: $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)=(6,4,-1)$

Puntu bat: **A(-1 , 0 , 6)**

Beste puntu batzuk ekuazio parametrikoan *t*-ri balioak emanda atera ditzakegu; adibidez $t = 1$ bada, $x = 5$; $y=4$ eta $z = 5$. Beraz, **B(5 ,4 , 5)**

Ariketa ebatzia 2

$r:\begin{cases} x=2-5y \\ z=-9+8y \end{cases}$ *zuzena emanda, zein da bektore zuzentzailea? Adierazi era parametrikoan eta era jarraituan*

Bektore zuzentzailea: $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)=(-5,1,8)$

Era parametrikoan: $r:\begin{cases} x=2-5t \\ y=t \\ z=-9+8t \end{cases}$

Era jarraituan: $\dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+9}{8}$

Nola aurkitu era inplizituan adierazitako $r:\begin{cases} \mathrm{Ax+By+Cz+D=0} \\ \mathrm{A'x+B'y+C'z+D'=0} \end{cases}$ **zuzen baten bektore zuzentzailea?**

Formula garrantzitsua:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$$

Adibidea

$r:\begin{cases} \mathrm{x+2y-7=0} \\ \mathrm{3y+z-7=0} \end{cases}$ zuzenaren bektore zuzentzailea honela kalkula daiteke:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 0 + 3\vec{k} - 0 - \vec{j} - 0 = (2,-1,3)$$

Ariketak

1. Idatzi (x,y,z) = (-1,2,3) + λ (0,2,-3) zuzenaren ekuazio inplizituak.

2. Determinatu A = (1,2,3) puntutik pasatuta $\vec{v} = (-1,0,0)$ bektore zuzentzailea duen zuzenaren ekuazio laburtuak.

3. Idatzi A = (1,0,1) puntutik pasatuta bektore zuzentzailetzat OX ardatza duen zuzenaren ekuazio parametrikoak eta laburtuak

4. Idatzi hiru ardatz cartesiarrek determinatzen dituzten zuzenen ekuazio parametrikoak.

5. Lor itzazu ondoko zuzenen bektore zuzentzaileak:

$r:\begin{cases} x = 1+6z \\ y = z \end{cases}$ $r':\begin{cases} 2x-y+z+1=0 \\ x+2y-z+4=0 \end{cases}$ $r'':\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ x+3z+4=0 \end{cases}$

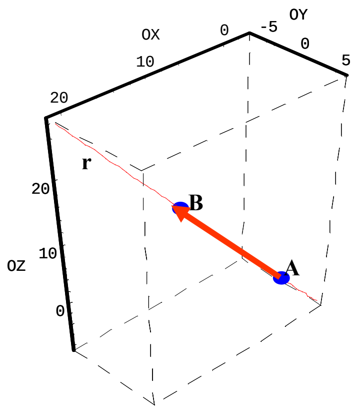
6. Demagun $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=2 \end{cases}$ zuzena.

a) Adierazi era parametrikoan

b) Existitzen al da a parametroaren baliorik non (a,0,-a) puntua r zuzenean dagoen?

Bi puntutatik pasatzen den zuzena

Demagun zuzenaren bi puntu ezagutzen ditugula: *A = (1 , 3 , -2)* eta *B = (11 , -2 , 13)*. Zein da beraren ekuazioa?



Puntutzat bata zein bestea har daiteke; adibidez, har dezagun *A=(1,3,-2)*

Bektore zuzentzailea: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (11-1\ ,\ -2-3\ ,\ 13-(-2)) = (10\,,-5\,,15)$

Bektore horren proportzional bat ere har dezakegu, esaterako $\vec{v} = (2\,,-1\,,3)$

Zuzenaren ekuazioa hauxe da: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$

Ariketak

1. Aurkitu A = (a , 1 , 1) eta B = (2 , 0 , 1) puntuetatik pasatzen den zuzenaren ekuazio orokorra edo cartesiarra. Ba al dago a-ren baliorik non (1 , 1 , 1) puntua r zuzenean dagoen?. Erantzuna arrazoitu.

2. *r* zuzen bat A=(3,0,4) puntutik pasatzen da eta B=(1,3,-2) eta C=(2,5,1) puntuetatik pasatzen den zuzenaren paraleloa da. Lor ezazu *r* zuzenaren ekuazioa.

3. Lor ezazu P=(1,-1,-2) puntutik pasatuta $r:\begin{cases} x=5 \\ z=1-y \end{cases}$ zuzenaren paraleloa den zuzenaren ekuazioa.

BI ZUZENEN POSIZIO ERLATIBOAK

Eman ditzagun bi zuzen, *r* eta *r'*.

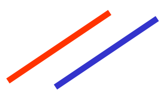
r-ren determinazioa: A=(x_1 , y_1 , z_1) puntua eta $\vec{u} = (u_1\,,u_2\,,u_3)$

r'-ren determinazioa: B=(x_2 , y_2 , z_2) puntua eta $\vec{v} = (v_1\,,v_2\,,v_3)$

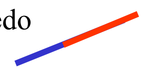
Zer posizio erlatibo izan ditzake bi zuzen horiek?

I) $\vec{u} = k\,\vec{v}$

Bi bektore zuzentzaileak proportzionalak badira, zuzenak **kointzidenteak** edo **paraleloak** dira.



edo



Bi kasu horiek bereizteko, nahikoa da zuzen bateko edozein puntu hartzea eta beraren koordenatuak beste zuzenaren ekuazioan ordezkatzea.

Ariketa. Azter itzazu bi kasu hauek:

a) $r: \dfrac{x-1}{2} = y-3 = \dfrac{z+2}{3}$ eta $r': \dfrac{x-7}{-4} = \dfrac{y-6}{-2} = \dfrac{z-11}{-6}$

b) $r: \begin{cases} x = -2+2t \\ y = 4 \\ z = 3-6t \end{cases}$ eta $r': \begin{cases} x = 5-t \\ y = 6 \\ z = 7+3t \end{cases}$

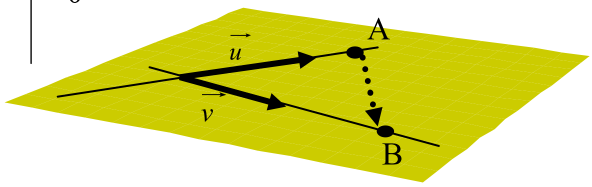
II) $\vec{u} \neq k\,\vec{v}$

Bi bektore zuzentzaileak linealki independenteak badira edo proportzionalak ez badira, **zuzenek elkar ebakitzen dute** edo **elkarrekin gurutzatzen dira**.

Bi kasu horiek bereizteko, $\overrightarrow{AB}$ bekorea kontsideratzen dugu, eta $\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v})$ kalkulatzen dugu

II-a)

$$\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$



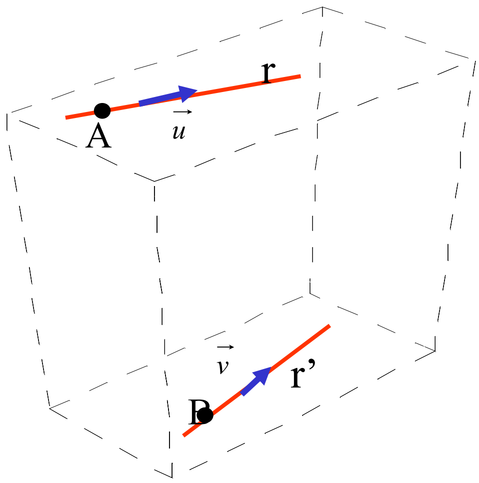
Bada, $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreak linealki dependenteak dira. Orduan, zuzenak plano berean daude, eta ebaki egiten dute elkar.

<u>Ariketa.</u> Determina ezazu bi zuzen hauen posizio erlatiboa

$$r: x = y = z + 1 \qquad \text{eta} \qquad r': \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = z + 2$$

II-b)

$$\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) \neq 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

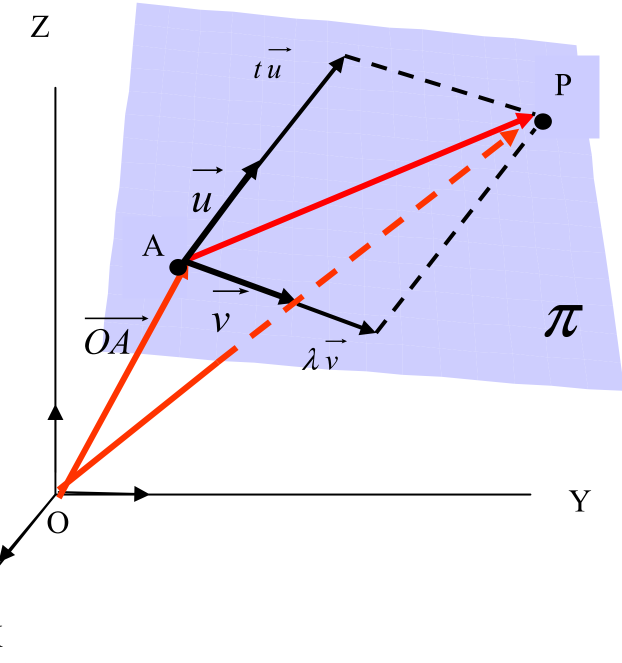


bada, hiru bektore horiek linelaki independenteak dira. Orduan, **zuzenak ez daude plano berean eta gurutzatu egiten dira elkarrekin.**

<u>Ariketa.</u> Determina ezazu bi zuzen hauen posizio erlatiboa

$$r: \frac{x-1}{2} = y - 3 = \frac{z-2}{3} \qquad \text{eta} \qquad r': \frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}$$

PLANOAK ESPAZIOAN



Plano bat determinatzeko, puntu bat eta bi norabide desbedin behar dira. Norabide horiek bi bektore linealki independente izan behar dute, eta planoaren bektore zuzentzaileak deritze.

A=(a₁ , a₂ , a₃) puntua eta $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ eta $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ bektoreak dituen π planoa kontsideratuko dugu: $\pi : (A, \vec{u}, \vec{v})$

Ikus ditzagun plano hori adierazteko zenbait era. Goiko irudian honako hau dugu:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ edo $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\,\vec{u} + \lambda\vec{v}$

Ekuazio bektoriala

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t.(u_1, u_2, u_3) + \lambda.(v_1, v_2, v_3)$$

Ekuazio parametrikoak

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 + t\,u_1 + \lambda v_1 \\ y &= a_2 + t\,u_2 + \lambda v_2 \\ z &= a_3 + t\,u_3 + \lambda v3_1 \end{aligned}\right\}$$

t eta λ-ri balioak emanik, planoaren puntuak lortzen dira.

<u>Ariketa.</u>

Kontsideratu $\pi : (A, \vec{u}, \vec{v})$ planoa, A = (4,-3,2), $\vec{u} = (-2,1,2)$ eta $\vec{v} = (-3,2,5)$ izanik. Determinatu:

a)Planoaren ekuazio bektoriala eta ekuazio parametrikoak
b)Planoko bi puntu, *A* ez direnak

Ekuazio orokorra, cartesiarra edo inplizitua

$\vec{u}$, $\vec{v}$ eta $\overrightarrow{AP}$ bektoreak plano berean daude; beraz, linealki dependenteak dira.

Beraz,

$$\text{Heina}\,(\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}) = 2 \quad \text{eta} \quad \det(\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad \text{da.}$$

bat $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$ Determinante horren garapena eginda, honelako ekuazio lortzen da: **Ax + By + Cz + D = 0**

Ekuazio horri planoaren ekuazio **orokorra, cartesiarra** edo **inplizitua** deritzo

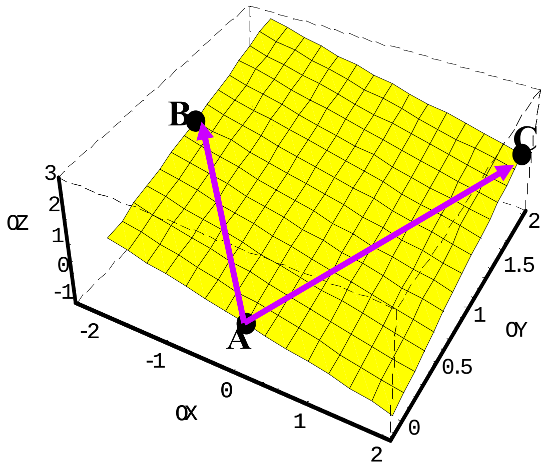
<u>Adibidea</u>. Idatzi P=(-1 , 2 , 5) puntutik pasatuta $\vec{u} = (4,1,6)$ *eta* $\vec{v} = (-3,2,1)$ *bektoreek determinatzen duten planoaren ekuazio orokorra.*

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-5 \\ 4 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad x + 2y - z + 2 = 0$$

Hiru puntu ez lerrokatuek determinatzen duten planoaren ekuazioa

Ariketa ebatzia.

Izan bedi A(0 , 0 , 0), B(-2 , 1 , 2) eta C(2 , 2 ,1) puntuak.
a)Egiazta ezazu ez daudela lerrokatuta
b)Aurkitu determinatzen duten planoaren ekuazioa



a) $\overrightarrow{AB}=(-2,1,2)$, $\overrightarrow{AC}=(2,2,1)$ Bi bektore horiek ez dira proportzionalak; beraz, hiru puntuak ez daude lerro berean.

b) Puntutzat *A, B* zein *C* har dezakegu

Bi bektore zuzentzaileak: $\overrightarrow{AB}$ eta $\overrightarrow{AC}$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \pi:-3x+6y-6z=0 \rightarrow \pi: x-2y+2z=0$$

Ekuazio segmentarioa

Plano batek OX, OY eta OZ ardatzak *A=(a,0,0), B=(0,b,0)* eta *C=(0,0,c)* puntuetan ebakitzen baditu, hurrenez hurren, hauxe da plano horren ekuazioa:

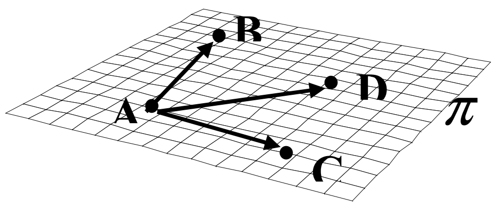
$$\begin{vmatrix} x-a & -a & -a \\ y & b & 0 \\ z & 0 & c \end{vmatrix}=0 \rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Esate baterako, ardatzak (2, 0, 0), (0 , 1 , 0) eta (0 , 0 , 3) puntuetan ebakitzen dituen planoa hau da:

$$\boxed{\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1}$$

Plano bereko hiru bektore (lau puntu) linealki dependenteak dira

Ariketa ebatzia. *Egiazta ezazu ondoko lau puntuek plano berean daudela edo koplanarioak direla:*
A = (0,1,1), B = (1,2,1), C = (0,0,3) eta D = (-1,-1,3)



$$\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$$

$$\overrightarrow{AC}=(0,-1,2) \quad \rightarrow \quad \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

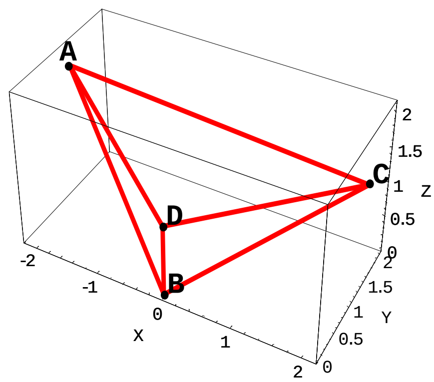
$$\overrightarrow{AD}=(-1,-2,2)$$

Beraz, *A*, *B, C* eta *D* puntuak plano berean daude. Gainera, lerrokatuta ez daudenez, **lauki bat** osatuko dute.

PLANO BEREAN EZ DAUDEN LAU PUNTUK OSATZEN DUTEN TETRAEDROA

Puntuak hirunaka hartuta plano bana osatzen dute. Laugarren puntua plano horretatik kanpo baldin badago, laukoteak tetraedro bat osatuko du.

Adibidea. *Har ditzagun A = (-2,1,2), B = (0,0,0), C = (2,2,1) eta D = (0,0,1) puntuak. Plano berean ez badaude* $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \neq 0$ *izan behar du*



$$\overrightarrow{AB} = (2,-1,-2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4,1,-1) \quad \to \quad \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2+2+8+4-4-2 = 6 \neq 0$$

$$\overrightarrow{AD} = (2,-1,-1)$$

Ariketa

Aurki ezazu *m*-ren balioa, ondoko lau puntuak koplanarioak izan daitezen: A(1 , 2 , 0), B(0 , 3 , -1), C(1 , 0 , 1), D(-1 , 2 , m)

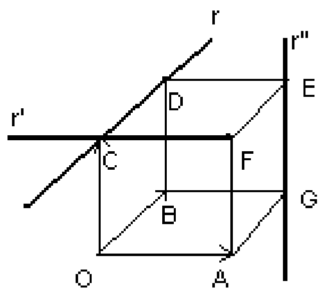
Zein da plano horren ekuazioa?

ARIKETAK

1. Ezker eta eskuin zutabeko elementuak erlaziona itzazu. Adierazi erlazioa marra bidez.

(1, 2, 0)	
x = 1	Zuzena
$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ z=1-y \end{array}\right\}$	
x + y + z = 1	Puntua
x = y = z	
$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=t \\ z=s \end{array}\right\}$	Bektorea
$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\}$	Planoa

2. Zenbat puntu behar dira zuzen bat determinatzeko? Nolako puntuak izan behar dira? Aukeratu beharrezkoak eta adierazi zuzena bi era ezberdinetan.



3. Izan bedi irudiko kuboa. Demagun kuboaren aldea 1 dela eta erreferentzia-sistema $\{O\,;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$ dela.
   a) Lor ezazu **r, r'** eta **r''** zuzenen ekuazioak.
   b) Nola daude elkar **r** eta **r'** zuzenak? Eta **r** eta **r''**? Arrazoitu. Plano berean daudenean, aurkitu planoaren ekuazioa.
   c) Zein da AGFE planoaren ekuazioa?

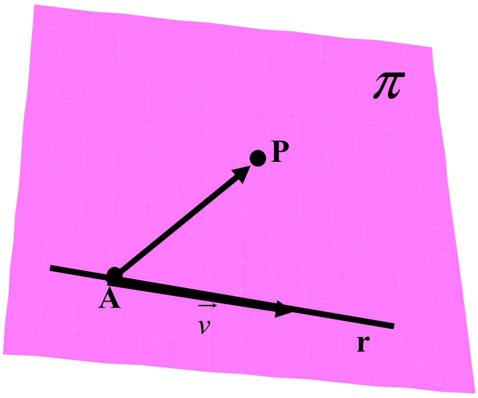
4. Posible denean, idatzi ondorengo kasuen adibide erraz bana eta azaldu bere esangura geometrikoa.
   a) Bi ekuazio eta hiru ezezaguneko sistema bateragarri zehatza
   b) Bi ekuazio eta hiru ezezaguneko sistema bateragarri indeterminatua.
   c) Bi ekuazio eta hiru ezezaguneko sistema bateraezina.
   d) Hiru ekuazio eta hiru ezezaguneko sistema bateragarri zehatza.

5. Adierazi algebraikoki plano bat.
   Aurkitu plano horren hiru puntu ez lerrokatuak eta adierazi planoa beste era batean.

6. Aukeratu lau puntu plano ezberdinetan daudenak. Ze irudi geometriko osatzen dute? Lau puntuek , zenbat plano ezberdin determinatzen dituzte?

7. Idatz itzazu:
   a) Bi zuzen paraleloak
   b) Bi zuzen ez paraleloak eta plano berean daudenak. Ze determinatzen dute elkar?.
   c) Bi zuzen ez paraleloak eta plano ezberdinetakoak. Nola daude espazioan?

ZUZEN BATEK ETA ZUZEN HORRETAN EZ DAGOEN PUNTU BATEK DETERMINATZEN DUTEN PLANOA.



Izan bitez *r* zuzena eta *P* puntua
r zuzenetik $\vec{v}$ bektore zuzentzailea eta *A* puntu bat ditzakegu. Gainera, $\overrightarrow{AP}$ bektorea kalkula daiteke. Beraz, baditugu planoa determinatzeko behar ditugun hiru elementuak: $\pi : (A\,,\vec{v}\,,\overrightarrow{AP})$

Adibidea. *Determinatu* $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = z+1$ *zuzena barnean edukita P = (0,1,1) puntutik pasatzen den planoaren ekuazioa*

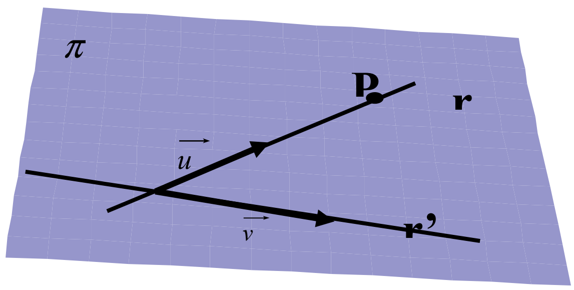
r-ren puntu bat; adibidez, *A = (1 , 0 , -1)*
r-ren bektore zuzentzailea: $\vec{v} = (3,2,1)$

$\overrightarrow{AP} = (-1,1,2)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 3 \\ y & 1 & 2 \\ z+1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 3x-7y+5z+2=0$$

ELKAR MOZTEN DUTEN BI ZUZENEK DETERMINATZEN DUTEN PLANOA.

Planoaren bektoretzat *r* eta *r'*-ren bektore zuzentzaileak har daitezke, eta puntutzat *r* zein *r'*-ren barnean dagoen puntu bat (P).



Adibidea.

Izan bitez $r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = t \end{cases}$ eta $r': \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ zuzenak.

a)Egiazta ezazu elkar puntu bat mozten dutela; hau da, planokideak direla.

b)Aurkitu determinatzen duten planoaren ekuazioa.

a) Lehen galdera bi eratan aztertuko dugu:

I) *r* zuzenaren elementuak: **A=(1,2,0)** puntua eta $\vec{u} = (1,-1,1)$ bektorea
r' zuzenaren elementuak: **B=(1,0,0)** puntua eta $\vec{v} = (1,1,1)$ bektorea

Beraz, $\overrightarrow{AB} = (0,-2,0)$

$$\det(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \text{ Plano berean daude}$$

II) Bi zuzenek parametro desberdinekin adierazita (*t* eta *s*), sistemaren ebazpena egingo dugu.

$$\left.\begin{array}{l} 1+t=1+s \\ 2-t=s \\ t=s \end{array}\right\} \rightarrow \text{Sistema bateragarri zehatza : } t=1 \text{ eta } s=1$$

Modu honetan eginda, ebaki puntua kalkulatu daiteke:
x = 2 , y = 1 eta z=1. **M = (2 , 1 , 1)**

<u>b) Planoaren ekuazioa:</u>

Planoaren puntu bat; adibidez, A = (1 , 2 , 0)
Bi bektoreak: $\vec{u} = (1,-1,1)$ eta $\vec{v} = (1,1,1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & -1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -x+z+1=0$$

<u>Ariketak</u>

1. Arrazona ezazu $\begin{cases} x=1-t+s \\ y=2t-2s \\ z=4-3t+3s \end{cases}$ ekuazio sistemak plano bat adierazten duen ala ez.

2. Egiazta ezazu A = (1 , 10 , 8) eta B = (1 , 2 , 3) puntuak $r: \begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ zuzenean dauden ala ez.

3. $\pi: x+y-z+1=0$ planoa emanda, aurki itzazu plano horretako lerrokatuta ez dauden hiru puntu.

4. Idatzi hiru plano cartesiarren ekuazio parametrikoak.

5. Idatzi XY planoaren paraleloa den plano baten ekuazioa
   " XZ " " " " " "
   " YZ " " " " " "

6. P = (3 , 1 , 1) puntua eta $r: \begin{cases} x=1 \\ z=-3 \end{cases}$ zuzena π planoaren barruan daude. Aurkitu planoaren ekuazioa

7. P = (1 , 3 , 5) eta M = (1 , 1 , 3) puntuak π planoan daude eta $\vec{v} = (2,1,0)$ bektorea planoaren paraleloa da. Lor ezazu π planoaren ekuazioa.

8. Lor ezazu P = (0 , 1 , 0) puntua barruan duen eta $r \equiv \frac{x}{2} = y = z$ eta $s \equiv \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$ zuzenen paraleloa den planoaren ekuazioa

9. Eman ditzagun A = (-1,2,5), B = (2,1,6), C = (4,1,7) eta D = (-1,5,6) puntuak.
   a) Egiazta ezazu tetraedro bat osatzen dutela.
   b) Aurki ezazu tetraedroaren alde baten ekuazioa.
   c) Aurki ezazu tetraedroaren aurpegi baten ekuazioa.

BI PLANOREN POSIZIO ERLATIBOA

Izan bitez $\begin{matrix} \pi : Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' : A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{matrix}$ planoak.

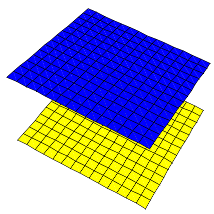
M matrizea eta *M'* matrize zabaldua idatziko ditugu: $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$; $M' = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$

Gerta daitezkeen kasuak:

I) $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ *rang (M) = rang (M') = 1* Bi planoak **kointzidenteak** dira.

Adibidez, $\pi : x - 3y + 2z - 9 = 0$ eta $\pi' : -2x + 6y - 4z + 18 = 0$

II) $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$ *rang(M) = 1 eta rang (M') = 2*



Adibidez, $\pi : 3x + 6y - 3z + 5 = 0$
$\pi' : 2x + 4y - 2z + 7 = 0$ $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{-3}{-2} \neq \frac{5}{7}$

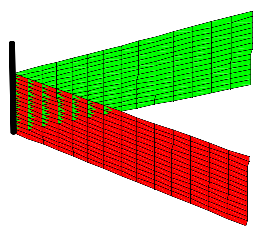
Sistema bateraezina. Ez dago puntu komunik. Planoak elkarren **paraleloak** dira.

III) *rang(M) = 2 eta rang (M') = 2*

$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ edo $\frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$ edo $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$

$\pi : x - y + 2z + 4 = 0$
$\pi' : x + y + 3z - 1 = 0$ $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1}$

Sistema bateragarri indeterminatua. Planoak **ebakitzaileak** dira, hots, beren arteko ebakidura **zuzen bat** da.



HIRU PLANOREN POSIZIO ERLATIBOA

Izan bitez $\begin{array}{l} \pi: Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi': A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ \pi'': A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{array}$ planoak.

M matrizea eta *M’* matrizeak ondokoak dira: $M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$; $M'=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$

Gerta daitezkeen kasuak:

I) *rang (M) = rang (M’) = 1*

$$\begin{array}{l} \pi: 2x-y+3z=-1 \\ \pi': 4x-2y+6z=-2 \\ \pi'': -2x+y-3z=1 \end{array}$$

Sistema bateragarri indeterminatua. Planoak **kointzidenteak** dira.

II) rang (M) = rang (M’) = 2

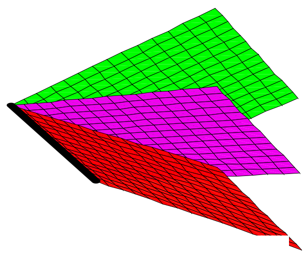
Sistema bateragarri indeterminatua. Plano horiek **zuzen komun bat** dute.

Bi posibilitate:

II-a)

$$\begin{array}{l} \pi: x+y-3z=-2 \\ \pi': 2x-y+5z=-5 \\ \pi'': 3x+2z=-7 \end{array}$$

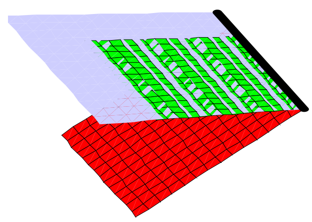
Hiru planoak ebakitzaileak izan zuzen batean



II-b)

$$\begin{array}{l} \pi: x+y-3z=-2 \\ \pi': 2x+2y-6z=-4 \\ \pi'': x+z=0 \end{array}$$

Bi plano kointzidenteak izan eta hirugarrena ebakitzailea.

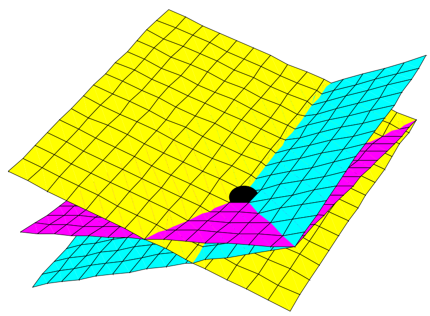


III) *rang (M) = rang (M’) = 3*

Sistema bateragarri determinatua. Soluzio bakarra. Hiru planoek elkar **puntu bat ebakitzen dute.**

$$\begin{array}{l} \pi: x+y-z=0 \\ \pi': x-y=1 \\ \pi'': x+z=2 \end{array}$$

x = 1 ; y=0 ; z=1 . **P = (1 , 0 , 1)**



IV) *rang (M) =2 ; rang (M') = 3*

Sistema bateraezina. rang (M) =2 denez, plano ebakitzaileak daude.

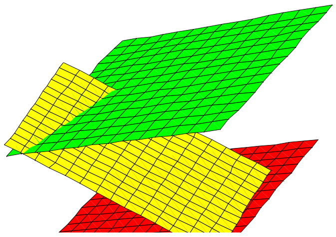
Bi posibilitate:

IV-a) $\pi : x + y - z = 0$

$\pi' : x + y - z = 1$

$\pi'' : 2x + y - 6z = 1$

Bi plano paraleloak dira eta hirugarrena ebakitzailak.

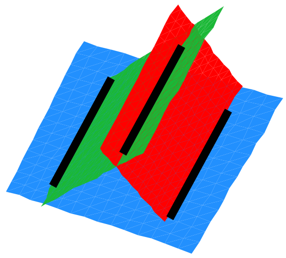


IV-b) $\pi : x - y + z = 0$

$\pi' : x + y + z = 0$

$\pi'' : x + z = -8$

Ez dago plano paralelorik. Plano ebakitzaileak dira, eta binaka zuzen bat ebakitzen dute elkar.



V) *rang (M) = 1 ; rang (M') = 2*

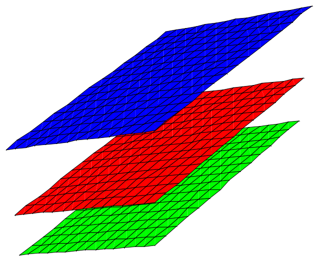
Bi posibilitate:

V-a) $\pi : 2x - y + 3z = -1$

$\pi' : 4x - 2y + 6z = 0$

$\pi'' : -2x + y - 3z = 4$

Hiru planoak desberdinak eta paraleloak



V-b) $\pi : x + y + z = 1$

$\pi' : 2x + 2y + 2z = 2$

$\pi'' : x + y + z = 0$

Bi plano berdinak eta hirugarrena paraleloa.

Ariketak

1. Aztertu hiru plano hauen posizio erlatiboa "a" parametroaren balioen arabera:

$$\pi_1 : x + y + z = a + 1$$
$$\pi_2 : ax + y + (a-1)z = a$$
$$\pi_3 : x + ay + z = 1$$

2. Berdin ondoko hiru planoekin:

$$\pi_1 : x + y + z = a - 1$$
$$\pi_2 : 2x + y + az = a$$
$$\pi_3 : x + ay + z = 1$$

ZUZEN BAT ETA PLANO BATEN POSIZIO ERLATIBOAK

Izan bitez

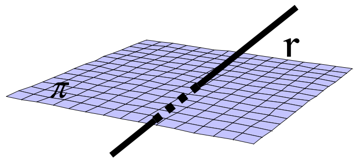
$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$ zuzena eta $\pi : A''x + B''y + C''z + D'' = 0$ planoa.

Hiru ekuazio eta hiru ezezaguneko sistema osatzen dugu. M eta M' matrizeak ondokoak izango dira:
$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad ; \quad M' = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

<u>Gerta daitezkeen kasuak:</u>

I) *rang (M) = rang (M') = 3*

Sistema bateragarri determinatua. Soluzio bakarra. Zuzenak eta planoak elkar **puntu bat ebakitzen dute.**

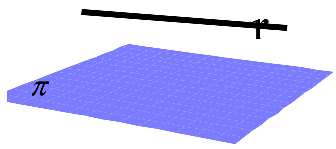


Adibidez,

$$r : x = \frac{y}{2} = z \quad \text{zuzena eta} \quad \pi : x + y + z + 4 = 0 \quad \text{planoa.}$$

II) *rang (M) =2 ; rang (M') = 3*

Sistema bateraezina. Ez dago puntu komunik. **Zuzena eta planoa elkarren paraleloak dira.**

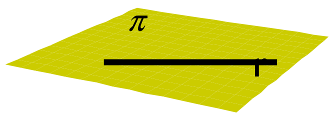


Adibidez,

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{zuzena eta} \quad \pi : 2x + z = 3 \quad \text{planoa}$$

III) *rang (M) = rang (M') = 2*

Sistema bateragarri indeterminatua. **Zuzena planoaren barruan dago.**



Adibidez,

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{zuzena eta} \quad \pi : 2x + z + 1 = 0 \quad \text{planoa}$$

ARIKETAK

1. Aztertu plano hauen arteko posizio erlatiboak:

$$a)\quad \pi_1: 4x+2y+4z-1=0 \quad \text{eta} \quad \pi_2: \begin{cases} x=1+\lambda-\mu \\ y=2+2\mu \\ z=3-\lambda \end{cases}$$

$$c)\quad \pi_1: mx+y+z-1=0 \quad ; \quad \pi_2: x+my+z-1=0 \quad \text{eta} \quad \pi_3: x+y+z-1=0$$

$$d)\quad \pi_1: 2x-y+3z-5=0 \quad ; \quad \pi_2: 3x+y+2z-1=0 \quad \text{eta} \quad \pi_3: 4x+3y+z+2=0$$

e) Izan bitez $\pi_1: x+y-2z=0$; $\pi_2: x-y=0$ eta $\pi_3: x-az=b$ planoak. Existitzen al dira *a* eta *b* parametroen baliorik non hiru planoak zuzen berean ebakitzen diren? Erantzuna ezezkoa bada, arrazoitu. Erantzuna baiezkoa bada, aurkitu parametroen balioak.

2. Aztertu ondoko zuzenen posizio erlatiboak:

$$a)\quad r: \begin{cases} x+2y-z=6 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases} \quad \text{eta} \quad s: \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=z$$

$$b)\quad r: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3t-2 \\ y=-6t+1 \end{cases} \quad \text{eta} \quad s: \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=z$$

3. Determina ezazu $r: \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+5}{-1}=\dfrac{z-3}{17}$ zuzena $\pi: \begin{cases} x=5-3\lambda+2\mu \\ y=7+2\lambda+5\mu \\ z=8+\lambda+3\mu \end{cases}$ plano barruan dagoen ala ez.

4. Lor ezazu *K*-ren balioa ondoko zuzenak elkarren ebakitzaileak izan daitezen, eta kalkulatu ebaki-puntua.

$$a)\ r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z+1}{2} \quad \text{eta} \quad s: \frac{x}{4}=\frac{y-k}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

$$b)\ r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=k+\lambda \end{cases} \quad \text{eta} \quad s: \begin{cases} x=4 \\ y=3+\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

5. Aurki ezazu *D*-ren balioa $r: \begin{cases} 2x+3y-z+D=0 \\ 3x-2y+2z-6=0 \end{cases}$ zuzenak:

   a) *OX* ardatza ebaki dezan.
   b) *OY* ardatza ebaki dezan.

6. Aurkitu *a* eta *b*-ren balioak $r: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{a}=\dfrac{z-5}{4}$ eta $s: \dfrac{x}{b}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-1}$ zuzenak elkarren paraleloak izan daitezen.

7. Izan bitez r_1 eta r_2 zuzenak:

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x-y+z=2 \\ x-y-z=0 \end{cases} \quad ; \quad r_2 \equiv \begin{cases} x+2z=-3 \\ y+az=-6 \end{cases}$$

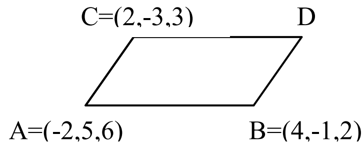
Aztertu *a* parametroaren baliorik existitzen den zeinetarako bi zuzenak ebaki ez diren.

8. Azter itzazu ondoko zuzen eta planoen arteko posizio erlatiboak *m* parametroaren arabera. Elkarren ebakitzaileak diren kasuetan, aurkitu ebaki-puntua

a) $r:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ eta $\pi: 2x+3y+mz+1=0$

b) $r: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$ eta $\pi: x+2y+8z+m=0$

9. *ABCD* paralelogramoan, lor itzazu *D* erpinaren koordenatuak.



10. Determinatu *(0 , 1 ,4)* puntua eta $r:\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z\ =3 \end{cases}$ zuzena barnean dituen planoaren ekuazioa.

11. Determinatu $r:\begin{cases} x+y-z-2=0 \\ 3x-3y-z+8=0 \end{cases}$ zuzena barnean duen eta *s: x-2 = y-3 = z* zuzenaren paraleloa den planoaren ekuazioa.

12. Lor ezazu koordenatu-jatorri puntua barnean duen eta *5x-3y+2z-3=0* planoaren paraleloa den planoaren ekuazioa.

13. Lor ezazu *A = (3, -2, -7)* puntua barnean duen eta *2x-3z+5=0* planoaren paraleloa den planoaren ekuazioa.

14. *2x+y+5z-3 = 0* planoak hiru ardatz cartesiarrak mozten ditu. Non?

15. *2x+y+5z-3 = 0* planoak nola mozten du *XY* plano cartesiarra? Eta *YZ* planoa?

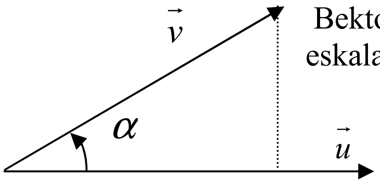
16. Aurkitu *m* parametroaren balioa *A = (0, 0 ,1), B = (0, 1, 2), C = (-2, 1, 3)* eta *D = (m,* m-1, 2) puntuak:
   a) planokide izan daitezen.
   b) tetraedro bat osa dezaten.

17. Determina ezazu *A = (2, -1, 3)* eta *B = (3, 1, 2)* puntuetatik pasatu eta $\vec{v}=(3,-1,-4)$ bektorearen paraleloa den planoaren ekuazioa.

18. Aurkitu a eta b parametroek bete behar dituzten baldintzak P=(a, b,0) puntua, A=(0, 1,-1) , B =(1, 1, 1) eta C =(2, 0, 0) puntuek determinatzen duten planoan egon dadin.

GEOMETRIA METRIKOA

BI BEKTOREREN ARTEKO BIDERKETA ESKALARRA



Bektoreen arteko eragiketa berezi bat da. Bi bektoreren biderkadura eskalarrari zenbaki erreal bat dagokio.

Era honetan definitzen dugu:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = |\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|\,.\cos\alpha$$

Bai $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ eta bai $\cos\alpha$ zenbakiak dira; beraz, $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ zenbaki bat da. Hortik datorkio, hain zuzen, izena: *eskalar* hitza.

Adibidea.

Eman dezagun $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ *eta* $\alpha = 60^0$ *direla*:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = 3\,.\,4\,.\cos\,60^{\,0} = 12\,.\,\frac{1}{2} = 6$$

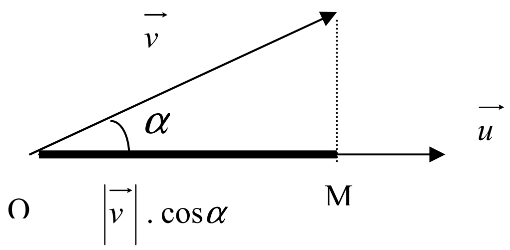
<u>Ondorio garrantzitsua:</u> **Bi bektore perpendikularrak badira, haien biderkadura eskalarra zero da**.

$\vec{u} \perp \vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$ Izan ere, $\cos\alpha = \cos 90^0 = 0$ da.

Eta alderantziz: “Nuluak ez diren bi bektoreren biderkadura eskalarra zero bada, bektoreak perpendikularrak dira”.

<u>Propietateak</u>

1.- Bi bektoreren biderkadura eskalarra hauxe da: bektore baten moduluaren eta beste bektoreak lehenengoaren gainean sortzen duen proiekzioaren arteko biderkadura.

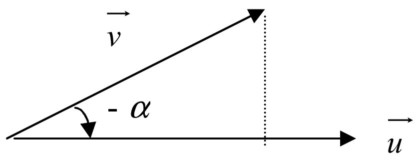


$\vec{v}$ *ren* proiekzioa u *ren* gainean

$$\begin{aligned}\vec{u}\,.\,\vec{v} &= |\vec{u}|\,.(|\vec{v}|\,.\cos\alpha)\\ &= |\vec{u}|\,.\,(\vec{v} - \text{ren proiekzioa } \vec{u} \text{ - ren gainean})\\ &= |\vec{u}|\,.\,\overline{OM}\end{aligned}$$

Angelua zorrotza bada emaitzaren zeinua + izango da, eta kamutsa bada zeinua – izango da.

2.- Trukatze-propietatea: $\vec{u}\;.\;\vec{v} = \vec{v}\;.\;\vec{u}$



Izan ere, $\vec{v}\ .\ \vec{u} = |\vec{v}|\,.\,|\vec{u}|.\cos(-\alpha) = |\vec{v}|\ .\ |\vec{u}|.\ \cos(\alpha) = \vec{u}\ .\ \vec{v}$,

zeren $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ baita.

3.- Banatze-propietatea: $\vec{u}\ .(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\ .\vec{v} + \vec{u}\ .\vec{w}$

4. Elkartze-propietatea:

$(\lambda\ \vec{u})\ .\ \vec{v} = \lambda\ (\vec{u}\ .\ \vec{v})$, λ edozein zenbaki erreal izanik.

Adibidez, $(3\ \vec{u})\ .\ \vec{v} = 3\ (\vec{u}\ .\ \vec{v})$

Adierazpen analitikoa

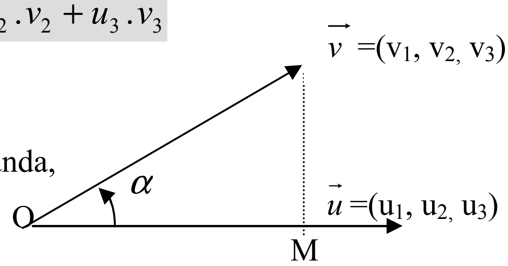
Demagun oinarria ortonormala dela eta oinarri horretan $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen osagaiak (u_1, u_2, u_3) eta (v_1, v_2 , v_3) direla, hurrenez hurren.

Ondokoa betetzen da: $\vec{u}\ .\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$

Esaterako,

$\vec{u} = (1, -2, 3)$ eta $\vec{v} = (3, 4, 0)$ bektoreak emanda,

$\vec{u}\ .\vec{v} = 1.3 + (-2).4 + 3.0 = -5$



Bi bektore perpendikularrak badira, haien biderkadura eskalarra zero da; hau da: $\mathbf{u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 = 0}$. Adibidez, (2 , -3 , 1) eta (3 , 2 , 0) bektoreak perpendikularrak dira, zeren 2.3 + (-3).2 + 1.0 = 0 baita.

KONTUAN IZAN!

Biderketa eskalarraren hiru definizio:

I) $\vec{u}\ .\ \vec{v} = |\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|\,.\cos\alpha$

II) $\vec{u}\ .\ \vec{v} = |\vec{u}|\,.\overline{OM}$

III) $\vec{u}\ .\ \vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$ (oinarria ortonormala den kasuan)

Emaitza: ZENBAKI ERREAL BAT da.

Ariketak

1. Oinarri ortonormal batean $\vec{u} = (1,-2,0)$ eta $\vec{v} = (-2,2,3)$ bektoreak emanda, kalkulatu:

$$a)\ \vec{u}\cdot\vec{v} \quad ; \quad b)\ 2\vec{u}\cdot\vec{v} \quad ; \quad c)\ (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{v}$$

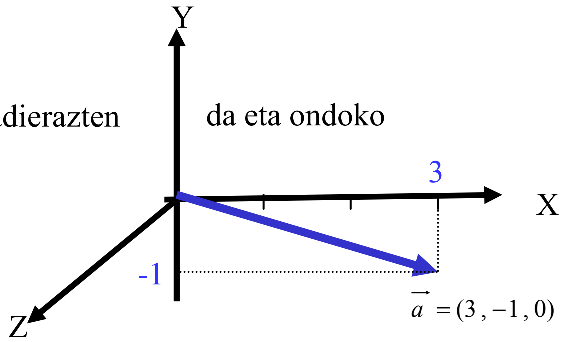
2. A(-11, 8 , 4) , B(-1 , -7 , -1) eta C(9 , -2 , 4) puntuak emanda, froga ezazu $\overrightarrow{AB}$ eta $\overrightarrow{BC}$ bektoreak perpendikularrak direla.
3. A(6 , 10 , 10), B(1 , 0 , -5) eta C(6 , -10 , 0) puntuak erpintzat hartuta, froga ezazu triangelu zuzena osatzen dutela.
4. Aurkitu *m*-ren balioa, ondoko bektoreak ortogonalak (perpendikularrak) izan daitezen:

$$\vec{a} = (2,1,-1) \quad ; \quad \vec{b} = (1,m,0)$$

ZENBAIT APLIKAZIO

Bektore baten modulua

Adibidez, $(3,-1,0)$ bektorearen modulua $|\vec{a}|$-ren bidez adierazten da eta ondoko balioa da:



$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{10}$$

Orokorrean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ bektore baten modulua hauxe da:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

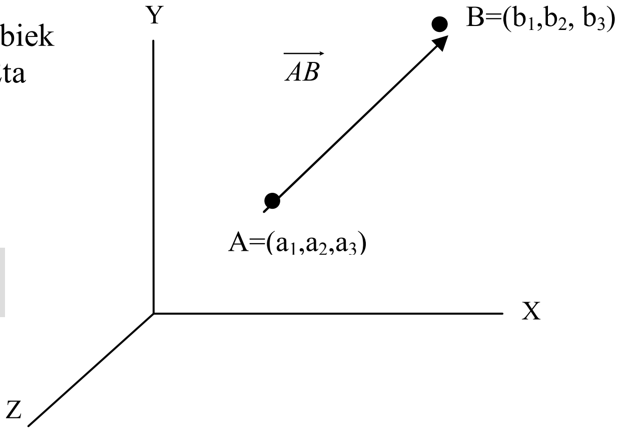
Bektore unitarioa.

1 balioko modulua duten bektoreei bektore unitario deitzen zaie.

$\vec{u}$ bektore bat emanda, zein da $\vec{u}$-ren norabide berbera eta noranzko berbera dituen bektore unitarioa? Ondoko bektorea da: $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

> *Adibidea.*
>
> Demagun $\vec{u} = (2,-1,3)$ dela.
>
> Modulua: $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$
>
> $\vec{u}$ -ren paraleloa den eta noranzko bera duen bektore unitarioa hauxe da: $\left(\dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{-1}{\sqrt{14}}, \dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$

Bi punturen arteko distantzia



Planoko A eta B puntuen arteko distantzia puntu biek determinaturiko bektore finkoaren modulua da. Eta $d(A,B)$ bidez adieraziko dugu.

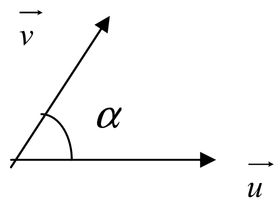
$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1 \ , \ b_2 - a_2 \ , \ b_3 - a_3)$$

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Esate baterako, A = (-1 , 4 , 0) eta B = (4 , 2 , 1) puntuak badira:

$$d(A,B) = \sqrt{(4+1)^2 + (2-4)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{25+4+1} = \sqrt{30}$$

Bi bektoreren arteko angelua



Izan bitez $\vec{u} = (u_1 \ , u_2 , u_3)$ eta $\vec{v} = (v_1 \ , v_2 , v_3)$ bektoreak oinarri ortonormal batean. Ondokoa betetzen da:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}\,.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\alpha \\ \text{Bestalde, } \vec{u}\,.\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|} = \frac{u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\ .\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Adibidea

$\vec{u} = (2, -3, 0)$ eta $\vec{v} = (5, 4, 0)$ badira,

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|} = \frac{2.5 + (-3).4 + 0.0}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 0^2}\ .\ \sqrt{5^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{-2}{\sqrt{13}\,.\sqrt{41}} = -0.0866 \text{ da,}$$

eta $\alpha = arc\ \cos(-0{,}0866) = 94^{\circ}\ 58'$

Ariketak

1. Oinarri ortonormal batean $\vec{u} = (2, 1, -1)$ *eta* $\vec{v} = (-3, 2, 0)$ bektoreak emanik, kalkula itzazu:

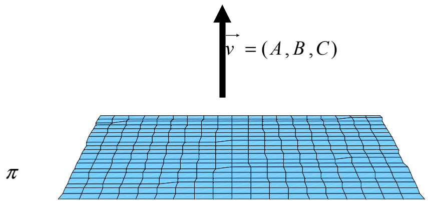
   a) $\vec{u}\,.\vec{v}$; b) $\left|\vec{u}\right|$; c) $\left|\vec{v}\right|$; d) $\cos(\vec{u}\ , \vec{v})$

2. Lortu $\vec{v} = (-3, 2, 0)$ bektorearen paraleloa izan eta 1 modulua duen bektorea.

3. Kalkula ezazu zein den P = (-2 , 3 , 1) eta Q = (3 , -4 , 0) puntuen arteko distantzia

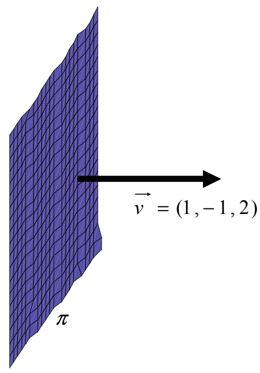
PLANO BATEN BEKTORE KARAKTERISTIKOA

Demagun $\pi : Ax+By+Cz+D = 0$ planoa.



$\vec{v} = (A, B, C)$

bektoreari **bektore karakteristikoa** deitzen zaio eta **planoarekin perpendikularra da**.



Adibidez, $\pi : x - y + 2z + 2 = 0$ planoaren bektore karakteristikoa $(1, -1, 2)$ da eta π-ren perpendikularra da.

```
Ariketa
Lor ezazu bektore bat, non 3x-2y+1=0 planoaren perpendikularra
izanik bere modulua 1 dena.
```

PERPENDIKULARTASUN ETA PARALELOTASUN BALDINTZAK

Bi zuzen:

Paraleloak, bektore zuzentzaileak proportzionalak direnean. Adib.:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{eta} \quad s: \frac{x}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-6}$$

Perpendikularrak, bektore zuzentzaileen arteko biderkadura eskalarra 0 denean. Adib.:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{eta} \quad s: \frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

Bi plano:

Paraleloak, bektore karakteristikoak proportzionalak direnean. Adib.:

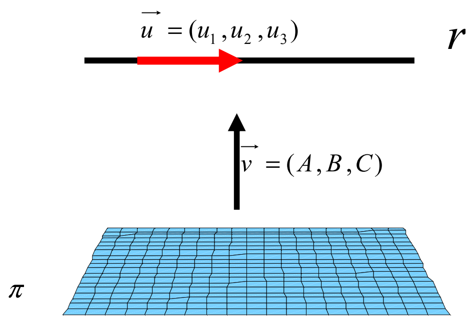
$$\pi_1 : x - y + 2z + 5 = 0 \quad \text{eta} \quad \pi_2 : 2x - 2y + 4z + 1 = 0$$

Perpendikularrak, bektore karakteristikoen arteko biderkadura eskalarra 0 denean. Adib.:

$$\pi_1 : x - y + 2z + 5 = 0 \quad \text{eta} \quad \pi_2 : 2x - 2y - 2z + 1 = 0$$

Zuzen bat eta plano bat:

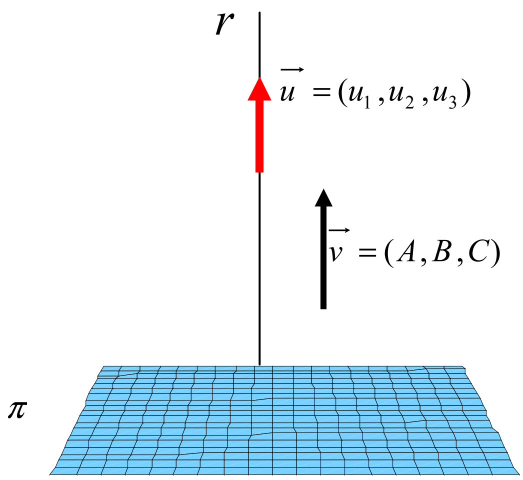
Paraleloak, bektore zuzentzailearen eta karakteristikoaren arteko biderkadura eskalarra 0 denean. Hau da: $A.u_1 + B.u_2 + C.u_3 = 0$



Adib.:

$x + y + z + 5 = 0$ planoa eta $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$ zuzena.

Perpendikularrak, bektore zuzentzaila eta karakteristikoa proportzionalak direnean. Hau da:

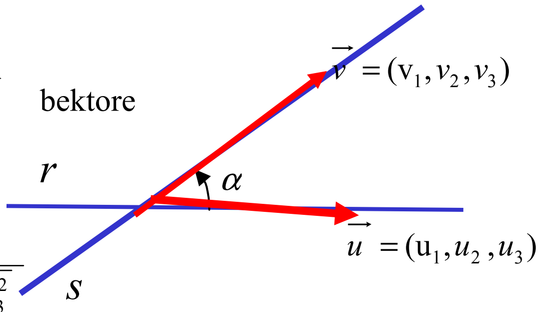


Adib.:

$x + y + z + 5 = 0$ planoa eta $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ zuzena.

BI ZUZENEN ARTEKO ANGELUA

r eta *s* zuzenek osatzen duten angelua, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektore zuzentzaileek osatzen duten angelu bera da.

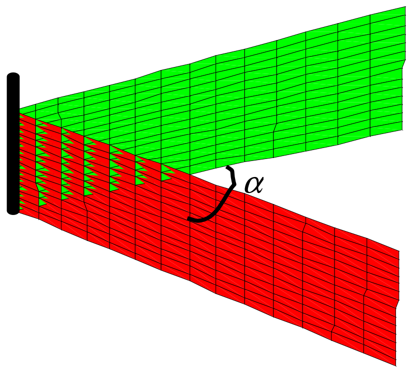


$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{u_1.v_1+u_2.v_2+u_3.v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

BI PLANOREN ARTEKO ANGELUA

Bi planoen bektore karakteristikoek osatzen duten angelua da.

Demagun bi planoak $Ax+By+Cz+D=0$ eta $A'x+B'y+C'z+D'=0$ direla. Zera betetzen da:

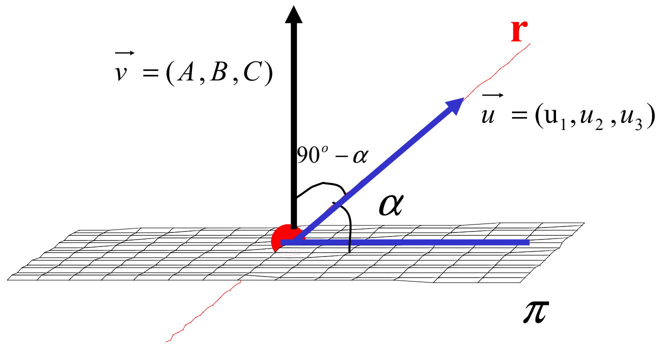


$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{|A.A'+B.B'+C.C'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

ZUZEN BAT ETA PLANO BATEN ARTEKO ANGELUA

α angelua *r*-ren bektore zuzentzaileak eta planoaren bektore karakteristikoak osatutako angeluaren osagarria da.

$$\cos(90^o-\alpha)=\sin\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{|A.u_1+B.u_2+C.u_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot}$$



Ariketak

1. Aurki ezazu ondoko bi zuzenek osatzen duten angelua:

$$r:\begin{cases}2x-y+3z-7=0\\x+2z=0\end{cases}\quad \text{eta}\quad s:\begin{cases}x+y+z=0\\3x+2y-1=0\end{cases}$$

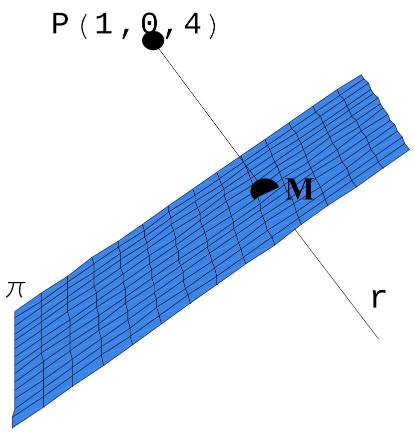
2. Aurki ezazu ondoko zuzenak eta planoak osatzen duten angelua

$$r:\begin{cases}2x+5z=7\\3x-4y=2\end{cases}\quad \text{eta}\quad \pi: x+y-2z=0$$

Ariketa ebatzia

Bila ezazu P(1 , 0 , 4) puntuaren proiekzio--puntua 2x – y + z + 2 = 0 planoarekiko.

P puntutik pasatu eta planoarekin perpendikularra den *r* zuzenaren bektore zuzentzailea emandako planoaren bektore karakteristikoa da, hau da, **(2, -1, 1)**.



r-ren ekuazioa honela kalkulatzen dugu:

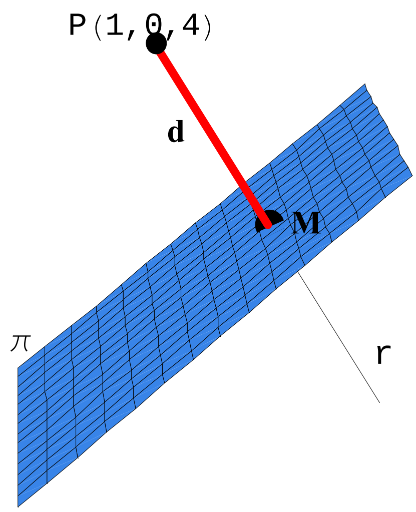
$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=(2,-1,1)\\ P=(1,0,4)\end{array}\right\}\Rightarrow r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z-4}{1}\Rightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1-2y\\ z=4-y\end{array}\right.$$

Orain kalkula dezagun zuzenaren eta planoaren arteko ebaki-puntua (M), ondoko ekuazio sistema ebatzita:

$$\left.\begin{array}{l}2x-y+z=-2\\ x=1-2y\\ z=4-y\end{array}\right\}\Rightarrow M=(-\frac{5}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3})$$

PUNTU BATETIK PLANO BATERAINOKO DISTANTZIA

Har ditzagun aurreko ariketa ebatziaren P(1 , 0 , 4) puntua eta 2x – y + z + 2 = 0 planoa, eta kalkula dezagun beraien arteko distantzia.



Bi eratan egingo dugu: arrazoituz eta formula bat erabiliz.

I) *M* proiekzio-puntua kalkulatzen dugu, aurreko ariketan emandako pausuak jarraituz.

$$M=(-\frac{5}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3})$$

P puntutik planora arteko distantzia eta P-tik M puntura artekoa bat dira; hau da:

$$\overrightarrow{PM}=(\frac{-5}{3}-1\ ,\ \frac{4}{3}-0\ ,\ \frac{8}{3}-4)=(-\frac{8}{3},\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$$

$$d(P,\pi)=d(P,M)=\left|\overrightarrow{PM}\right|=\sqrt{(-\frac{8}{3})^2+(\frac{4}{3})^2+(-\frac{4}{3})^2}=\sqrt{\frac{96}{9}}=\frac{8}{\sqrt{6}}$$

II) Formula erabilita:

Ax + By + Cz + D = 0 planoa eta A (a_1 , a_2 , a_3) puntua emanda:

$$\boxed{d\,(A,\pi) = \frac{|A.a_1 + B.a_2 + C.a_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Gure adibidean, $\pi : 2x - y + z + 2 = 0$ eta P = (1 , 0 , 4) direnez gero,

$$d(A,\pi) = \frac{|2.1 + (-1).0 + 1.4 + 2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|8|}{\sqrt{6}} = \frac{8}{\sqrt{6}}$$

<u>Ariketa</u>

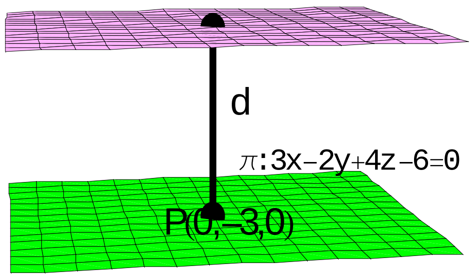
Kalkulatu P(1 , -2 , 0) puntutik -2x + 3y + z – 1 = 0 planora dagoen distantzia. Egizu bi eratan.

BI PLANO PARALELOEN ARTEKO DISTANTZIA

Kalkula dezagun

$\pi : 3x - 2y + 4z - 6 = 0$ eta $\pi' : 3x - 2y + 4z + 2 = 0$

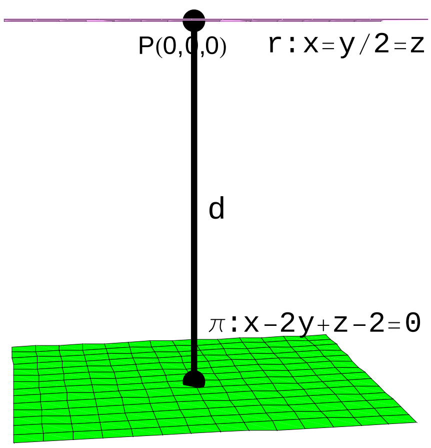
plano paraleloen arteko distantzia.



Har dezagun π-ren puntu bat, esaterako P = (0,-3,0), eta kalkula dezagun *P*-tik π'-ra arteko distantzia

$$d(\pi,\pi') = d(P,\pi') = \frac{|3.0 - 2.(-3) + 4.0 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{8}{\sqrt{29}}$$

ZUZEN ETA PLANO PARALELOEN ARTEKO DISTANTZIA



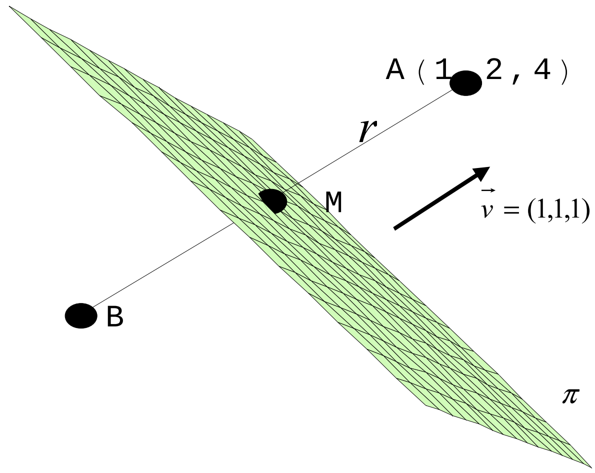
Eman ditzagun x-2y+z =2 planoa eta x=y/2=z zuzena. Arrazoitu paraleloak direla. Orain distantzia kalkulatuko dugu.

Aukera dezagun *r*-ren puntu bat (kontuz, ez planoarena!), adibidez, *P(0,0,0).* Ondoren, aski da *P*-tik planora arteko distantzia lortzea; hau da:

$$d(r,\pi) = d(P,\pi) = \frac{|1.0 - 2.0 + 1.0 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

PUNTU BATEN SIMETRIKOA PLANOAREKIKO

Kalkula dezagun $A = (1, 2, 4)$ puntuaren simetrikoa $x + y + z = 1$ planoarekiko



B puntua aurkitu behar da, eta hori ondoko hiru pausuak emanda lor daiteke:

I) *A*-tik pasatu eta π -ren perpendikularra den *r* zuzena bilatu.

II) Zuzena eta planoaren zuzenen arteko *M* ebaki-puntua aurkitu.

III) *M* puntua *A* eta *B*-n erdiko puntutzat hartu.

Hau da:

I) π -ren bektore karakteristikoa (1,1,1) da; beraz, *r* zuzen perpendikularraren zuzentzailetzat (1,1,1) har daiteke

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v} = (1,1,1)\\ A = (1,2,4)\end{array}\right\} \Rightarrow r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{1} \Rightarrow r: \begin{cases} y = x+1 \\ z = x+3 \end{cases}$$

II) π planoaren eta *r* zuzenaren ebaki- puntua kalkulatzeko ondoko ekuazio-sistema ebatziko dugu:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y=x+1 \\ z=x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow M = (-1, 0, 2)$$

III) Demagun *B*-ren koordenatuak (x , y , z) direla. *M* puntua, erdiko puntua denez:

$$-1 = \frac{x+1}{2} \;;\; 0 = \frac{y+2}{2} \quad \text{eta} \quad 2 = \frac{z+4}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -3 \,;\, y = -2 \;\; \text{eta} \;\; z = 0 \quad \Rightarrow \quad B = (3, -2, 0)$$

PUNTU BATEN SIMETRIKOA ZUZENAREKIKO

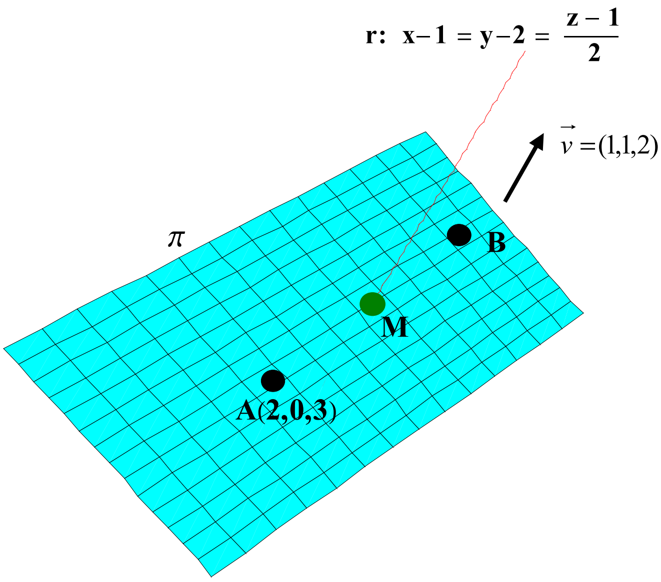
Kalkula dezagun A = (2 , 0 , 3) puntuaren simetrikoa $r: x-1 = y-2 = \frac{z-1}{2}$ *zuzenarekiko*

B puntua aurkitu behar da, eta hori ondoko hiru pausuak emanda lor daiteke:

I) A-tik pasatu eta r-ren perpendikularra den π planoa bilatu.

II) Zuzena eta planoaren zuzenen arteko M ebaki-puntua aurkitu.

III) M puntua A eta B-n erdiko puntutzat hartu.



Hau da:

I) π-ren bektore karakteristikoa eta r-ren zuzentzailea bektore bera da: (1,1,2). Beraz,

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v} = (1,1,2)\\ A = (2,0,3)\end{array}\right\} \Rightarrow \pi: x+y+2z+D=0$$

$A \in \pi$ denez, $2+0+6+D=0$; $D=-8$ $\Rightarrow \pi:\ x+y+2z-8=0$

II) π planoaren eta r zuzenaren ebaki- puntua kalkulatzeko ondoko ekuazio-sistema ebatziko dugu:

$$\left.\begin{array}{l}x+y+2z=8\\ x-1=y-2\\ z-1=2y-4\end{array}\right\} \Rightarrow M=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},2\right)$$

III) Demagun B-ren koordenatuak (x , y , z) direla. M puntua, erdiko puntua denez:

$$\frac{3}{2}=\frac{x+2}{2}\ ;\ \frac{5}{2}=\frac{y+0}{2}\quad \text{eta}\quad 2=\frac{z+3}{2}\ \Rightarrow\ x=1;\ y=5\ \text{eta}\ z=1\ \Rightarrow\ B=(1,5,1)$$

Ariketak

1. Lor ezazu P=(1,0,2) puntutik pasatu eta 2x-3y+4z-6=0 planoaren perpendikularra den zuzenaren ekuazioa.

2. Lor ezazu P=(1,-2,0) puntutik pasatuta $r: x+2=\frac{y-7}{4}=\frac{z+9}{5}$ zuzenaren perpendikularra den planoaren ekuazioa.

3. A=(1,2,-3) eta B=(-3,0,1) puntuek zuzenki bat mugatzen dute. Aurki ezazu zuzenki horren erdiko puntutik pasatzen den plano perpendikularraren ekuazioa.

4. Aurki ezazu A=(0,1,-2) puntuaren simetrikoa 2x-y-z+5=0 planoarekiko.

5. Aurki ezazu A=(1,0,2) puntuaren simetrikoa $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1}$ zuzenarekiko.

6. Determinatu $r: \frac{x}{2}=y-1=\frac{z}{3}$ zuzenak π:x+2y-z+4=0 planoaren gainean duen proiekzio ortogonala.

7. Nola daude elkar $r: \begin{cases} y=2x-1 \\ z=x+3 \end{cases}$ zuzena eta π:x-y+z-1=0 planoa? Paralelo baldin badaude, kalkulatu distantzia. Eta puntu bat mozten badute, kalkulatu angelua.

8. Aurrekoaren berdina, baina $r: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3}$ zuzena eta π:x+2y-z+4=0 planoa izanda.

9. Idatzi plano baten ekuazioa, non bere bektore karakteristikoaren koordenatuak ez diren nuluak. Ondoren, aukeratu planotik kanpo dagoen puntu bat. Datu horiekin, kalkula ezazu planoa aurpegitzat eta puntua erpintzat duen kuboaren bolumena.

BIDERKETA BEKTORIALA

Definizioa

Izan bedi $B=\{\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\}$ delakoa V_3-ren oinarri ortonormal bat eta izan bitez $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bi bektore, oinarri horretan $(u_1,\ u_2\ ,u_3)$ eta $(v_1,\ v_2\ ,v_3)$ koordenatuak dituztenak.

$\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen biderkadura bektoriala $\vec{u}\ x\ \vec{v}$ eran adierazten da eta V_3-ko **beste bektore bat da**

$$\vec{u}\ x\,\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

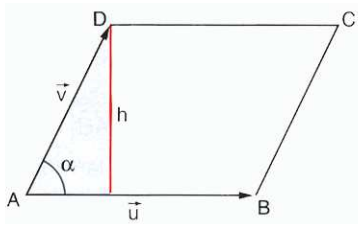
Barne-eragiketa bat da: $V_3 \;\text{x}\; V_3 \longrightarrow V_3$

Defini ditzagun bektore horren modulua, norabidea eta noranzkoa.

- <u>Modulua</u>. $|\vec{u}\ x\ \vec{v}|=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\sin(\vec{u}\ ,\vec{v})$

Interpretazio geometrikoa. Demagun $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektore linealki independenteak ditugula eta kontsidera dezagun horien bidez eraikitako ABCD paralelogramoa.

Honako hau betetzen da:
$|\vec{u}\ x\ \vec{v}|=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\sin(\vec{u}\ ,\vec{v})=AB\,.\,AD\,.\,\sin\alpha$

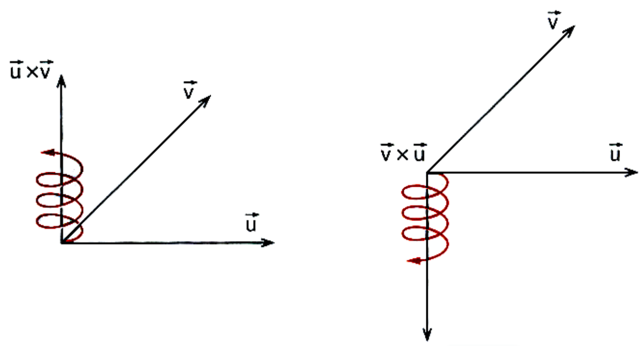


Baina, $AD\,.\sin\alpha=h$ denez, hauxe idatz dezakegu:
$|\vec{u}\ x\ \vec{v}|=AB\,.\,h=ABCD-$ren azalera

Beraz, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen arteko **biderkadura bektorialaren modulua**, horien gainean eraikitako **paralelogramoaren azalera**ren berdina da.

- <u>Norabidea</u>. $\vec{u}$ **eta** $\vec{v}$ **bektoreen norabideen perpendikularra** da.

- <u>Noranzkoa.</u> $\vec{u}$ -tik $\vec{v}$ -ra angelu txikiena ibiliz biraraztean kortxo-kentzekoak aurrerantz duena.



$(\vec{u}\ ,\vec{v})<180^0$ bada, gorantz

$(\vec{u}\ ,\vec{v})>180^0$ bada, beherantz

Propietateak

I) Baldin $\vec{u}=\vec{0}$ edo $\vec{v}=\vec{0}$ badira, $\vec{u}\ x\ \vec{v}=\vec{0}$ da.

Arrazoitu ezazu $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ ez-nuluak baina paraleloak edo linealki dependenteak direnean, $\vec{u}\ x\ \vec{v}=\vec{0}$ dela.

II) $\vec{u}\ x\ \vec{v}=-(\vec{v}\ x\ \vec{u})$, zeren $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$ Modulua eta norabidea berdina dute, baina noranzkoa aurkakoa.

III) Banatze propietatea: $\vec{u}\ x\ (\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\ x\ \vec{v})+(\vec{u}\ x\ \vec{w})$

IV) Elkartze nahasia: $k\ (\vec{u}\ x\ \vec{v})=(k\ \vec{u})\ x\ \vec{v}=\vec{u}\ x\ (k\ \vec{v})$, non $k\in R$ den.

Esaterako, $5\ (\vec{u}\ x\ \vec{v})=(5\ \vec{u})\ x\ \vec{v}=\vec{u}\ x\ (5\ \vec{v})$

Ariketak

1.- Kalkula ezazu $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ eta $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ bektoreen arteko biderkadura bektoriala. Ondoren, egiaztatu ezazu ateratzen den bektorea perpendikularra dela bai $\vec{u}$-rekin bai $\vec{v}$-rekin

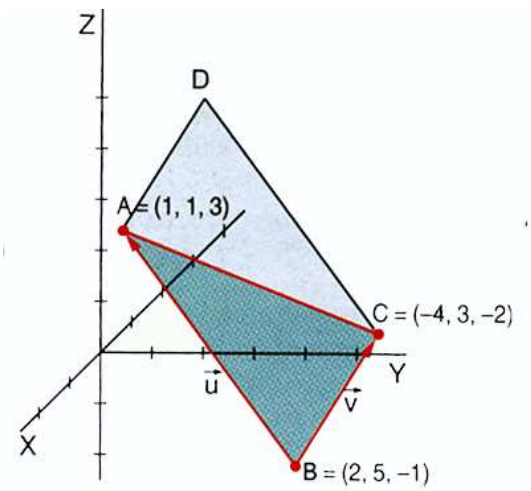
2.- Aurki ezazu A(0 , 1 ,1) , B(2 , 1 ,0) eta C(3 , 0 , 1) puntuek determinatzen duten planoarekin perpendikularra den bektore bat.

3.- Zuzen bat P(1 , 0 ,1) puntutik pasatzen da eta bere bektore zuzentzailea $\vec{u}=(1,1,0)$ eta $\vec{v}=(1,1,1)$ bektoreekin perpendikularra da. Lor itzazu zuzen horren ekuazio parametrikoak.

APLIKAZIOAK

I) Triangelu baten azalera

Izan bitez A = (1 , 1 ,3) , B = (2 , 5 , -1) eta C = (-4 , 3, -2) puntuak. Lor itzazu irudiko *ABCD* paralelogramoaren azalera eta *ABC* triangeluaren azalera.



$\vec{u}=\overrightarrow{BA}$ eta $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ badira, ABCD paralelogramoaren azalera $|\vec{u}\ x\ \vec{v}|$ eginda kalkulatzen da.

Kalkula dezagun, bada $|\vec{u}\ x\ \vec{v}|$:

$\vec{u}=(-1\,,-4\,,4)$

$\vec{v}=(-6\,,-2\,,-1)$

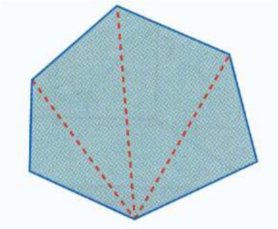
$$\vec{u}\ x\ \vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -4 & 4 \\ -6 & -2 & -1 \end{vmatrix}=12\,\vec{i}-25\,\vec{j}-22\vec{k}$$

Beraz, paralelogramoaren azalera: $|\vec{u}\ x\ \vec{v}|=\sqrt{12^2+(-25)^2+(-22)^2}=\sqrt{1253}\approx 35{,}4\ u^2$

ABC triangeluaren azalera, paralelogramoaren azaleraren erdia da; hau da $\frac{1}{2}|\vec{u}\ x\ \vec{v}|$; hortaz:

$\frac{\sqrt{1235}}{2}\approx 17{,}7\ u^2$

Poligono baten azalera

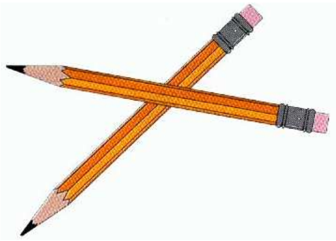


Edozein poligonoren azalera kalkula dezakegu, triangelutan deskonposatuz gero.

Poligonoaren azalera triangelu guztien azaleren batura izango da.

II) Bi zuzenekin perpendikularra den bektore bat

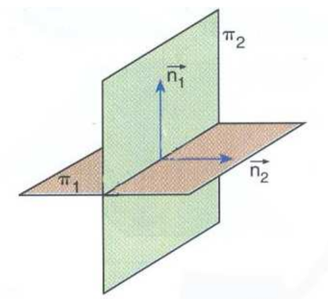
Demagun bi zuzenen bektore zuzentzaileak $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ direla.
Beraiekin perpendikularra den bektore bat $\vec{u}\ x\ \vec{v}$ izango da.



Hartu bi arkatz edo boligrafo.
Jarri posizio desberdinetan eta egiaztatu beti egongo dela arkatz bien perpendikularra den bektoreren bat eta segmenturen bat.

III) Bi planorekin paraleloa den bektore bat

Demagun bi planoren bektore karakteristikoak $\vec{u}=(A,B,C)$ eta $\vec{v}=(A',B',C')$ direla. Bi plano horiekin paraleloa den bektore bat $\vec{u}\ x\ \vec{v}$ da.



Hartu bi folio elkar zuzen bat mozten dutenak.
Kontura zaitez bi folioen bektore karakteristikoen perpendikularra den bektorea zuzenaren bektore zuzentzailea dela.

$\pi_1: x+z=0$ eta $\pi_2: 2x-y+z-3=0$ planoekin paraleloa den bektore bat edo bi plano horiek determinatzen duten zuzenaren bektore zuzentzailea gauza bera da.
Hau da,

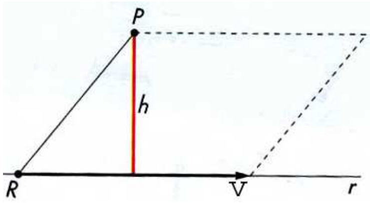
$$r:\begin{cases} x+z=0 \\ 2x-y+z-3=0 \end{cases} \quad \text{zuzenaren bektore zuzentzailea} \quad \vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}-\vec{j}-\vec{k}=(1,-1,-1) \text{ da.}$$

<u>Ariketa</u>

Lor ezazu $r:\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+y-z+3=0 \end{cases}$ eta $r':\begin{cases} 2x+y-3z-1=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ zuzenekin perpendikularra den bektore bat.

IV) Puntu batetik zuzen baterainoko distantzia

Bi era ezberdinetan egingo dugu:



- Izan bitez zuzenaren R puntua eta $\vec{v}$ bektore zuzentzailea.

Zuzenekoa ez den P puntutik r zuzenerako distantzia kalkulatu behar dugu

$\overrightarrow{RP}$ eta $\vec{v}$ bektoreek determinaturiko paralelogramoaren azalera $\left|\overrightarrow{RP}\ x\ \vec{v}\right|$ da.

Baina paralelogramo baten azalera bere oinarriaren eta altueraren (*dist (P , r)*) arteko biderkadura ere bada. Alegia, $\left|\vec{v}\right| .\ d\,(P,r)$

Azaleraren bi adierazpenak berdinduz eta d (P , r) bakanduz, bilaturiko distantzia lortuko dugu:

$$d\,(P,\,r) = \frac{\left|\overrightarrow{RP}\ x\ \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$$

Adibidea.

Kalkula dezagun P(2 , 4 , 1) puntuaren eta r: (x , y , z) = (2 , 3 , -1) + k (1 , 2 ,1) zuzenaren arteko distantzia.

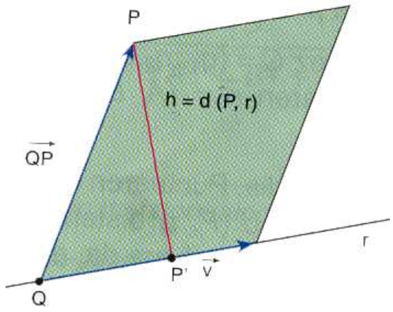
Zuzenaren puntua: $R = (2\ ,3\ ,-1)$

Zuzenaren bektore zuzentzailea: $\vec{v} = (1\ ,2\ ,1)$

$$\overrightarrow{RP} = (0,1,2) \qquad \overrightarrow{RP}\ x\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$d\,(P,\,r) = \frac{\left|\overrightarrow{RP}\ x\ \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\sqrt{9+4+1}}{\sqrt{1+4+1}} = \sqrt{\frac{14}{6}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

- *P* puntuak r zuzenaren gainean duen proiekzio ortogonala lortuz gero (*P'* puntua), zera beteko litzateke: *d(P , r) = d(P , P')*. Horretarako, hurrengo pausuak egingo ditugu:



  - r-ren perpendikularra izanik P puntua barnean daukan π planoa lortuko dugu:

$$\pi : x + 2y + z + D = 0$$

$P \in \pi$ denez gero, 2 + 2(4) + 1 + D = 0 ; D = -11

Beraz, $\pi : x + 2y + z - 11 = 0$

  - *P'* puntua lortuko dugu, hots, π-ren eta r-ren arteko ebaki puntua. Horretarako:

r: (x , y , z) = (2 , 3 , -1) + k (1 , 2 ,1) edo $r : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 + 2k \\ z = -1 + k \end{cases}$

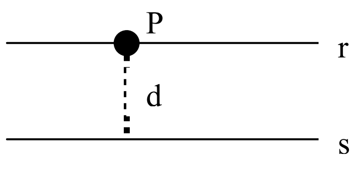
$\pi \cap r$: (2+k) + 2(3+2k) + (-1+k) – 11 = 0 ; k = 2/3

$$P' = (2 + \frac{2}{3} \ , \ 3 + 2\frac{2}{3} \ , \ -1 + \frac{2}{3}) = (\frac{8}{3} , \frac{13}{3} , -\frac{1}{3})$$

$$\overrightarrow{PP'} = (\frac{2}{3} , \frac{1}{3} , \frac{4}{3})$$

$$d(P , r) = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{21}{9}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

V) Bi zuzen paraleloen arteko distantzia



Zuzen batetik edozein puntu aukeratu (*P*), eta kalkulatu *P*-tik beste zuzenera dagoen distantzia.

Ariketa.
Idatzi bi zuzen paraleloak eta kalkulatu beraien arteko distantzia.

BIDERKETA MISTOA

Definizioa

Biderketa mistoa V_3-ren hiru bektore askeen arteko eragiketa bat da. Lehendik ezagunak ditugun biderketa eskalarretik eta biderketa bektorialetik abiatuz definitzen da.

$\left[\vec{u}\ ,\vec{v}\ ,\vec{w}\right]$ eran adierazten da eta emaitza **zenbaki erreal bat** da, modu honetan definitzen dena: $\left[\vec{u}\ ,\vec{v}\ ,\vec{w}\right]=\vec{u}\ .(\vec{v}\ x\ \vec{w})$

Oinarri ortonormal batean, eragiketa horren emaitza eta ondoko determinantearen balioa bat datoz:

$$\left[\vec{u}\ ,\vec{v}\ ,\vec{w}\right]=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Adibidea.

$\vec{u}=(3,-1,2)$, $\vec{v}=(-2,5,1)$ eta $\vec{w}=(1,1,2)$ bektoreak emanda, kalkulatu $\left[\vec{u}\ ,\vec{v}\ ,\vec{w}\right]$ biderketa mistoa.

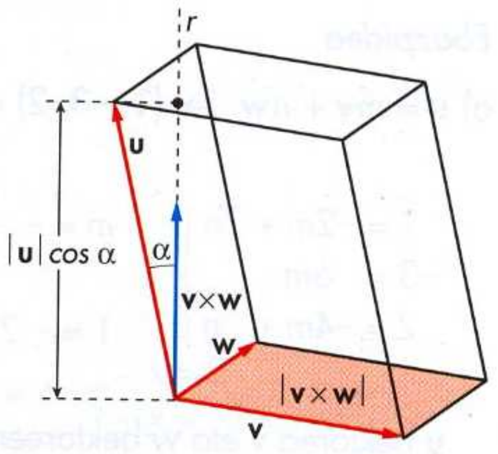
$$\left[\vec{u}\ ,\vec{v}\ ,\vec{w}\right]=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=30-4-1-10-3-4=8$$

Zein izango da $\left[\vec{v}\ ,\vec{u}\ ,\vec{w}\right]$ biderketaren emaitza? Zergatik?

Propietateak.

- Bektore bat nulua bada, biderketa mistoa **0** da.
- Bektoreak planokide edo linealki dependenteak badira, biderketa mistoa **0** da. Zergatik?

<u>Interpretazio geometrikoa</u>



Demagun $\vec{u}$, $\vec{v}$ eta $\vec{w}$ bektore linealki independenteak ditugula eta kontsidera dezagun horien gainean eraikitako paralelepipedoa. Honako hau betetzen da:

$$\left[\vec{u}\ ,\vec{v}\ ,\vec{w}\right]=\vec{u}\ .(\vec{v}\ x\ \vec{w})=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\ x\ \vec{w}\right|\cos\alpha$$

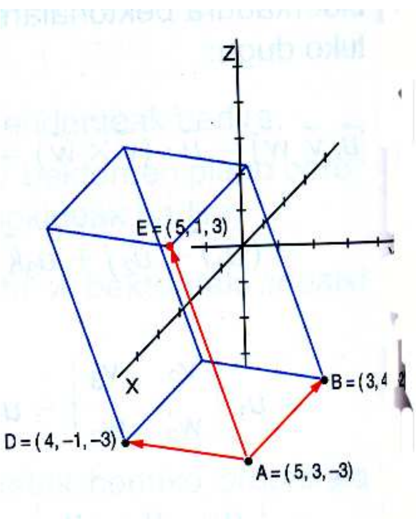
Baina dakigunez, $\left|\vec{v}\ x\ \vec{w}\right|=$ oinarriaren azalera = S da; eta

$\cos\alpha$ arrazoiaren definizioaren arabera: $\left|\vec{u}\right|\cos\alpha=h$

Beraz, honako hau idatz dezakegu:

$$\left[\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{w}\right] = S\,.\,h =$$ **Paralelepipedoaren bolumena.**

Adibidea.
A = (5,3,-3) , B=(3, 4,-2), D=(4,-1,-3) eta E=(5,1,3) erpinak emanda, kalkula ezazu eraikitzen duten paralelepipedoaren bolumena.



$$\overrightarrow{AB} = (-2,1,1) \quad ; \quad \overrightarrow{AD} = (-1,-4,0) \quad ; \quad \overrightarrow{AE} = (0,-2,6)$$

$$\text{Bolumena} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 56\ u^3$$

APLIKAZIOAK

I) Tetraedro baten bolumena

Bolumenaren formula: $\frac{1}{3}$. oinarriaren azalera (S_t) . altuera

Ikus dezakezunez, tetraedroaren oinarriaren azalera paralelepipedoaren oinarriaren azaleraren erdia da $(S_t = \frac{1}{2} S_p)$, eta altuera berbera dute.

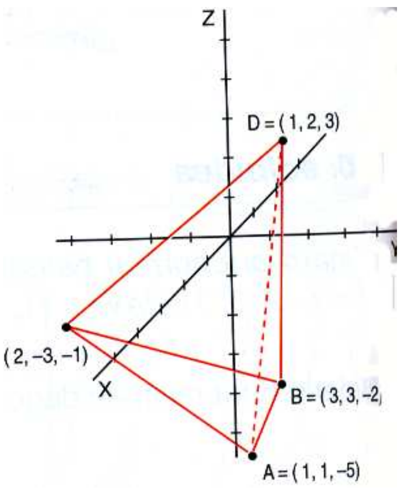
Beraz, tetraedroaren bolumena :

$$\frac{1}{3}.\frac{1}{2}\,S_p.h = \frac{1}{6}\ .\ \text{paralelepipedoaren bolumena} = \frac{1}{6}.\left[\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{w}\right]$$

Adibidea
Lor ezazu erpinak A = (1 , 1 ,-5) , B = (3 , 3 , -2), C =(2 , -3 , -1) eta D = (1 , 2 ,3) puntuetan dituen tetraedroaren bolumena.

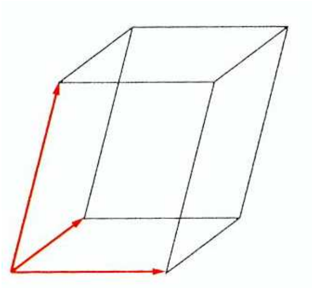
$$\overrightarrow{AB} = (2,2,3) \quad ; \quad \overrightarrow{AD} = (1,-4,4) \quad ; \quad \overrightarrow{AE} = (0,1,8)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -85 \qquad ; \qquad \text{Bolumena} = \frac{1}{6}\,.\,|-85| = \frac{85}{6}\,u^3$$



Ariketak

1. Lor ezazu
   $\vec{u}=(-5,1,7)$, $\vec{v}=(4,7,3)$ eta $\vec{w}=(1,0,4)$
   bektoreen gainean eraikitako paralelepipedoaren bolumena.



Em.: *202 u^3*

2. Emanik A=(1 , 3 ,0) , B = (2 , -1 , 4), C =(1 , -1 , 2) eta D = (4 , 0 ,1) puntuak, egiaztatu planokideak ez direla. Ondoren, lortu lauron artean determinaturiko tetraedroaren bolumena eta ABC aurpegiaren azalera.

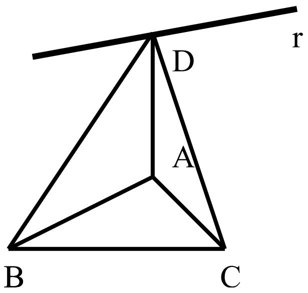
$$\text{Em.: V} = \frac{13}{3}u^3 \ , \ S=\sqrt{21}\,u^2$$

Ariketa ebatzia

Tetraedro baten hiru erpin A(1 , 0 , 0), B(0 , 2 , 0) eta C(2 , 1 , 0) dira. Laugarren erpina, D, hurrengo zuzenean dago

$$x-2=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$$

Aurkitu D erpina, jakinik tetraedroaren bolumena 1 u^3 dela



r zuzena era parametrikoan adieraziko dugu: $r:\begin{cases} x=2+t \\ y=2t \\ z=-1-t \end{cases}$

D puntua, *t* parametroaren arabera, modu hoetakoa izango da: *D = (2+t , 2t , -1-t)*

$$\text{Bolumena} = 1 = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{AD}\right]\right|$$

$$\overrightarrow{AB}=(-1,2,0) \quad ; \quad \overrightarrow{AC}=(1,1,0) \quad ; \quad \overrightarrow{AD}=(1+t\ ,\ 2t\ ,\ -1-t)$$

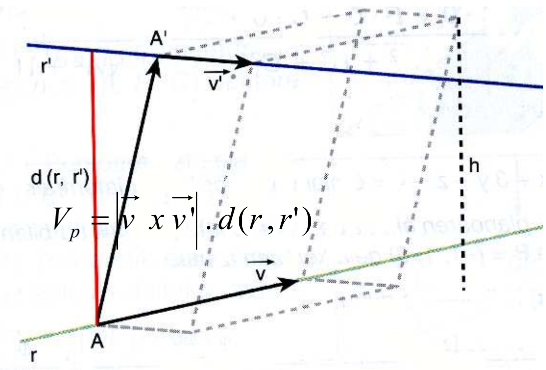
$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1+t & 2t & -1-t \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-1-t)\,(-1)^6\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-1-t)(-3) = \frac{1+t}{2}\ \frac{1+t}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad t=1$$

D erpinaren koordenatuak: x = 2+1 = 3 ; y = 2(1) = 2 ; z = -1 – 1 = -2

D = (3 , 2 , -2)

II) Bi zuzen gurutzatuen arteko distantzia minimoa

Bi zuzenak, r eta r', elkarrekin gurutzatzen diren kasuan, formula orokor bat ondorioztatuko dugu bien arteko distantzia lortzeko. Horretarako, r zuzeneko A puntua eta $\vec{v}$ bektore zuzentzailea eta r' zuzeneko A' puntua eta $\vec{v'}$ bektorea kontsideratuko ditugu.



$\overrightarrow{AA'}, \vec{v}$ eta $\vec{v'}$ bektoreek eraturiko paralelepipedoaren bolumena $\left[\overrightarrow{AA'}, \vec{v}, \vec{v'}\right]$ biderketa mistoaren balio absolutua da.

Baina bolumen hori oinarriaren azaleraren eta altueraren arteko biderketa eginez ere lor daiteke: . Beraz:

$$d(r,r') = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AA'}, \vec{v}, \vec{v'}\right]\right|}{\left|\vec{v} \; x \; \vec{v'}\right|}$$

Adibidea.

Kalkulatu $r: x-2 = \dfrac{y+3}{2} = z$ *eta* $r': x = y = z$ *zuzenen arteko distantzia.*

Zuzenen posizio erlatiboa determinatuko dugu.

r-ren puntu bat eta bektore zuzentzaile bat: $A = (2\,,\,3\,,\,0)$ eta $\vec{v} = (1,2,1)$

r'-ren puntu bat eta bektore zuzentzaile bat: $A' = (0\,,\,0\,,\,0)$ eta $\vec{v}\,' = (1,1,1)$

$\overrightarrow{AA'} = (-2,3,0)$

$$\det(\overrightarrow{AA'}, \vec{v}, \vec{v'}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4+3+2-3 = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Gurutzatzen dira}$$

Orain kalkula dezagun beraien arteko distantzia minimoa:

$$\left|\left[\overrightarrow{AA'}, \vec{v}, \vec{v'}\right]\right| = |-2| = 2$$

$$\vec{v} \; x \; \vec{v'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} - 2\vec{k} - \vec{j} - \vec{i} = \vec{i} - \vec{k} = (1\,,0\,,-1)$$

$$\left|\vec{v} \; x \; \vec{v'}\right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Beraz, $d(r,r') = \dfrac{\left[\overrightarrow{AA'}, \vec{v}, \vec{v'}\right]}{\left|\vec{v} \; x \; \vec{v'}\right|} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

<u>Ariketa</u>

$r: \dfrac{x+1}{3} = y = z-2$ eta $r': (x,y,z) = (3,1,2) + k(1,4,-1)$ zuzenak emanik, egiaztatu gurutzatzen direla eta kalkulatu beraien arteko distantzia minimoa. Em.: $\dfrac{8\sqrt{2}}{9}$

EGIA ALA GEZURRA? ARRAZOITU

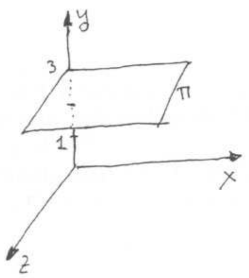
1.- $\vec{x}$ eta $\vec{y}$ paraleloak badira, $\vec{x}\,.\,\vec{y} = |\vec{x}|\,.\,|\vec{y}|$ da

2.- Zuzen bik (espazioan) elkar ebakitzen ez badute, plano berean daude

3.- A(2 , 3 , 4) puntuak eta $\vec{v}\,(1,2,3)$ eta $\vec{w}\,(-4,-8,-12)$ bektoreek plano bat determinatzen dute

4.- Plano baten ekuazioa determinaturik dago bere bektore karakteristikoa eta planoan dagoen puntu bat ezagunak badira

6.-



π planoa y = 3 da

7.- Aurreko planoa eta $\pi' \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 \\ z = \mu \end{cases}$ planoa berdinak dira

8.- $\vec{a}\,.(\vec{a}\;x\,\vec{b}\,) = 0$ eta $\vec{b}\,.(\vec{a}\;x\,\vec{b}\,) = 0$ dira

9.- (2 , -3 , -7) puntua $r \equiv \begin{cases} x - 2 = 0 \\ z = -7 \end{cases}$ zuzenean dago

10.- y + 1 = 0 planoa eta $\dfrac{x-7}{0} = \dfrac{y}{16} = \dfrac{z-3}{0}$ zuzena perpendikularrak dira

11.- x = 4 planoa OX ardatzari paraleloa da

12.- y = 0 , OY ardatza da

13. $\left|\vec{u}\right| = 1$ eta $\left|\vec{v}\right| = 2$ bektoreen moduluak emanik, posible al da $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 7$ izatea?. Zergatik?

14.- Eman ditzagun $r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ ax + by + cz = d \end{cases}$ zuzena eta zuzen horretatik kanpo dagoen $P(x_0\,, y_0\,, z_0)$ puntua. Egia al da plano bat determinatzen dutela? Horrela bada, deskribatu era arrazoituan planoaren ekuazioa aurkitzeko prozedura

16.- Honako baieztapen hau:
Plano bat determinaturik dago, bere barnekoak diren hiru puntu ezagunak baldin badira.
Egia al da kasu guztietan, ala hiru puntuei buruzko baldintza gehiagorik beharrezkoa al da?
Justifika ezazu erantzuna. Egia den kasuetan, deskriba ezazu planoaren ekuazioa kalkulatzeko prozedura

GALDERAK

1.- $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{k}$ eta $\vec{w} = \vec{i} - 3\vec{j}$ bektoreak emanik, kalkulatu:

a) $\vec{u}\ x(\vec{v} + \vec{w})$; b) $\vec{u}\ .(\vec{v}\ x\vec{w})$

2.- A(1,2,3) , B(-1,2,1) eta C(-3,0,0) puntuak emanik, ABC planoarekiko ortogonala den bektore unitario bat aurki ezazu

3.- Idatz ezazu ondoko baldintzak bete behar dituen zuzenaren ekuazioa:
zuzenak, *(0,1,2)* koordenatuak dituen puntua eduki behar du. Zuzenak ez du puntu komunik *z = 5* planoarekin

4.- Izan bitez $r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$ zuzena eta $P(x_0 , y_0 , z_0)$ zuzen horretan ez dagoen puntua. Deskribatu *r* zuzenaren bitarteko *P* puntuaren simetrikoa kalkulatzeko prozedura

5.- Azal ezazu nola kalkulatzen den plano baten eta planoaz kanpoko puntu baten arteko distantzia

6.- Izan bitez *A = (1 , 0 , -1)* eta *B = (2 , a , b)* puntuak. Existitzen al da *a* eta *b* parametroen baliorik non *P = (2 , 2 , 1)* puntua *A* eta *B*-tik pasatzen den zuzenean dagoen?. Ezezkoan, arrazoitu erantzuna. Baiezkoan, *a* eta *b* parametroen balioak kalkulatu.

7.- Ondoko ekuazioa duen zuzena emanik,

x = 1+t ; y = 2+2t ; z = 3+3t

idatz ezazu honen paraleloa den zuzenaren ekuazioa, P(2,4,6) puntua eduki behar ez duelarik

8.- Demagun $\boldsymbol{v_1}$ eta $\boldsymbol{v_2}$ bektoreak ditugula. Biz ***w*** beraien arteko biderkadura bektoriala. Zenbat balio du $\boldsymbol{v_1}$ eta ***w*** bektoreen arteko biderkadura eskalarrak? Zergatik?

9.- *r* zuzena π planoarekin perpendikularra da eta (1 , 2 , 1) puntua *r* zuzenean dago. Horrez gain, $\vec{u} = (1,1,0)$ eta $\vec{v} = (0,1,-1)$ bektoreak π planoan daude. Kalkulatu *r* zuzenaren ekuazioa. Nahikoak al dira aurreko datuak π planoaren ekuazioa kalkulatzeko. Erantzuna arrazoitu.

10.- Idatz ezazu ondoko baldintzak bete behar dituen planoaren ekuazioa:
- Planoak, P(1,2,3) puntua eduki behar du
- Planoak ez du inoiz ebaki behar z=10 planoa

11.- Plano baten punturik hurbilena koordenatu-jatorriarekiko (1 , 3 , 2) puntua da. Zein da planoaren ekuazioa?

12.- Kalkulatu *m* , jakinik ondoko bi zuzen hauek elkartzut daudela

mx = y = z+2 eta $\frac{x}{4} = y - 1 = \frac{z}{2}$

13.- (1 , 2 , a) *x* (1 , a , 0) biderkadura bektoriala OZ ardatzaren paraleloa da. Aurkitu *a*

ARIKETAK

1.- Kalkulatu *a* eta *b* ondoko zuzenak paraleloak izan daitezen:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + ay - z = 1 \\ 2x + 3y + bz = 3 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} z = 4x \\ z = 2y + 6 \end{cases}$$

2.- Aurki itzazu *a* eta *b*-ren balioak , $r \equiv \begin{cases} x = az + 2 \\ y = z - 3 \end{cases}$ eta $s \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{b} = z$ zuzenak planokide eta elkartzut direla jakinik. Bilatu elkar mozten duten puntua.

3.- Aztertu ondoko planoaren eta zuzenaren elkarren arteko posizioak *a* parametroaren arabera:

$$\pi_1 \equiv x + ay - 2z - 1 = 0 \quad ; \quad r \equiv \; x = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$$

4.- $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ zuzenak, $\pi_1 \equiv x + y + z = 0$ eta $\pi_2 \equiv 2x - y = 0$ planoak ebakitzen ditu P_1 eta P_2 puntuetan. Kalkula ezazu P_1P_2 zuzenkiaren luzera

5.- Bila ezazu $x + \sqrt{2}\, y + z = 10$ planoak eta koordenatu-ardatzek eratzen dituzten angeluak

7.- $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases}$ zuzenaren puntu batzuetatik P(1 , 0 ,5) puntura arteko distantzia 3 da.

Zeintzu dira *r*-ren puntu hoiek?

8.- Aurki ezazu ondoko baldintzak betetzen dituen zuzenaren ekuazioa: A(1,1,1) puntutik pasatzen da, x - 2y – z = 0 planoarekin paraleloa da eta $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ zuzenarekin elkartzut dago.

9.- Aurkitu planoaren ekuazioa ondoko kasuetan:

a) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$ zuzena bere barnean du eta x – y + 2z –1 = 0 planoarekin elkartzut dago

b) (1 , 1 , 2) puntua planokoa da eta 2x – 2y – 4z – 6 = 0 eta 3x + y + 6z – 4 = 0 planoekin elkartzut dago

c) (2 , 2 , 2) eta (0 , -2 , 0) puntuak planoan daude eta x – 2y + 3z – 7 = 0 planoarekin elkartzut dago

d) Koordenatu-jatorritik planora arteko distantzia 2 da eta 6x – 6y + 7z –44 = 0 planoarekin paraleloa da.

e) A = (1 , 0 , -a) eta B = (-3 , 0 , a) puntuak plano batekiko simetrikoak dira. Aurkitu plano horren ekuazioa.

f) $P = (1 , 2 ,1)$ eta $Q = (1 , 2 , 3)$ puntuak planoan daude eta
r zuzena eta π planoaren arteko S ebaki puntua ere planoan dago, r eta π ondokoak izanik: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$; $\pi \equiv x + y + z = 0$

10.- Eman dezagun A(0 , 1 , 2) puntua. Aurki ezazu:

a) A-ren simetrikoa 2x – y – z + 2 = 0 planoarekiko

b) A-ren simetrikoa $r \equiv \begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ zuzenarekiko

c) x – 2y + 3z – 6 = 0 planoaren plano simetrikoa A puntuarekiko

d) A-tik plano koordenatuetara dagoen distantzia

11.- Eman ditzagun A(0 , 0 , 0) eta B(0 , 2 , 0) puntuak eta bi puntu hoietatik distantzia berdinera eta $r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$ zuzenean dagoen C puntua. Aurkitu A , B , C-k osatzen duten planoaren ekuazioa

12.- Eman ditzagun $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ eta $s \equiv x = y = z$ zuzenak:

a) Froga ezazu planokideak direla
b) Aurkitu elkar mozten duten puntua

13.- Aurkitu (1 , 2 , 1) puntutik igarotzen den eta $r \equiv \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$ zuzena elkartzut mozten duen zuzenaren ekuazioa

14.- M(0 , 1 , 2) puntutik pasatu eta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{0}$ zuzena elkartzut mozten duen zuzenaren ekuazioa aurki ezazu

15.- $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ planoak, hiru ardatz kartesiarrak mozten dituen hiru puntuk osatzen duten triangeluaren azalera aurki ezazu

17.- Kubo baten bi aurpegi 2x – 2y + z –1 = 0 eta 2x – 2y + z + 5 = 0 planoetan daude.
Aurkitu kuboaren bolumena

18.- 4 unitate kubikotako bolumena duen kubo baten bi aurpegi ondoko planoen gainean daude:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 12z + a = 0 \\ 6x + 8y + 24z + 36 = 0 \end{cases}$$

Aurki itzazu *a*-ren balio posibleak

19.- Plano batek hiru ardatz koordenatuak mozten ditu A(0 , 2 , 0) , B(0 , 0 , 2) eta C puntuetan, C , OX ardatzeko puntu bat delarik. Aurkitu planoaren ekuazioa, *ABC* hirukiaren azalera $2\sqrt{3}$ dela jakinik

20.- x + y + z = m planoak, ardatz koordenatuak mozten dituen puntuek eta koordenatu-jatorri puntuak tetraedro bat osatzen dute. Bila ezazu *m* , tetraedroaren bolumena 36 u^3 izan dadin

21.- Eman ditzagun A(0,0,0) , B(1,2,0) , C(0,3,2) eta D(2,7,2) puntuak:

a) Froga ezazu planokide direla eta lauki bat osatzen dutela
b) Kalkulatu laukiaren azalera

22.- Eman ditzagun A(2,-1,0) , B(0,-1,-1) , C(1, 1,-3) eta D(3,1,-2) puntuak. Froga itzazu:

a) planokide direla
b) laukizuzen bat osatzen dutela

23.- Kalkulatu ondoko lau planoek osatzen duten tetraedroaren bolumena:

x = 3 ; y = 2 ; z = 0 eta 2x+3y-6z=6

24.- Izan bitez *A = (1 , 0 , 0) , B = (1 , 1 , 0) , C = (1 , 1 , 1) , D = (1 , 5 , 3)* eta *E = (1 , 3 , 2)* espazioko puntuak. Aztertu ea bost puntuak plano berean dauden