# Batxilergo Zientifiko-Teknikoa

# MATEMATIKA II

# ANALISIA

Ignacio Zuloaga B.H.I. (Eibar)

# ARGIBIDEA

# 1-FUNTZIOAK (II)

*x*-k har ditzakeen balioen multzoari funtzioaren **existentzia-eremua** esaten zaio, eta **D(f)** eran adieraziko dugu. Adibidez, $y = \frac{3}{1-x}$ funtzioan *x*-k ezin du 1 balioa hartu; beraz, existentzia-eremua *R – {1}* da.

*a*) $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ $\quad x \neq 0 \quad$ Existentzia- eremua: *R*- {0}

*b*) $f(x) = \frac{4x-5}{\sqrt{2x^2-18}}$ $\quad 2x^2 - 18 > 0 \quad$ Existentzia-eremua: *R* – [-3,3]

Funtzioak (*y*) hartzen dituen balio guztien multzoari **ibiltartea** esaten zaio. Adibidez,
$y = x^2$ funtzioaren ibiltartea $[0\,,\infty)$ da.

<u>Ariketa.</u>
Aurki itzazu ondoko funtzioen existentzia-eremua:

$$y = \frac{5}{x^2 - 100} \quad ; \quad y = \frac{5}{x^2 + 100} \quad ; \quad y = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$$

$$y = \ln(9 - x^2) \quad ; \quad y = \sqrt{3 - 2x - x^2} \quad ; \quad y = \begin{cases} \frac{1}{1-x}\ ; & x \geq 0 \\ \ln(1-x)\ ; & x < 0 \end{cases}$$

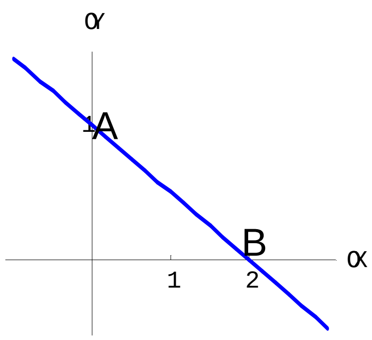
## <u>Oinarrizko funtzioak</u>

### 1. mailako funtzio polinomikoak: y =ax+b (zuzenak)

*a*, zuzenaren malda da.
*b=0* denean, zuzena (0,0) puntutik pasatzen da.

| |
|---|
| OX ardatza **y = 0** zuzena da, eta OY ardatza **x = 0** zuzena. |
| **y = k** zuzena, horizontala da; **x= k** , ordea, bertikala. |

*Zein da irudiko zuzenaren adierazpen analitikoa?*




A(0,1) eta B(2,0) puntuetatik pasatzen da.

Bi eratan egingo dugu:

**I)** y=ax+b forma du.
A(0,1) puntua zuzenean dago; hots, **1=a(0)+b**
Berdin (2,0) puntua: **0=a(2)+b**.
Beraz, b=1 eta a=-1/2. Zuzenaren ekuazioa: $\boxed{\mathbf{y = -x/2 + 1}}$

**II)** P($x_1$,$y_1$) puntu bat eta *m* malda ezagutuz,

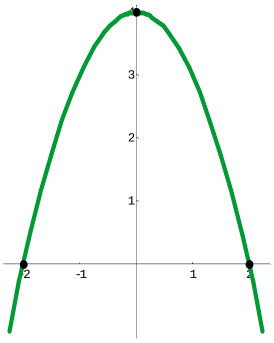
$$\boxed{a = malda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2}}$$

zuzenaren ekuazioa $y - y_1 = m(x - x_1)$ da.

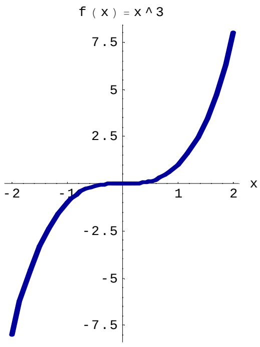
Puntua, A(0,1) da eta m = -1/2 . Beraz,
y -1 = -1/2(x - 0) ; $\boxed{\mathbf{y = -x/2 +1}}$

## 2., 3. eta 4. mailako funtzio polinomikoak

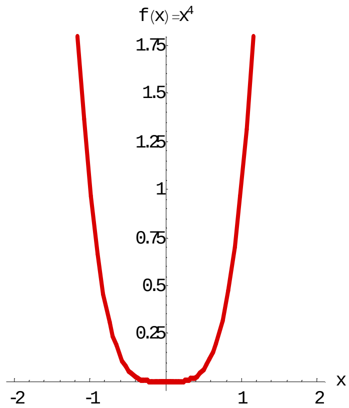
$y = 4 - x^2$



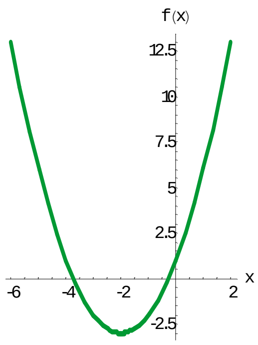
$y = x^3$



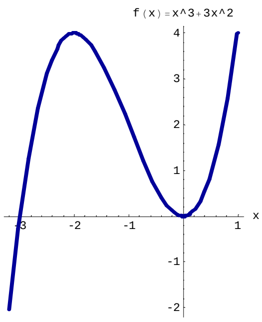

$y = x^4$



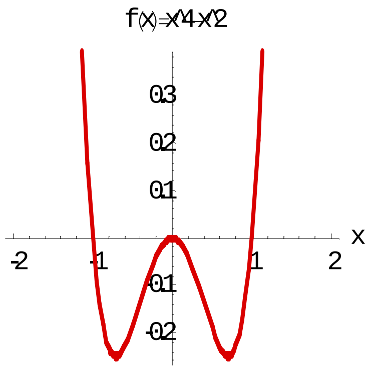

$y = x^2 + 4x + 1$




$y = x^3 + 3x^2$




$y = x^4 - x^2$

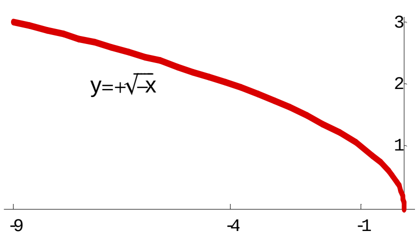



## 1. mailako funtzio irrazionalak

$y = \sqrt{-x}$

Existentzia-eremua: $\{x \leq 0\}$

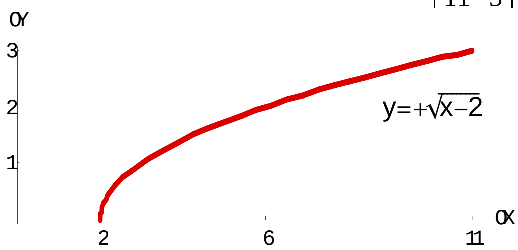
| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -1 | 1 |
| -4 | 2 |




$y = \sqrt{x-2}$

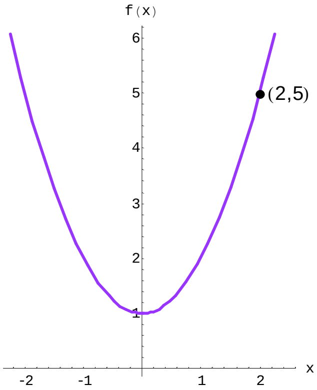
Existentzia-eremua: $\{x \geq 2\}$

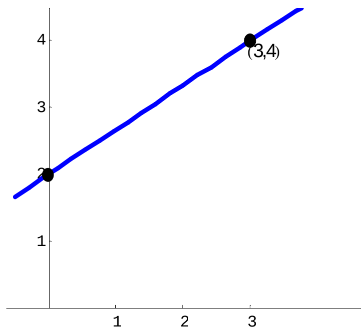
| x | y |
|---|---|
| 2 | 0 |
| 6 | 2 |
| 11 | 3 |

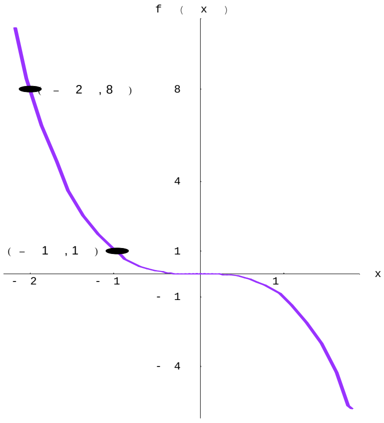


Ariketa

Zein da funtzio hauen adierazpen analitikoa?

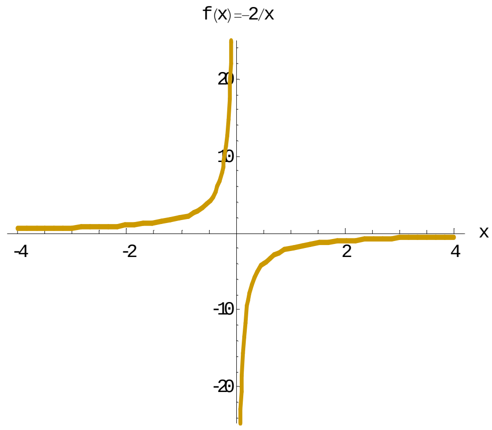



## Alderantziz proportzionalak diren funtzioak

$$\boxed{\mathbf{y = -\frac{2}{x}}}$$




Existentzia-eremua: **D(f) = R – 0**
Asintota bertikala: **x = 0 zuzena** (OY ardatza).

| | | | |
|---|---|---|---|
| **x** | -0,1 | -0,01 | ... |
| **y** | 20 | 200 | ... |

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

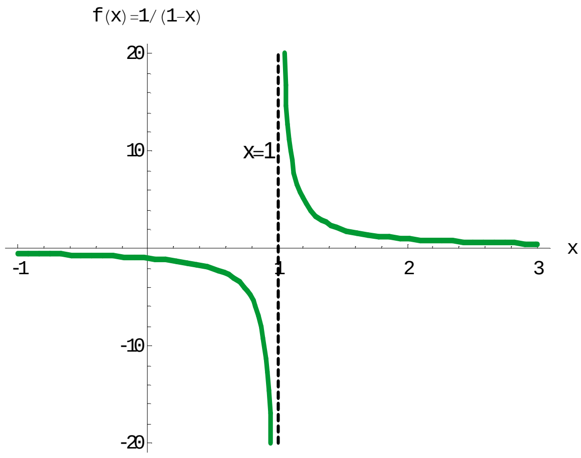
| | | | |
|---|---|---|---|
| **x** | 0,1 | 0,001 | ... |
| **y** | -20 | -2000 | ... |

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

Asintota horizontala: **y = 0 zuzena** (OX ardatza)

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

$$\boxed{\mathbf{y = \frac{1}{x-1}}}$$




Existentzia-eremua: **D(f) = R – 1**
Asintota bertikala: **x = 1 zuzena**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **x** | 0,9 | 0,999 | ... |
| **y** | -10 | -1000 | ... |

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

| | | | |
|---|---|---|---|
| **x** | 1,1 | 1,001 | ... |
| **y** | 10 | 1000 | ... |

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Asintota horizontala: **y = 0 zuzena** (OX ardatza)

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

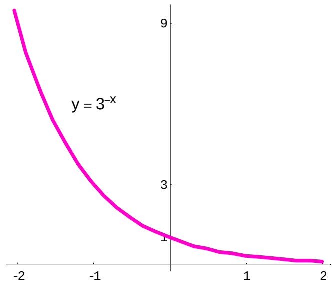
## Funtzio esponentzialak:

**$y = 3^{-x} = (1/3)^{x}$**

<u>Asintota horizontala</u> (OX ardatza) eskuin aldetik

$$\lim_{x\to\infty} 3^{-x} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

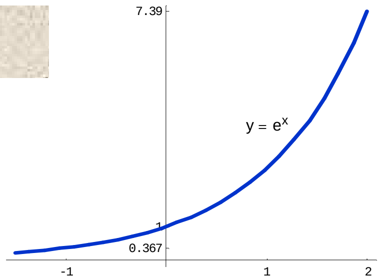
| x | y |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1/3 |
| -1 | 3 |
| -2 | 9 |




Edozein *x*-rentzat (**Existentzia-eremua:*R***), funtzioaren balioa , *y*, beti da positiboa; **Ibiltartea**: $(0\,,\,\infty)$

## Oinarria “e” zenbakia (2,711828...) duten funtzio esponentzialak

**$y = e^{x}$**

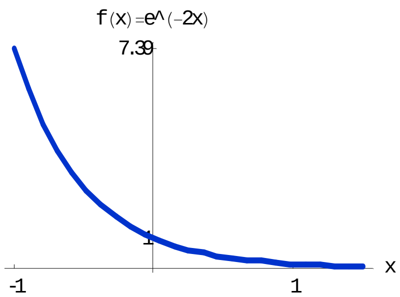



$$\lim_{x\to-\infty} e^{x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | e = 2,71... |
| 2 | $e^2$ = 7,389... |
| -1 | 1/e = 0,3678... |

<u>Asintota horizontala</u> (OX ardatza) ezker aldetik

**$y = e^{-2x}$**




<u>Asintota horizontala</u> (OX ardatza) eskuin aldetik

$$\lim_{x\to\infty} e^{-2x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 1 |
| -1 | $e^{-2}$ = 7,389... |
| 2 | $e^{-4}$ = 0,018... |
| 1 | $e^{-2}$ = 0,135... |

## Oinarria “e” zenbakia (2,711828...) duten funtzio logaritmikoak

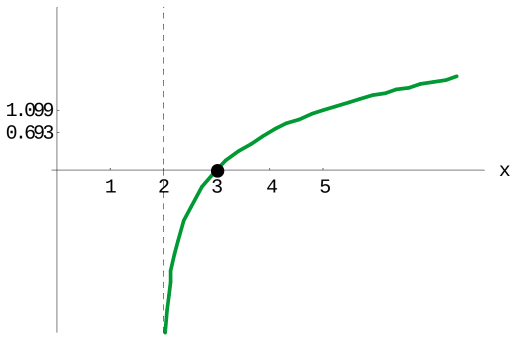
Ez dago zenbaki negatiboen logaritmorik

**y = ln (x-2)**

Existentzia-eremua: **{x>2}**

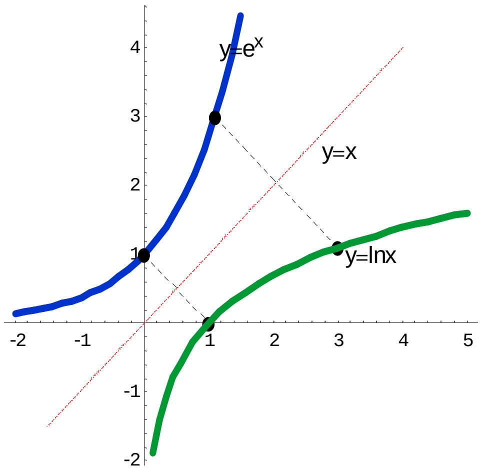
Asintota bertikala: **x = 2** zuzena

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$




| x | y |
|---|---|
| 3 | ln 1 = 0 |
| 4 | ln 2 = 0,693 |
| 2,5 | -0,693 |

### Alderantzizko funtzioak: y = $e^x$ eta y = ln x




Bi grafikoak simetrikoak dira
y = x zuzenarekiko.

**y = $e^x$** kurbaren puntuen osagaiak, hots, **(1,0), (1`099 , 3)...** trukatuta azaltzen dira hurrenez hurren **y = ln x** funtzioan: **(0,1), (3, 1`099),...**

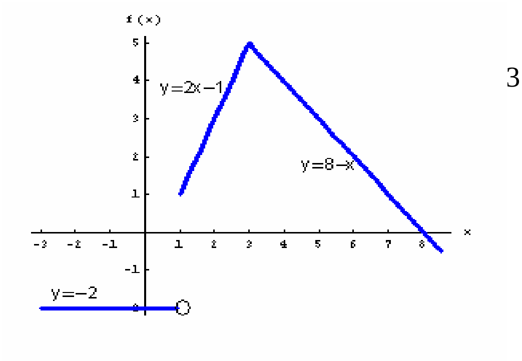
# Zatika definituriko funtzioak

$$y=\begin{cases} -2 & ; \quad x<1 \\ 2x-1 & ; \quad 1\le x<3 \\ 8-x & ; \quad x\ge 3 \end{cases}$$

$x<1$ denean, $y=-2$ zuzena irudikatzen da.

$1\le x<3$ denean, $y=2x-1$ funtzioa.

| x | y |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 2,999 | 4,998 |

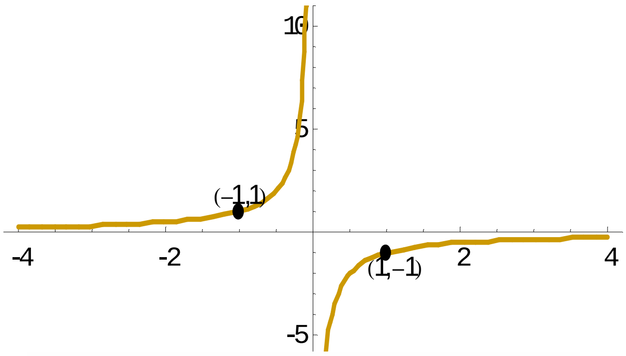


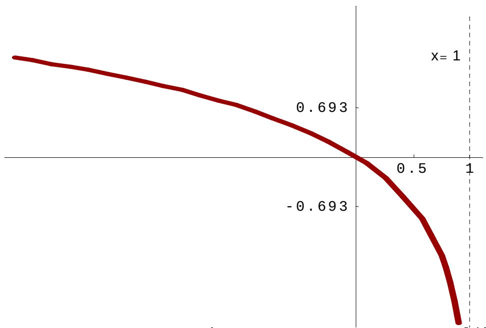

3 denean, $y=8-x$ funtzioa.

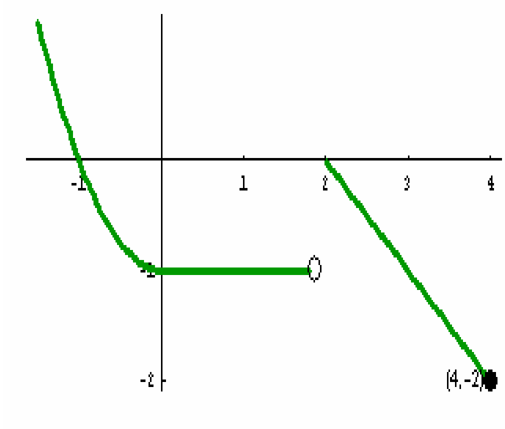
| x | y |
|---|---|
| 3 | 5 |
| 8 | 0 |

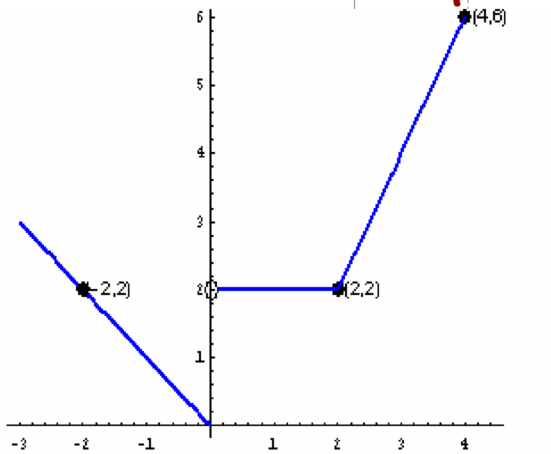
Ariketa

Zein da funtzio hauen adierazpen analitikoa?



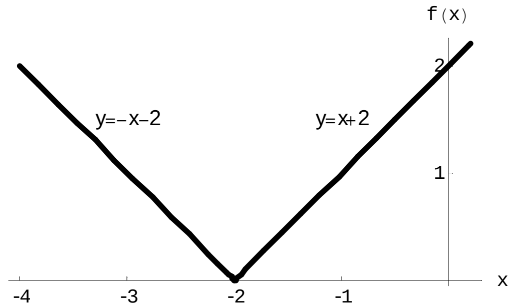



## Balio absolutuak

$$y=|x+2|$$

$$y=|x+2|=\begin{cases}x+2 & ; \quad x\geq -2\\ -(x+2) & ; \quad x<-2\end{cases}$$

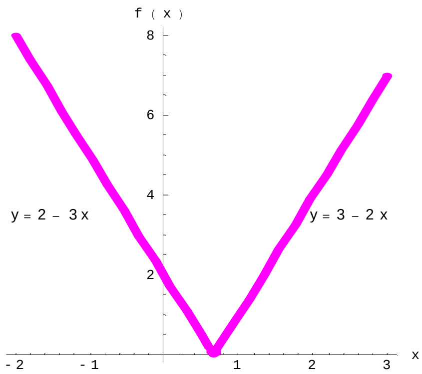
| x | y |
|---|---|
| -2 | 0 |
| -1 | 1 |
| 0 | 2 |
| -3 | 1 |
| -4 | 2 |




$$y=|3x-2|$$

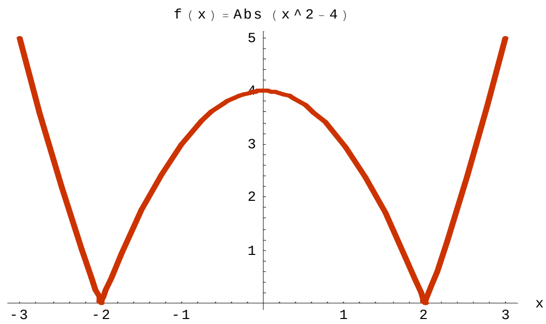
$$y=|3x-2|=\begin{cases}3x-2 & ; \quad x\geq \dfrac{2}{3}\\ 2-3x & ; \quad x<\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

| x | y |
|---|---|
| 2/3 | 0 |
| 0 | 2 |
| 2 | 4 |



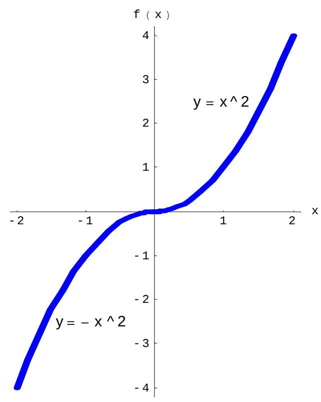

$$y=|x^2-4|$$

$$y=|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4 & ; \quad x\leq -2\\ -(x^2-4) & ; \quad -2<x<2\\ x^2-4 & ; \quad x>2\end{cases}$$



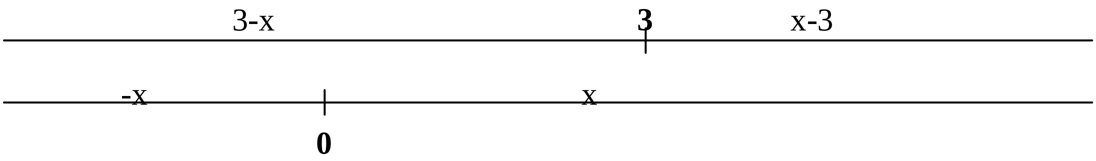

$$y=x|x|$$

$$|y|=\begin{cases}x(x) & =x^2 & ; \quad x\geq 0\\ x(-x) & =-x^2 & ; \quad x<0\end{cases}$$



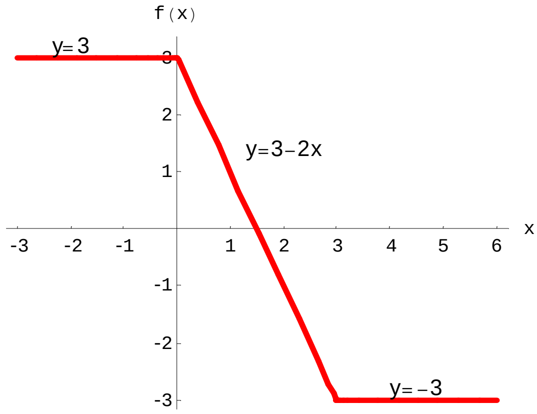
$y = |x-3| - |x|$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & ; \quad x \geq 3 \\ -(x-3) & ; \quad x < 3 \end{cases} \qquad |x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

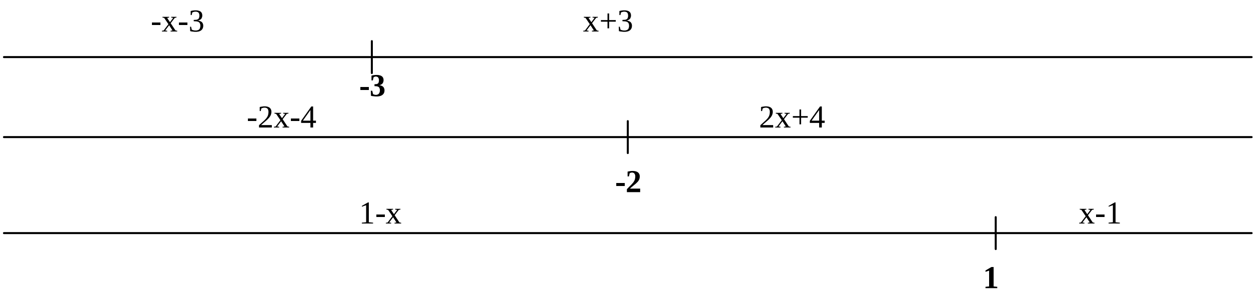



$$y = \begin{cases} 3 - x - (-x) & ; \quad x \leq 0 \\ 3 - x - (x) & ; \quad 0 < x < 3 \\ x - 3 - (x) & ; \quad x \geq 3 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 3 & ; \quad x \leq 0 \\ 3 - 2x & ; \quad 0 < x < 3 \\ -3 & ; \quad x > 3 \end{cases}$$

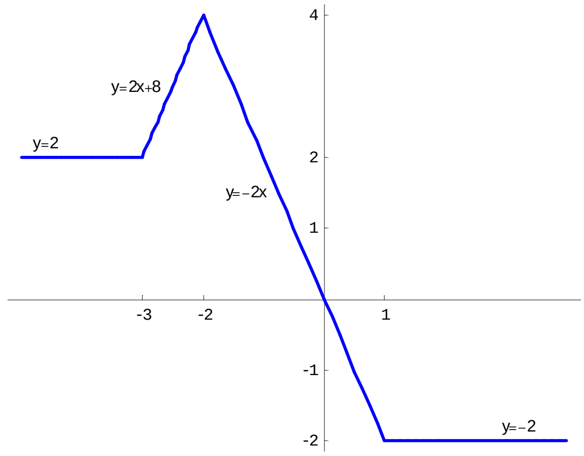



$y = |x+3| + |x-1| - |2x+4|$




$$y = \begin{cases} -x - 3 + (1-x) - (-2x-4) = 2 & ; \quad x \leq -3 \\ x + 3 + (1-x) - (-2x-4) = 2x + 8 & ; \quad -3 < x \leq -2 \\ x + 3 + (1-x) - (2x+4) = -2x & ; \quad -2 \leq x \leq 1 \\ x + 3 + (x-1) - (2x+4) = -2 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

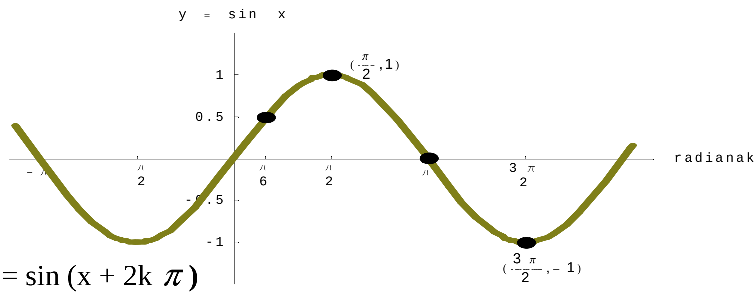
$$y = \begin{cases} 2 & ; \quad x \leq -3 \\ 2x + 8 & ; \quad -3 < x \leq -2 \\ -2x & ; \quad -2 \leq x \leq 1 \\ -2 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$



# Funtzio trigonometrikoak

## y = sin x

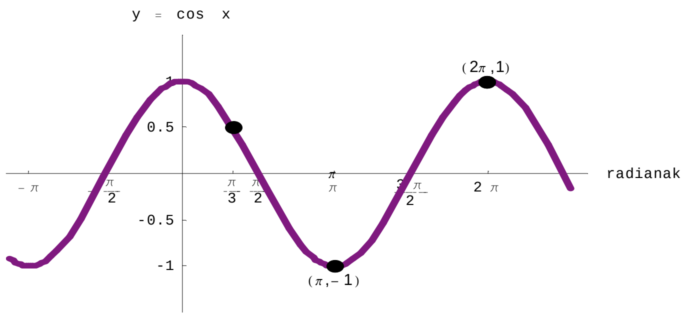
| x | y = sin x |
|---|---|
| -90º | -1 |
| 0º | 0 |
| 30º | 0.5 |
| 90º | 1 |
| 180º | 0 |
| 270º | -1 |
| 360º | 0 |




Existentzia-eremua: ***R***
Ibiltartea: **[-1 , 1]**
Funtzio periodikoa : sin x = sin (x + 2k $\pi$ )
**Periodoa = 360º**

## y = cos x

| x | y = cos x |
|---|---|
| -90º | 0 |
| 0º | 1 |
| 60º | 0.5 |
| 90º | 0 |
| 180º | -1 |
| 270º | 0 |
| 360º | 1 |




Existentzia-eremua: ***R***
Ibiltartea: **[-1 , 1]**
Funtzio periodikoa : cos x = cos (x + 2k $\pi$ )
**Periodoa = 360º**

## y = tg x

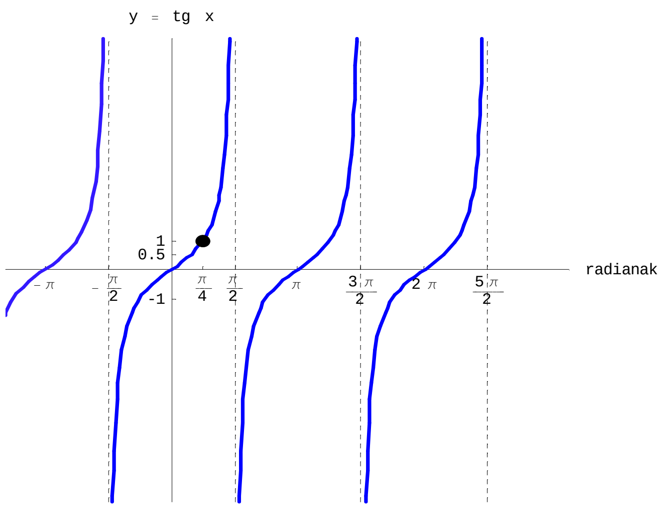
Existentzia-eremua: ***R – {-90º, 90º, 270º,...}***

Ibiltartea: ***R***

Funtzio periodikoa: tg x = tg (x + k $\pi$ )

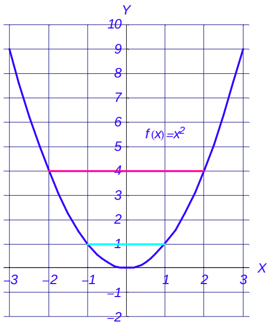
Asintota bertikalak

$x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$,... puntuetan.



# Simetriak

## ➢ Simetria 0Y ardatzari begira




*f* simetrikoa da **y ardatzari** begira *x* eta –*x*ek irudi berdina dutenean, hots,

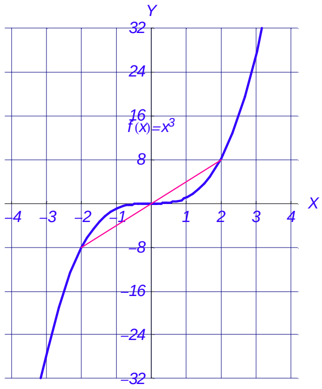
**f(x)= f(-x)** denean

Adibidez:

- 2 → 4 eta -2 → 4
- 1 → 1 eta -1 → 1

Mota horietako funtzioak **funtzio bikoitiak** direla esaten da.

## ➢ Simetria (0,0) puntuari begira




*f* simetrikoa da (0,0) **puntuari** begira x eta –xek irudi aurkakoa dutenean, hots, **f(x)=- f(-x)** denean

- 2 → 8
- -2 → -8

Mota horietako funtzioak **funtzio bakoitiak** direla esaten da.

Ariketa

Azter ezazu ondoko funtzioen simetriak:

$$y = x^4 - 3x^2 + 1 \quad ; \quad y = x^3 - x$$

$$y = \frac{1}{x} \quad ; \quad y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

# Funtzioen konposizioa

*Adibidea :*

Eman ditzagun $f(x) = \sqrt{x}$ eta $g(x) = x^2 - 1$ funtzioak. Kalkula ditzagun *(g o f)(x)* eta *(f o g)(x)* funtzio konposatuak.

- *(g o f)(x) = g[f(x)] =* $g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$

- *(f o g)(x)* kasuan, *f* funtzioa *g*-ren emaitzari aplikatu behar zaio:
  $x \rightarrow g(x) \rightarrow f(g(x))$. Hau da, *(f o g)(x) = f[g(x)] =* $f[x^2-1] = \sqrt{x^2 - 1}$

**(f o g) eta (g o f) ez dira berdinak**

Ariketak

1. $f(x) = 2x+1$ eta $g(x)= x^2$ izanik , kalkula itzazu *f o g* eta *g o f* funtzio konposatuak . Betetzen al da trukatze propietatea? Kalkula itzazu *(f o g)(2) eta (g o f)(2)*

2. Egiazta ezazu $y = (4x2 – 1)^{10}$ funtzioa funtzio konposatua dela. Horretarako,har itzazu $f(x)=x^{10}$ eta $g(x)=4x^2 -1$ funtzioak eta kalkulatu *(f o g)(x).*

# 2-LIMITEAK. JARRAITUTASUNA

## Albo-limiteak

Demagun $f(x)=\begin{cases} x+1 & ; \quad x<2 \\ -x+3 & ; \quad x\geq 2 \end{cases}$ funtzioa eta x = 2 abzisako puntua

| x | f(x) |
|---|---|
| 1,9 | 2,9 |
| 1,99 | 2,99 |
| 1,999 | 2,999 |
| … | … |

| x | f(x) |
|---|---|
| 2,1 | 0,9 |
| 2,01 | 0,99 |
| 2,001 | 0,999 |
| … | … |

*f*-ren albo-limitea *x* ezkerraldetik *2*rantz doanean *3* da, eta *x* eskuinaldetik *2*rantz doanean 1 da. Honela idatziko ditugu:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=3 \qquad\qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=1$$

Funtzio batek *x* = *a* puntu batean limitea izango du baldin albo-limiteak berdinak direnean; hau da: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

Aurreko adibidean, *f* funtzioak ez du limiterik *x* = *2* puntuan.

Limitea existitzen bada, <u>bakarra</u> da. Ezin ditu bi balio ezberdin eduki.

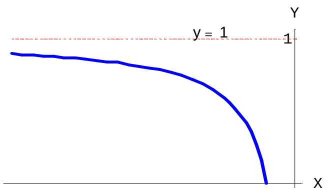
<u>Adibidea</u>

Demagun $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2}{x^2+1} & ; \quad x<1 \\ x+3 & ; \quad x\geq 1 \end{cases}$ funtzioa. Kalkulatu $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ eta $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

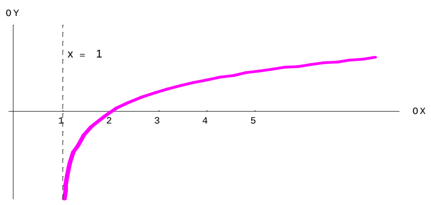
$a)$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\dfrac{2.1^2}{1^2+1}=1$ ; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1+3=4$ $\Rightarrow$ Ez dago $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$b)$ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=3+3=6$ ; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=3+3=6$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=6$

## Limite infinituak puntu batean. Limiteak infinituan.




Ezkerreko grafikoan, funtzioa *1* baliora hurbiltzen da *x* aldagaia $-\infty$ rantz doanean. Hau da, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=1$



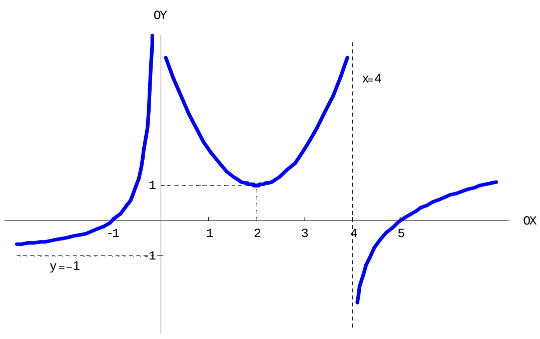

Aldiz, grafiko honetan, funtzioak $+\infty$ ra jotzen du *x* aldagaiak *1*erantz hurbiltzean eskuinetik. Hau da: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$

**Ariketa.** Demagun ondoko grafikoa. Zenbat da?

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

$f(0)$ ; $f(2)$ ; $f(5)$



# Limiteen kalkulua

$$\lim_{x\to -2}(3x^2+4)=3.(-2)^2+4=16$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-x^3}{5}=\frac{2-\infty}{5}=-\infty \qquad ; \qquad \lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{5}=\frac{1-1}{5}=\frac{0}{5}=0$$

Indeterminazio kasuak

a) $\frac{k}{0}$ . Kasu horretan, limitearen balioa $+\infty$ edo $-\infty$ da. Adibidez,

$$f(x)=\frac{4}{x-3} \quad \text{funtzioan} \quad \lim_{x\to 3^-} f(x)=-\infty \quad \text{eta} \quad \lim_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$$

b) $\frac{0}{0}$ indeterminazioa. Hori gainditzeko, deskonposatu faktoreetan zenbakitzailea eta izendatzailea, eta ondoren sinplifikatu. Adibidez,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1).(x^2+x+1)}{(x-1).(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

c) $\frac{\infty}{\infty}$ indeterminazioa. Baldin funtzioa $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a\,x^m+...}{b\,x^n+...}$ bada, hiru kasu hauek gerta daitezke:

- **m** > **n** izatea. Orduan, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$. Adibidez,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+1}{2x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+2x-x^3}{5x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{5x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{5}=-\infty$$

- **m** < **n** izatea. Kasu honetan limitearen balioa 0 da. Esate baterako,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{5x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{5x}=\frac{2}{\infty}=0$$

- **m = n** izatea. Orduan, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{a}{b}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x+1}{5x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{5x^3}=\frac{4}{5}$$

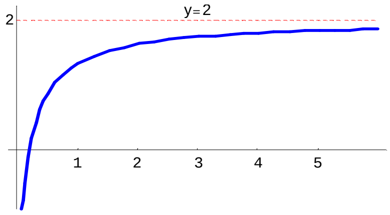
**Ariketa.** Kalkula itzazu:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-x-2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{2x^2-x} \quad ; \quad \lim_{x\to 3^-}\frac{x+2}{3-x} \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x+2}{1+x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{3-x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{x+3}{(x-1)^2} \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1+x-x^2}{3+x} \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty}2^x$$

## Adar infinituak. Asintotak

### Asintota horizontalak




Grafikoa $y = 2$ zuzenera hurbiltzen da $x$ aldagaia $+\infty$ rantz doanean. Hau da, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

$y = 2$ zuzena $f$ funtzioaren asintota horizontala dela esaten da.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ betetzen bada, $\boldsymbol{y = L}$ **zuzena** $f$ funtzioaren asintota horizontala dela esaten da.

**Futzio arrazionalen** kasuan, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, asintota horizontalak lortzeko, nahikoa da frakzioko zenbakitzaileko eta izendatzaileko polinomioen mailak aztertzea.

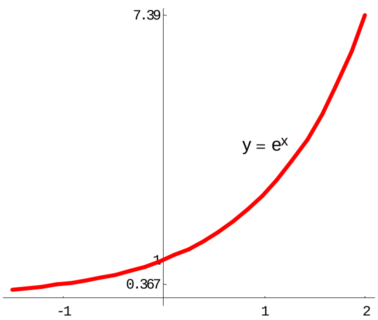
- ***P(x)*-ren maila *Q(x)*-ren maila baino txikiagoa bada, y = 0 zuzena** (OX ardatza) da asintota horizontala.
- **Biak, P(x) eta Q(x), maila berekoak** badira, maila hori daramaten koefizienteen arteko zatidura da asintota horizontala.

Adibidea. Lortu $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-2}$ eta $g(x) = \dfrac{3x}{x^2-2}$ funtzioen asintota horizontalak.

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$. Beraz, **y = 3 zuzena** *f*-ren asintota horizontala da, alde bietatik.

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Beraz, **y = 0 zuzena** (OX ardatza) *f*-ren asintota horizontala da, alde bietatik.

**Funtzio esponentzialen** kasuan ere agertzen dira asintota horizontalak.



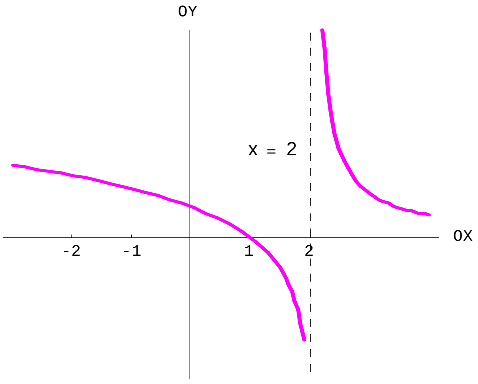

Demagun $y = e^x$ funtzioa.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$y = 0$ zuzena (OX ardatza) da *f*-ren asintota horizontala, eta, kasu honetan, hurbilketa ezker aldetik soilik egiten da.

Funtzio esponentzialetan, berretzailea $-\infty$ egiten den kasuetan, OX ardatza du asintota horizontaltzat.

## Asintota bertikalak




Ezkerreko grafikoan, funtzioak $-\infty$-rantz jotzen du *x* aldagaiak *2*rantz hurbiltzean ezkerretik, eta $+\infty$-rantz *x* aldagaia *2*rantz hurbiltzean eskuinetik. Hau da:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \text{eta} \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

***x* = *2* zuzena** *f* funtzioaren asintota bertikala dela esaten da.

Funtzio batek asintota bertikala izango du $x = a$ puntuan, baldin eta $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ bada.

**Futzio arrazionalen** kasuan, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$,asintota bertikala edukiko du *Q(x)* izendatzailea *0* egiten duten *x*-ren balioetan, baldin eta *x*-ren balio horietarako *P(x)* zenbakitzailea ere anulatzen ez bada.

<u>Adibidea.</u> *Lortu* $f(x) = \dfrac{5}{x^2-9}$ *eta* $g(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-2}$ *funtzioen asintota bertikalak.*

I) $x^2-9 = 0$ ; x = +3 eta x = -3

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty$ ; $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$

Beraz, ***x* = *-3*** eta ***x* = *3* zuzenak** dira *f*-ren asintota bertikalak.

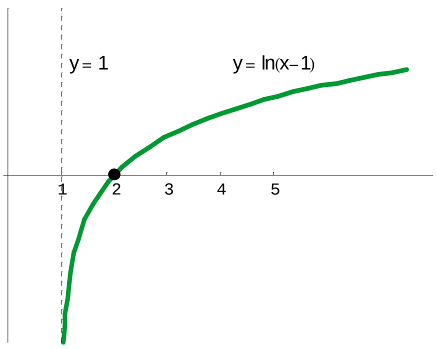
II) x-2 = 0 ; x=2 $\qquad \lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x-2} = \lim_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x = 2$

Beraz, *g* funtzioak ez du asintota bertikalik *x* = *2* puntuan, ez inon.

**Funtzio logaritmikoetan** ere agertzen dira asintota bertikalak.

Demagun *y* = *ln (x-1)* funtzioa.

Existentzia eremua: $(1, \infty)$

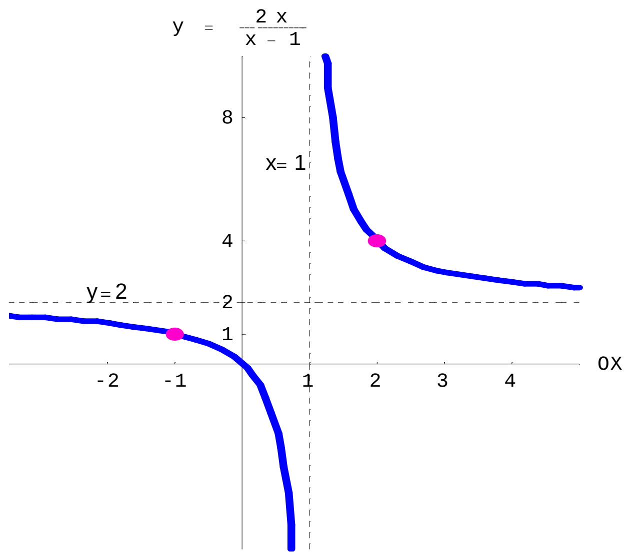



$\ln 0 = -\infty$ denez, *x* aldagaia *1*rantz hurbiltzean eskuinetik, funtzioak $-\infty$-rantz jotzen du; hau da, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$.

Horregatik, ***x* = *1*** zuzena *f* funtzioaren asintota bertikala da.

## Ariketa ebatzia 1

*Demagun* $y = \dfrac{2x}{x-1}$ *funtzioa. Aurkitu existentzia-eremua eta asintota bertikalak eta horizontalak. Ondoren, adierazi grafikoki.*




Existentzia-eremua: $R - \{1\}$

Asintota bertikala: *x* = *1* zuzena.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

Asintota horizontala*:* *y* = *2* zuzena.

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 2$$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -1 | 1 |
| 2 | 4 |

## Ariketa ebatzia 2

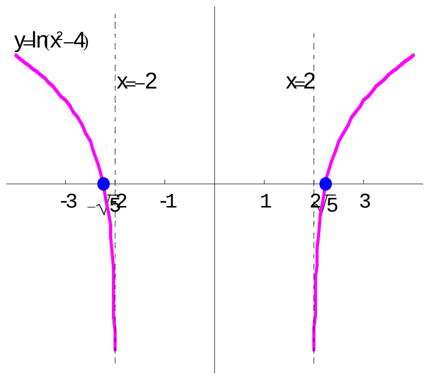
*Aurkitu y = ln(x*$^2$ *– 4) eta y = ln(4 - x*$^2$ *) funtzioen asintota bertikalak. Ondoren, adierazi grafikoki bi funtzioak*

### I) y = ln (x$^2$ - 4)

Existentzia eremua: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
Asintota bertikalak: *x* = *2* eta *x*=*-2* zuzenak

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$$

| x | y |
|---|---|
| $\sqrt{5}$ | ln 1 = 0 |
| $-\sqrt{5}$ | ln 1 = 0 |
| ... | ... |



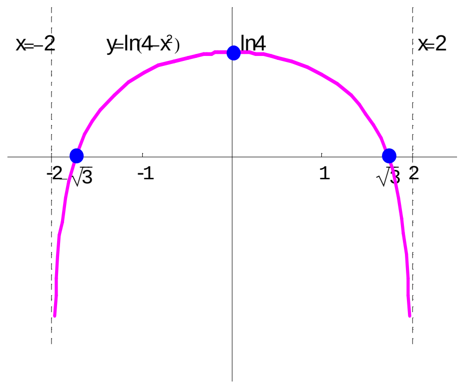

Bi funtzioak BIKOITIAK dira; hau da, simetrikoak dira OY ardatzarekiko

### II) y = ln (4 -x$^2$)

Existentzia eremua: (-2 , 2)
Asintota bertikalak*:* *x* = *2* eta *x*=*-2* zuzenak

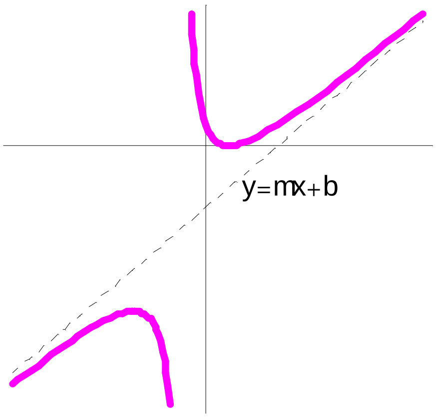
$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

| x | y |
|---|---|
| $\sqrt{3}$ | ln 1 = 0 |
| $-\sqrt{3}$ | ln 1 = 0 |
| ... | ... |



## Asintota zehiarrak

Oro har, $y = mx + b$ zuzena da asintota zehiarra.
$m$ eta $b$ kalkulatu behar dira. Horretarako, ondoko fi formulak aplikatuko ditugu:




$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad m \neq 0 \quad \text{eta} \quad m \neq \infty \quad \text{izanik}$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] \quad ; \quad b \neq \pm\infty \quad \text{izanik}$$

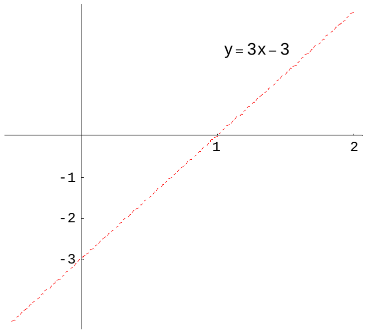
**Futzio arrazionalen** kasuan, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $f$ funtzio batek asintota zehiarra edukiko du *P(x)* zenbakitzailearen maila *Q(x)* izendatzailearen maila baino unitate bat handiagoa denean.

*<u>Adibidea.</u> Demagun* $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+1}$ *funtzioa*

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2 + x} = 3$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left( \frac{3x^2}{x+1} - 3x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 3x^2 - 3x}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x}{x+1} = -3$$




Beraz, **y = 3x-3** zuzena *f*-ren asintota zehiarra da.

Ariketa. Lortu $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x}$ funtzioaren asintotak

Oharrak:

- Funtzio polinomikoek ez dute asintotarik
- Funtzio batek infinitu asintota bertikal eduki ditzake. Adibidez, $y = tg\, x$ funtzioak
- Funtzio batek gehienez asintota horizontal bat eduki dezake; batzutan alde batetik, eta beste batzuetan bi aldeetatik (+∞ - rantz eta - ∞ - rantz).
- Funtzio batek asintota zehiarrak baldin baditu ez du asintota horizontalik, eta alderantziz ere bai.
- Grafiko batek moztu dezake asintota zehiarra. Hala ere, ikastaro honetan aztertzen ditugun funtzioetan ez da hori gertatzen.

Ariketak.

1. Lor itzazu ondoko funtzioen asintota bertikalak, horizontalak eta zehiarrak.

$$a)\ y=\frac{x^2-1}{4}\quad ;\quad b)\ y=\frac{3x-1}{x+2}\quad ;\quad c)\ y=\frac{x-1}{x^2-5x+6}\quad ;\quad d)\ y=\ln(x^2-1)$$

$$e)\ y=\frac{x^3-4x^2}{x^2+1}\quad ;\quad f)\ y=e^{-x^2}\quad ;\quad g)\ y=\frac{x^2}{5-x}\quad ;\quad h)\ y=10^{\frac{x}{2}}$$

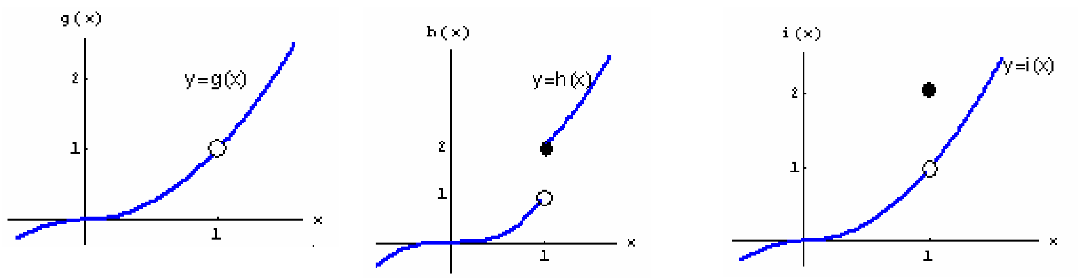
2. Kalkulatu a eta b parametroen balioak $f(x)=\dfrac{1-bx}{x-a}$ funtzioaren kasuan x = 2 zuzena asintota bertikala eta y = 3 zuzena asintota horizontala izan daitezen.

# Jarraitutasuna

**Definizioa**. *f* funtzioa jarraitua da *x* = *a* puntuan, baldin hiru baldintza hauek betetzen badira:

- *f(a)* existitzen da.
- $\lim_{x\to a} f(x)$ existitzen da eta finitua da.
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ da.

Beraz, jarraitua ez bada punturen batean, ondoko arrazoi batengatik izango da:




- ***g*** funtzioa ez da existitzen *x* = *1* puntuan; hau da, **ez dago *g(1)* baliorik**.
- ***h*** funtzioa eten egiten da *x* = *1* puntuan, ezkeraldeko eta eskuinaldeko limiteak besberdinak direlako; hots, **ez da existitzen** $\lim_{x\to 1} h(x)$
- ***i*** funtzioa eten egiten da *x* = *1* puntuan, zeren $\lim_{x\to 1} i(x)$ **existitzen den arren, horren balioa ez da *i(1)* balioaren berdina.**

<u>1. adibidea</u>

*Aztertu ondoko funtzioaren jarraitutasuna:* $y = \begin{cases} 1+x^2 & ; \quad x \le -1 \\ 1 & ; \quad -1 < x < 0 \\ x+1 & ; \quad x \ge 0 \end{cases}$

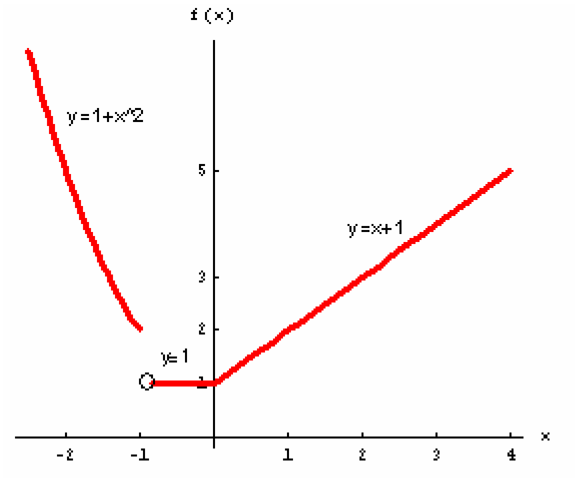
- Azter dezagun x = -1 puntuan:

f(-1) = 1+ (-1)$^2$ = 2

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1+(-1)^2 = 2$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

$\lim_{x\to -1} f(x)$ ez da existitzen . Beraz, **etena da x = -1 puntuan**.




- Azter dezagun x = 0 puntuan:

f(0) = 0 + 1 = 1

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0+1 = 1$

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ denez **jarraitua da x=0 puntuan**.

2. adibidea

**Aztertu ondoko funtzioaren jarraitutasuna "a" parametroaren arabera**

$$y=\begin{cases}2x+a & ; \quad x\le 1\\ x^2-ax+2 & ; \quad x>1\end{cases}$$

$x\neq 1$ denean, *f* funtzioa puntuetan jarraitua da. Eta $x = 1$ean?

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2.1 + a = 2 + a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1^2 - 1.a + 2 = 3 - a$$

$$f(1) = 2 + a$$

x = 1 puntuan limitea edukitzeko, $2+a = 3-a$ izan behar du; hau da, a = ½. Beraz:

- $a=\frac{1}{2}$ denean, f funtzioa jarraitua da puntu guztietan
- $a\neq\frac{1}{2}$ denean, f funtzioa etena da x = 1 puntuan

3. adibidea

*Aztertu ondoko funtzioaren jarraitasuna:* $y=\dfrac{2}{x-3}$

f(3) ez da existitzen, x = 3 puntua ez baita *f*-ren existentzia-eremukoa. Beraz, ez da jarraitua x = 3an.
Zein motatako etena duen determinatzeko, x = 3 puntuko albo-limiteak kalkulatu behar ditugu.

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2}{x-3}=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 3^+}\frac{2}{x-3}=+\infty$$

Ez du zentzurik jarraitutasunari buruz hitz egitea funtzioa existitzen ez den eremuan.
Adib., $y=\sqrt{x-3}$ funtzioa ezin da jarraitua izan x<3 tarteko puntuetan.

Beraz, *f* funtzioak **asintota bertikala du** eta jauzi infinituko etena du **x = 3** puntuan.

4. adibidea

*Aztertu* $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$ *funtzioaren jarraitutasuna.*

*f(2)* ez da existitzen, $x = 2$ abzisako puntua ez baita *f*-ren existentzia-eremukoa. Beraz, **ez da jarraitua x = 2an**.

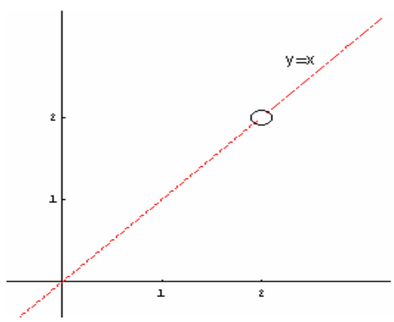
$x\neq 2$ abzisako puntu guztietan, funtzioak **y = x** forma hartzen du, zeren

$$y=\frac{x^2-2x}{x-2}=\frac{x(x-2)}{x-2}=x \text{ baita}$$

Eta limitea $x = 2$ puntuan zera da: $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2} x = 2$

Grafikoa $y = x$ zuzenarena da, "zulo" bat duelarik $x = 2$ abzisako puntuan.

$$y=\frac{x^2-2x}{x-2}=x \quad \text{baldin } x\neq 2 \text{ bada}$$



5. adibidea

*Aurkitu k-ren balioa,* $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & ; \quad x \neq 1 \\ k & ; \quad x = 1 \end{cases}$ *funtzioa jarraitua izan dadin x = 1 abzisako puntuan.*

f(1) = k

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$$

f(1) = $\lim_{x\to 1} f(x)$ bete behar denez, **k = 2** izan beharko du

6. adibidea

$y = \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ *funtzioa emanik, kalkulatu f(3) delakoak izan behar duen balioa, f funtzioa jarraitua izan dadin x = 3 abzisako puntuan*

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x-2) = 1$$

*f(3) = 1* bada, *f* funtzioa jarraitua da puntu guztietan. Honelako funtzio bat izatera bihurtuko litzateke:

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & ; \quad x \neq 3 \\ 1 & ; \quad x = 3 \end{cases}$$

## Jarraitutasuna tarte batean

Tarte batean jarraitua da funtzio bat baldin tarteko puntu guztietan jarraitua denean.

a) $y = \dfrac{1}{x}$ funtzioa ez da jarraitua [-1 , 1] tartean, barneko puntu batean (*x=0*) etena baita

b) $y = \begin{cases} x^2 & ; \quad x < 1 \\ 2 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$ funtzioa ez da jarraitua [0 , 1] tartean. Zergatik?

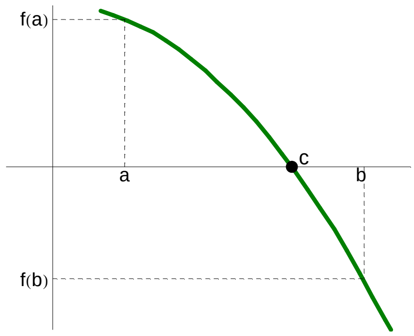
c) $y = x^3 - \dfrac{x}{4}$ eta funtzio polinomiko guztiak jarraituak dira *R* osoan.

# Jarraitutasunari buruzko teoremak

## Bolzano-ren teorema

Baldin *[a , b]* tarte itxian *f* funtzioa jarraitua bada eta tartearen muturretan aurkako zeinuko balioak hartzen baditu, orduan gutxienez $c \in (a\ ,\ b)$ puntu bat dago, zeinean *f(c) = 0* den.

Grafikoan ikusten denez, f(a)>0 eta f(b)>0 dira, eta, funtzioa jarraitu denez, existitzen da gutxienez $c \in (a\ ,\ b)$ puntu bat dago, zeinean *f(c) = 0* den.



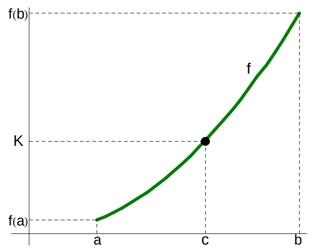

**Ariketa ebatzia**

*Bolzano-ren teorema erabiliz, egiaztatu $x^3 - 5x + 2 = 0$ ekuazioak soluzio bat duela (1 , 3) tartean.*

- f(x) = $x^3 - 5x + 2$ funtzioa jarraitua da R multzoan.
- f(3) =14>0 eta f(1) = -2<0 dira. Beraz, (1 , 3) tarteko gutxienez *c* puntu batean *f(c) = 0* izan behar du.

## Bitarteko balioen teorema

Baldin *f* funtzioa jarraitua bada *[a , b]* tarte itxian, orduan funtzioak *f(a)* eta *f(b)* bitarteko balio guztiak hartzen ditu. Hots, *f(a)* eta *f(b)* bitarteko edozein *K* baliotarako, existitzen da gutxienez $c \in (a\ ,\ b)$ balio bat, *f(c) = K* egiten duena.




**Ariketa ebatzia**

*Eman dezagun f(x) = $x^3 - x^2 + x$ funtzioa. Existitzen al da [1 , 2] tarteko "c" punturen bat , f(c) = 2 egiten duena?*

- Funtzioa jarraitua da
- *f(1) = 1* eta *f(2) = 6* dira.

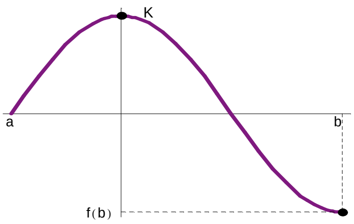
*2* balioa *1* eta *6*ren bitartekoa da. Beraz, Bitarteko balioen teorema-ren arabera, existitzen da gutxienez *c* puntu bat, *f(c) = 2* egiten duena.

## Akotazio teorema

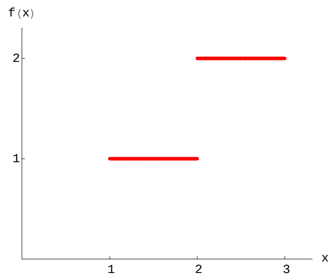
Baldin *f* funtzioa jarraitua bada *[a , b]* tarte itxian, orduan bornatua da.

Grafikoko funtzioan,

- Goi-bornea: *K*
- Behe-bornea: f(b)



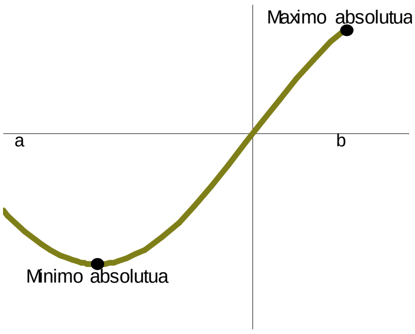

Alderantziz ez da egia. Esaterako *y = Zati osoa (x)* funtzioa bornatua da [1 , 3] tartean, baina etena da *x = 2* abzisako puntuan.




*[a , b]* tartea itxia izan behar du. Esate baterako, $y=\dfrac{1}{x-3}$ funtzioa jarraitua da *(3  6)* tartean, baina ez du goi-bornerik zeren $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x-3}=\infty$ baita.

## Weierstrass-en teorema

Baldin *f* funtzioa jarraitua bada *[a , b]* tarte itxian, orduan funtzioak bere maximo absolutua eta minimo absolutua ditu *[a , b]* tartean.




Teorema honek aurreko teorema inplikatzen du, hau da, funtzioa bornatua dela.

Grafikoan argi dago, [a , b] tartean jarraitua bada, derrigorrean maximo eta minimo absolutuak eduki behar dituela.

Funtzioak maximo eta minimoaren bitarteko balio guztiak hartzen ditu.

Tarte itxia izan behar du. Adibidez, $y=\dfrac{1}{x}$ funtzioa jarraitua da (0 , 1)-ean, baina ez du maximorik.

- Marraztu zuzen  bat, eta zuzenaren alde bakoitzean hartu puntu bana. Arkatza paperetik altxatu gabe (jarraitua), irudikatu bi puntuen artean edonolako kurba bat. Derrigorrean, kurbak zuzena zeharkatuko du (Bolzano). Zuzena OX ardatza bada, arkatza positibotik negatibora -edo alderantziz- pasatuko da.
- Mendiko errepide batek nonbaiten dauka bere kotarik altuena (Weierstrass)

## Ariketak

1. Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna:

$$y=\frac{1}{x^2+49} \qquad y=e^{-5x} \qquad y=\frac{1}{|x|} \qquad y=\frac{1}{|x-2|+1}$$

2. Lortu a eta b parametroek izan behar duten balioa funtzio hau jarraitua izan dadin R multzoak.

$$y=\begin{cases} 5x & ; \quad x \le -1 \\ ax^2+b & ; \quad -1 < x \le 2 \\ 3x-2 & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

(Sol.: a = 3 eta b=-8 )

3. $y=\dfrac{x^2-8x+16}{x-4}$ funtzioa emanik, ze balio hartu beharko luke f funtzioak x =4 abzisa-puntuan, jarraitua izan dadin.

(Sol.: 0 )

4. Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna eta aurkitu asintotak. Ondoren, egizu adierazpen grafikoa

$$y=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & ; \quad x<1 \\ 1-x & ; \quad x \ge 1 \end{cases} \qquad y=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & ; \quad x \ne 0 \\ 1 & ; \quad x=0 \end{cases} \qquad y=\frac{x+1}{|x|}$$

$$y=\ln(x^2-1) \qquad y=\ln(1-x^2)$$

5. Egiaztatu x3 + x2 – 7x + 1 = 0 ekuazioak soluzio erreal bat baduela. Erabili Bolzanoren teorema.

6. Egiazta ezazu y = $x^2$ – 4x + 2 funtzioak [0 , 2] tarteko puntu batean OX ardatza mozten duela. Eta $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ funtzioak [0 , 2] tartean?

7. Eman dezagun f(x) = $2x^2$ – x – 1 funtzioa. Egizu baieztapen hauen eztabaida:
   a) “*f*“ jarraitua da [1 , 3] tartean
   b) Existitzen da $c\in(1,3)$ tarteko puntu bat, non $f(c)=\dfrac{1}{2}$ den.
   c) Existitzen da $c\in(1,3)$ tarteko puntu bat,non f(c) = 4 den.

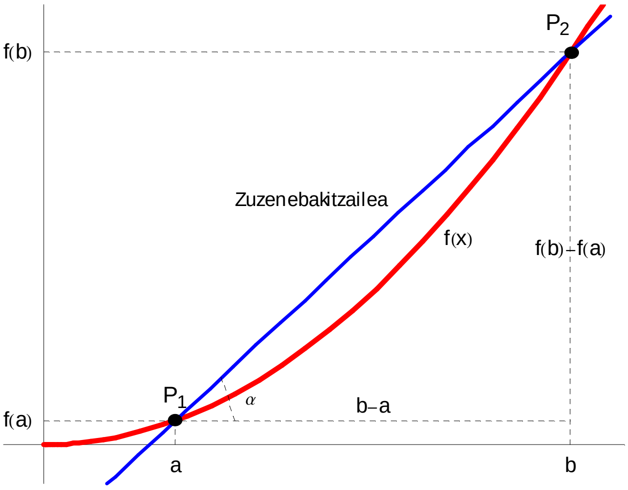
8. Arrazoitu ondoko funtzioak bornatuak diren ala ez, goi eta behe borneak emanez. Esan maximo edo minimorik duten ala ez.

$f(x) = x^2$ , $[-3 , 4]$ ; $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ , $[2 , 5]$ ; $h(x)=\dfrac{1}{x-1}$ , $[0 , 2]$

# 3-DERIBATUA (II)

## Funtzio baten batez besteko aldaketa-tasa

Kontsidera dezagun irudiko grafikoan adierazitako *f* funtzioa, eta $P_1 = (a , f(a))$ eta $P_2 = (b , f(b))$ puntuak.




Funtzioaren batez besteko aldaketa-tasa *a*-ren eta *b*-ren artean hauxe da:

$$BBAT\,[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Zatidura horren balioa $\alpha$ angeluaren tangente trigonometrikoaren balioaren berdina da eta, hori, aldi berean, $P_1$ eta $P_2$ puntuetatik pasatzen den zuzenaren (kurbarekiko ebakitzailea) maldaren berdina da.

*f* funtzioak *[a , b]* tartean duen **batez besteko aldaketa-tasa** grafikoaren *(a , f(a))* eta *(b , f(b))* puntuetatik pasatzen den **zuzen ebakitzailearen malda**ren berdina da.

**BBATaren interpretazio fisikoa**

Higikari batek denboraren arabera duen posizioaren funtzioa kontsideratuz gero, tarte bateko batez besteko aldaketa-tasak higikari horrek tarte horretan duen *batez besteko abiadura* adieraziko du.

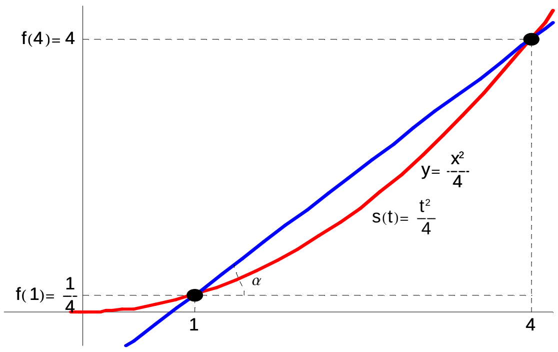
Batzuetan, *f* funtzioaren BBATa era honetan adierazten da:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ edo } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

### 1. adibidea

*Demagun* $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ *funtzioa. Kalkulatu:*

- *Batez besteko aldaketa-tasa [1 , 4] tartean.*
- *x = 1 eta x = 4 abzisa puntuetatik pasatzen den zuzen ebakitzailearen malda.*
- *Aurreko zuzen ebakitzaileak OX ardatzarekin eratzen duen angeluaren tangentea.*



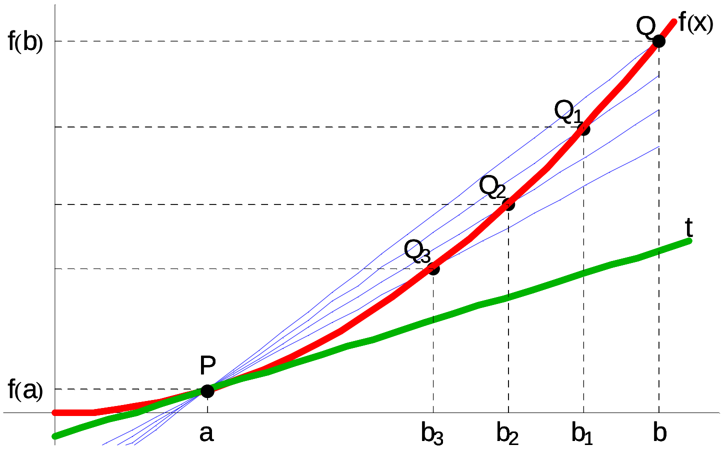

- *Higikari baten posizioa denboraren funtzioan* $s(t) = \dfrac{t^2}{4}$ *eran adierazten bada, zenbat da batez besteko abiadura 1 h eta 4 h bitartean?*

4 galderak modu berean kalkulatzen dira, eta balio bera dute; hau da:

$$BBAT\,[1\,,4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\frac{4^2}{4} - \frac{1^2}{4}}{4 - 1} = \frac{\frac{15}{4}}{3} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

# Funtzioen deribatua puntu batean

Puntu bateko alduiuneko aldaketa-tasak garrantzi handia du funtzioen azterketan eta matematikoki funtzioak puntu horretan duen **deribatua** deritzo.




Abzisak *a* baliotik gero eta hurbilago dauden $b_1$, $b_2$, $b_3$... balioak hartzean, horiei dagozkien $PQ_1$, $PQ_2$, $PQ_3$... zuzen ebakitzaileak hainbat eta hurbilago daude $x = a$ puntutik pasatzen den ***t*** zuzen tangentearekin edo zuzen ukitzailearekin.

Zuzen ukitzaile horren malda $PQ_n$ zuzen ebakitzaileen malden limitea izango da, alegia, *f* funtzioaren BBATen limitea: $\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .  ***f'(a)*** eran adierazten da.

Kontura zaitezkeenez, $h = b\text{-}a$ eginez, $b = a+h$ dugu. Gainera, *b* balioa *a*-rantz joaten denean $h = b\text{-}a$ balioa zerorantz joaten da. Beraz, era honetan idatz dezakegu aurreko adierazpena: $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Beraz, honako hau baiezta dezakegu:

> *f* funtzioak $x = a$ abzisako puntuan duen **deribatua** funtzioaren grafikoko *(a , f(a))* puntuko **zuzen ukitzailearen malda** da.

**Deribatuaren interpretazio fisikoa**

Higikari batek denboraren arabera duen posizioaren funtzioa kontsideratuz gero, ***t*** aldiuneko deribatuak higikariaren ***aldiuneko abiadura*** adierazten digu.

Gehikuntzen notazioa erabiliz, era honetan adieraz dezakegu *f'(x)*:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

### Adibidea

Definizioa erabilita, kalkula dezagun $f(x) = \frac{x^2}{4}$ funtzioaren deribatua x = 1 puntuan.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(1+h)^2}{4} - \frac{1^2}{4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+2h+h^2) - 1}{4h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h+h^2}{4h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{4h} = \lim_{h \to 0} \frac{2+h}{4} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

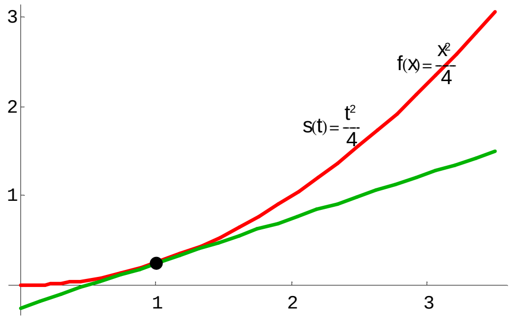
Modu errazagaoan kalkula daiteke; hau da, deribatuen formulak erabilita:

$$f'(x) = \frac{1}{4} 2x = \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad f'(1) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

**2. adibidea**.

*Demagun* $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ *funtzioa. Kalkulatu:*

- *Aldiuneko aldaketa-tasa x = 1balioko abzisa puntuan.*
- *x = 1 abzisa puntutik pasatzen den zuzen ukitzailearen malda.*
- *f-ren deribatua x = 1 abzisa puntuan.*
- *Higikari baten posizioa denboraren funtzioan* $s(t)=\dfrac{t^2}{4}$ *eran adierazten bada, zenbat da aldiuneko abiadura t = 1 seg. denean?*




4 galderak modu berean kalkulatzen dira, eta balio bera dute; hau da: f´(1) = 0,5

## Zuzen ukitzailearen ekuazioa

*Lortu* $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ *funtzioaren grafikoak x = 1 abzisako puntuan duen zuzen ukitzailearen ekuazioa.*

Ondokoa da zuzen baten puntu-malda motako ekuazioa: $\mathbf{y - y_0 = m(x - x_0)}$

$P(x_0\,,\,y_0)$ eta $m$ malda lortu behar ditugu.

Puntua: $x = 1$ bada, $f(1)=\dfrac{1}{4}$ da. Beraz, zuzena (1 , ¼) puntutik pasatzen da

Malda, $f'(1)$, lehenago kalkulatu dugu: $m = f'(1) = 0{,}5$

Balio horiek $y - y_0 = m(x - x_0)$ ekuazioan ordezkatuz,

$$y-\frac{1}{4}=0{,}5(x-1) \quad \text{edo} \quad 2x - 4y - 1 = 0$$

<u>Ariketak</u>

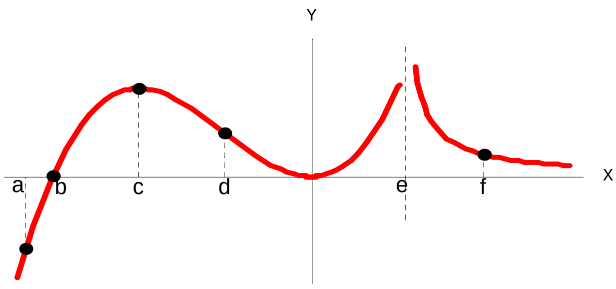
1. Deribatuaren definizioa erabiliz, aurkitu f(x) = $x^3$ funtzioaren deribatua x = 1 abzisako puntuan.

2. Izan bedi $y=\dfrac{1}{x}$ funtzioa.

a)Aurki ezazu batez besteko aldaketa-tasa [1 , 2] tartean. Zein da bere esangura geometrikoa?
b)Aurki ezazu aldiuneko aldaketa-tasa x = 1 abzisako puntuan.Zein da bere esangura geometrikoa?

3. Izan bedi f(x) = $x^2$ - 8x + 12 funtzioa.
a)Lor ezazu x = 1 abzisako puntutik pasatzen den zuzen ukitzailearen ekuazioa.
b)Zein puntutan zuzen ukitzailea da OX ardatzaren paraleloa?
c)Zein puntutan zuzen ukitzailea da 2x-y+5=0 zuzenaren paraleloa?. Idatzi zuzen ukitzaile horren ekuazioa.

4. Ondoko grafikoa duen f(x) funtzioan, nolakoak dira deribatuen balioen zeinuak “a”, “b”, “c”, “d”, “e” eta “f” puntuetan? Positibo, negatibo ala zero?




## Funtzio deribatua

*f’* funtzio bat kontsidera dezakegu, *x* abzisako puntu bakoitzari *f* funtzioak puntu horretan duen deribatuaren balioa egokitzen diona.

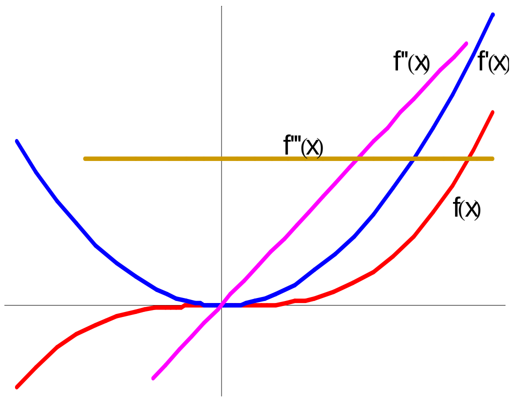
$$x \rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Horrela definituriko funtzioari *f*-ren **funtzio deribatua** deritzo edo, labur esanda, **deribatua**.

*f(x)* = $x^3$ izanik, zein da funtzio deribatua? Eta bigarren deribatua; eta hirugarrena?

$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$

Hona hemen $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ eta $f'''(x) = 6$ funtzio deribatuen grafikoak.




Puntu batean kalkulatu nahi izanez gero, nahikoa da funtzio deribatuan *x*-ren balioa ordezkatzea.

## Albo-deribatuak

> "Funtzio bat deribagarria da puntu batean baldin eta soilik baldin puntu horretan ezkerraldeko eta eskuinaldeko deribatuak berdinak badira".

Adibidea 1

*Kalkulatu* $f(x)=|x|$ *funtzioak x = 0 abzisako puntuan dituen albo- deribatuak*

$$f(x)=\begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Ezkerraldeko deribatua: $f'(x)=-1$; beraz, $f'(0^-)=-1$

Eskuinaldeko deribatua: $f'(x)=1$; beraz, $f'(0^+)=1$

$f'(0^+)$ eta $f'(0^-)$ desberdinak direnez, ez da existitzen $f'(0)$

Adibidea 2

*Kalkulatu* $f(x)=\begin{cases} x-2 & ; \quad x \leq 2 \\ (x-2)^2 & ; \quad x > 2 \end{cases}$ *funtzioak x = 2 abzisako puntuan dituen albo-deribatuak*

Ezkerraldeko deribatua: $f'(x)=1$; beraz, $f'(2^-)=1$

Eskuinaldeko deribatua: $f'(x)=2.(x-2).1 \quad \rightarrow \quad f'(2^+)=2.(2-2).1=0$

$f'(2^+)\neq f'(2^-)$ denez gero, *f* funtzioa ez da deribagarria x = 2 puntuan

## Deribagarritasuna eta jarraitutasuna

*x* = *a* abzisako puntuan ***f* funtzioa deribagarria izan dadin, beharrezkoa da *f* jarraitua izatea** puntu horretan.

Nolanahi den, deribagarria izateko *a* puntuan ez da nahikoa *a* puntuan jarraitua izatea, zeren gerta baitaiteke *a* puntuan *f* jarraitua izatea baina deribagarria ez izatea. Esate baterako,aipatu berri ditugun bi funtzioak: $f(x)=|x|$ eta $f(x)=\begin{cases} x-2 & ; \quad x \geq 2 \\ (x-2)^2 & ; \quad x < 2 \end{cases}$

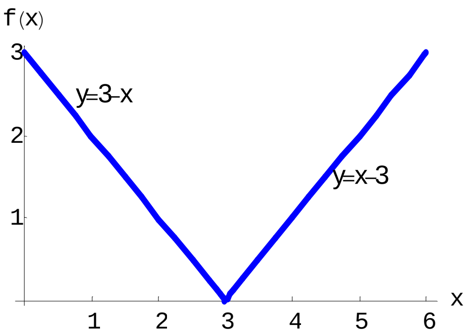
- Lehena *x = 0* puntuan jarraitua da, baina ez da deribagarria
- Bigarrena *x = 2* puntuan jarraitua da, baina ez da deribagarria.

> Baldin *f* funtzioa deribagarria bada *x* = *a* puntuan, orduan *f* funtzioa jarraitua da *x* = *a* puntuan.

*Adibidea 3*

*Aztertu $f(x)=|x-3|$ funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna x = 3 puntuan. Marraztu funtzioa.*

$$f(x)=|x-3|=\begin{cases} x-3 & ; \quad x\geq 3 \\ -(x-3) & ; \quad x<3 \end{cases}$$




Jarraitutasuna x=3 puntuan :

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 0$ Jarraitua da

f(3) = 0

Deribagarritasuna x = 3 puntuan:

$f'(3^-)=-1$

$f'(3^+)=1$

Ez da deribagarria

*Adibidea 4*

*Aztertu* $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ; \quad x\leq 1 \\ 2 & ; \quad 1<x<2 \\ -\dfrac{x}{2}+2 & ; \quad x\geq 2 \end{cases}$ *funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna. Marraztu funtzioa.*

**x = 1 puntuan:**

Jarraitutasuna x=1 puntuan :

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1^2+1=2$ Jarraitua da

f(1) = $1^2$+1 = 2

Deribagarritasuna x = 1 puntuan:

$f'(1^-): \quad f'(x)=2x \;\to\; f'(1^-)=2.1=2$

$f'(1^+)=0$

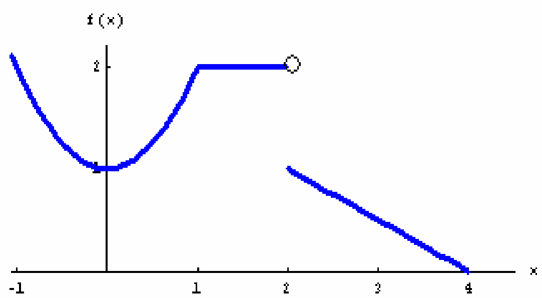
Ez da deribagarria x = 1 puntuan

**x = 2 puntuan:**

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\dfrac{2}{2}+2=1$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$

f(2) = 1




Ez da jarraitua $x$ = $2$an. Beraz, ez da deribagarria x = 2 puntuan.

Intuitiboki zera esan genezake: “Grafikoaren norabidea bat-batean aldatzen bada puntu batean (erpina irudikatzen da), puntu horretan funtzioa ez da deribagarria”

*Adibidea 5*

$$f(x)=\begin{cases} 3-ax^2 & ; \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{ax} & ; \quad x>1 \end{cases}$$ *funtzioa emanik, determinatu a-ren balioa, funtzioa jarraitua eta deribagarria izan dadin x=1 puntuan.*

Jarraitutasuna x=1 puntuan : $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3-a(1)^2 = 3-a$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{2}{a}$

*f(1) = 3- a*

Jarraitua izateko *x=1* puntuan, $3-a=\dfrac{2}{a}$ bete behar du; hau da:

$$3a-a^2=2 \quad\to\quad a^2-3a+2=0 \quad\to\quad a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} \quad\to\quad a=1 \text{ eta } a = 2$$

Ikus dezagun *a*-ren bi balio horientzat *f* funtzioa deribagarria den *x = 1* puntuan

Deribagarritasuna *x = 1* puntuan *a = 1* denean:

$$f(x)=\begin{cases} 3-1x^2=3-x^2 & ; \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{1x}=\dfrac{2}{x} & ; \quad x>1 \end{cases}$$

$f'(1^-):\ f'(x)=-2x \quad\to\quad f'(1^-)=-2$

$f'(1^+):\ f'(x)=-\dfrac{2}{x^2} \quad\to\quad f'(1^+)=-2$

Deribagarria da *a=1* denean.

Deribagarritasuna *x = 1* puntuan *a = 2* denean:

$$f(x)=\begin{cases} 3-2x^2 & ; \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x} & ; \quad x>1 \end{cases}$$

$f'(1^-):\ f'(x)=-4x \quad\to\quad f'(1^-)=-4$

$f'(1^+):\ f'(x)=-\dfrac{1}{x^2} \quad\to\quad f'(1^+)=-1$

Ez da deribagarria *a=2* denean

Adibidea 6

*Aztertu $y=|x|$ funtzioaren deribagarritasuna x = 0 puntuan, deribatuaren definizioa erabilita.*

$y=|x|=\begin{cases} x & ; \quad x\ge 0 \\ -x & ; \quad x<0 \end{cases}$ jarraitua da *x = 0*-n, zeren $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$ baita

Deribagarritasuna:

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(0+h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(0+h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1$$

## Ariketak

1. Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna eta deribagarritasuna, adierazitako puntuetan:

$f(x)=|x+1|$ , x = -1 puntuan

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & ; \quad x<4 \\ x & ; \quad x\geq 4 \end{cases}$$ , x = 4 puntuan

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & ; \quad x<2 \\ x^2+3 & ; \quad x\geq 2 \end{cases}$$ , x= 2 puntuan

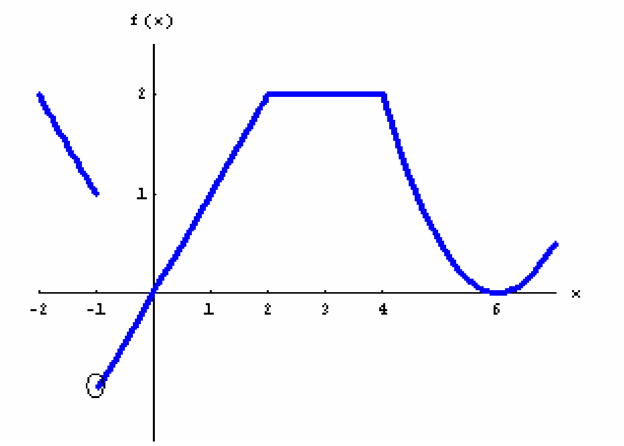
$$g(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & ; \quad 0\leq x<1 \\ \dfrac{1+x}{2} & ; \quad 1\leq x\leq 3 \end{cases}$$ , x =1 puntuan

2. Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna eta deribagarritasuna.

$$f(x)=\frac{2}{x^2-1} \quad ; \quad g(x)=\begin{cases} 4x+8 & ; \quad x\leq -2 \\ 4-x^2 & ; \quad -2<x<2 \\ 4x-8 & ; \quad x\geq 2 \end{cases}$$

3. Izan bedi $f(x)=\begin{cases} ax+2bx^2 & ; \quad x\leq 1 \, bada; \\ x^2-2x+a & ; \quad x>1 \, bada \end{cases}$ . Aztertu *f* funtzioa zuzen erreal osoan deribagarria izateko *a* eta *b* parametroen baliorik existitzen den.

4. Aztertu irudian adierazitako funtzioaren deribagarritasuna.



# Deribatuen kalkulua. Formulak

**Eragiketak**: $y = k.g(x) \Rightarrow y' = k.\,g'(x)$

$$y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$y = f(x).g(x) \Rightarrow y' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

- **Funtzio konposatuaren deribatua: katearen erregela**

$$y = (f \circ g)(x) \Rightarrow y' = f'[g(x)] \,.\, g'(x)$$

Adibideak

I) *y = sin 3*x funtzioa funtzio konposatu bat da, *f(x) = sin x eta g*(x) = 3x direlarik. Izan ere, (f ₒ g)(x) = f[g(x)] = f(3x) = sin 3x

Bere deribatua: **y'** = f'[g(x)] . g'(x) = cos[g(x)].g'(x) = **cos 3x . 3**

II) $f(x) = x^2-1$ eta $g(x) = \ln x$ funtzioak emanda, kalkulatu *f(g(x))* eta *g(f(x))* funtzioen deribatuak.

Katearen erregela:

- *f(g(x))***'** = f '(g(x)) . g'(x) = 2 g(x)-0 . g'(x) = $2\ln x.\frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$

Aldez aurretik, *f(g(x))* funtzioa kalkula daiteke, eta ondoren deribatu; hau da:

f(g(x)) = f(ln x) = $(\ln x)^2$ -1 . Bere deribatua: $2(\ln x).\frac{1}{x} - 0$

- *g(f(x))***'** = g'*(f(x))* . *f '(x)* = $\frac{1}{x^2-1} \,.\, 2x = \frac{2x}{x^2-1}$

Edo, g(f(x)) kalkulatu eta gero:

g(f(x)) = g($x^2$-1) = ln ($x^2$-1) . Bere deribatua: $\frac{2x}{x^2-1}$

<u>Orokorrean,</u> funtzioa konposatua denean **u** letraz adieraziko dugu; hau da,

*y = sin [g(x)]* edo *y = sin u* funtzioaren deribatua **y' = u'.cos u** idatziko dugu.

**Adibide ebatziak**

1. Demagun *f* funtzioa puntu guztietan deribagarria dena eta $f\,(1) = 1$, $f\,'(1) = -1$ eta $f\,''(1) = 2$ dela. Izan bedi *g* ondoko funtzioa:
   $g(x) = 4[f(x)]^2 + f(x)$. Kalkulatu $g\,''(1)$

Ebazpena: $g\,'(x) = 4\,[2.\,f(x)].\,f\,'(x) + f\,'(x) = 8.\,f(x).\,f\,'(x) + f\,'(x)$

$g''(x) = 8[\,f\,'(x).\,f\,'(x) + f\,(x).\,f\,''(x)] + f\,''(x)$

$g''(1) = 8[f\,'(1).\,f\,'(1) + f\,(1).\,f\,''(1)] + f\,''(1) = 8\,[(-1)(-1) + 1.2] + 2 = 26$

2. $f(x) = (x+1)^2$ eta $g(x) = x^2$ izanik, kalkulatu $f\,'(x^2)$ edo $f\,'[g(x)]$.
   Zenbat da $(f \circ g)'(x)$?

a) $f[g(x)] = [g(x) + 1]^2$ ; $f\,'(x^2) = f\,'[g(x)] = 2[g(x)+1] = 2(x^2 + 1)$

b) $(f \circ g)'(x) = f\,'[g(x)].g'(x)$ edo $f\,'(x^2).g'(x) = 2.[g(x)+1].2x = 2(x^2+1).2x$

3. Eman dezagun $g(x) = f(x^2)$ funtzioa dela eta $f(4) = 5$ eta $f\,'(4) = 6$ direla.
   Zenbat da $g(2)$? Eta $g\,'(2)$?

   $g(2) = f(2^2) = f(4) = 5$

   $g\,'(x) = (f\,(x^2))' = f\,'(x^2).2x$. Beraz, $g\,'(2) = f\,'(4).2.2 = 6.4 = 24$

Ariketak

1. Ondoko funtzioak emanda: $f(x) = 1+3x$ eta $g(x) = \sin x$ , erabili katearen erregela ondoko funtzioen deribatua kalkulatzeko:

   $H(x) = f(g(x))$ eta $J(x) = g(f(x))$

2. *f* eta *g* funtzioak zuzen erreal osoan deribagarriak direla jakinda, eta $f(1) = 2$; $g'(2) = 4$ eta $g[f(x)]$ funtzio konposatuaren deribatuak *1* puntuan *12* balio duela jakinda, aurki ezazu $f\,'(1)$ delakoaren balioa.

## Deribatuen taula

| Funtzio bakunak | | Funtzio konposatuak | |
|---|---|---|---|
| f(x) = k | f ’(x) = 0 | Notazioa errazteko, *u* delakoak *x*-ren funtzio bat adierazten du | |
| f(x) = x | f ’(x) = 1 | | |
| f(x) = $x^n$ | f ’(x) = $nx^{n-1}$ | f(x) = $u^n$ | f ’(x) = $nu^{n-1}u'$ |
| f(x) = $\sqrt{x}$ | f ’(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | f(x) = $\sqrt{u}$ | f ’(x) = $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| f(x) = $\sqrt[n]{x}$ | f ’(x) = $\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ | f(x) = $\sqrt[n]{u}$ | f ’(x) = $\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ |
| f(x) = ln x | f ’(x) = $\frac{1}{x}$ | f(x) = ln u | f ’(x) = $\frac{u'}{u}$ |
| f(x) = $\log_a x$ | f ’(x) = $\frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$ | f(x) = $\log_a u$ | f ’(x) = $\frac{u'}{u}\frac{1}{\ln a}$ |
| f(x) = $e^x$ | f ’(x) = $e^x$ | f(x) = $e^u$ | f ’(x) = $e^u u'$ |
| f(x) = $a^x$ | f ’(x) = $a^x$ . ln a | f(x) = $e^u$ | f ’(x) = $a^u u' \ln a$ |
| f(x) = sin x | f ’(x) = cos x | f(x) = sin u | f ’(x) = $u'\cos u$ |
| f(x) = cos x | f ’(x) = -sin x | f(x) = cos u | f ’(x) = $-u'\sin u$ |
| f(x) = tg x | f ’(x) = $\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$ | f(x) = tg u | f ’(x) = $\frac{u'}{\cos^2 u}=u'\sec^2 u$ |
| f(x) = cotg x | f ’(x) = $\frac{-1}{\sin^2 x}=-\cos ec^2 x$ | f(x) = cotg u | f ’(x) = $\frac{-u'}{\sin^2 u}=-u'\cos ec^2 u$ |
| f(x) = sec x | f ’(x) = tg x . sec x | f(x) = sec u | f ’(x) = $u' tg\, u . \sec u$ |
| f(x) = cosec x | f ’(x) = - cotg x . cosec x | f(x) = cosec u | f ’(x) = $-u'\cot g\ u . \cos ec\, u$ |
| f(x) = arc sin x | f ’(x) = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | f(x) = arc sin u | f ’(x) = $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| f(x) = arc cos x | f ’(x) = $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | f(x) = arc cos u | f ’(x) = $\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| f(x) = arc tg x | f ’(x) = $\frac{1}{1+x^2}$ | f(x) = arc tg u | f ’(x) = $\frac{u'}{1+u^2}$ |
| f(x) = arc cotg x | f ’(x) = $\frac{-1}{1+x^2}$ | f(x) = arc cotg u | f ’(x) = $\frac{-u'}{1+u^2}$ |

## Deribazio logaritmikoa

Oinarria eta berretzaile modura funtzio bat duten funtzioen deribatuak kalkulatzeko erabiltzen da metodo hau.

Adibidea. Demagun **$y = x^x$** funtzioa.

Hiru pausu:

I) Logaritmo nepertarrak hartuko ditugu berdintzaren bi ataletan eta logaritmoen propietateak aplikatuko ditugu:

$$\text{Ln } y = \ln x^x = x \,.\, \ln x$$

II) Deribatu egingo ditugu berdintzaren bi atalak:

$$\frac{y'}{y} = 1.\ln x + x.\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

III) Bakandu egingo dugu *y'* eta ordezkatu egingo dugu *y* bere adierazpenaz:

$$y' = y.(\ln x + 1) = x^x .(\ln x + 1)$$

**Ariketa.**

Deriba itzazu ondoko funtzioak:

$$y = x^{3x} \quad ; \quad y = x^{tg\, x} \quad ; \quad y = \sqrt[x]{x} \quad ; \quad y = x^{e^x} \quad ; \quad y = (2x+1)^x$$

## Deribazioa era inplizituan

Batzuetan ez da erraza izaten aldagai bat bestearen funtzioan bakantzea; hala ere, deribatua kalkulatu behar izaten da.

Horixe gertatzen da funtzio honen kasuan: $x^2 + y^2 = 2x + 2y - 6$

*y* aldagaieran deribatua kalkulatzeko, prozedura hau erabiliko dugu:

- Deribatu egingo ditugu berdintzaren atal biak, *y* aldagaia *x*-ren funtzioa dela kontuan izanik.

$$(x^2 + y^2)' = (2x + 2y - 6)'$$

$$2x + 2y.y' = 2 + 2y'$$

- Bakandu egingo dugu *y'* deribatua:

$$2y.y' - 2y' = 2 - 2x \quad \Rightarrow \quad y'(2y-2) = 2 - 2x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2-2x}{2y-2} = \frac{1-x}{y-1}$$

Ariketa ebatzia

*Lortu $x^2 + y^2 – 10x – 6y + 24 = 0$ zirkunferentziak $P = (8 , 2)$ puntuan duen zuzen ukitzailearen ekuazioa*

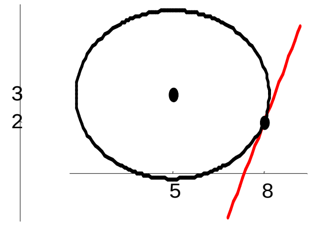
Zuzenaren malda = $y'(8)$

Deriba dezagun era inplizituan: $2x + 2y.y' – 10 – 6y' +0 = 0$
Sinplifikatu egingo dugu: $x + y.y' – 5 – 3y' = 0$

$y'(y – 3) = 5 – x \quad ; \quad y' = \dfrac{5-x}{y-3}$

Zuzen ukitzailearen malda = $y'_{(8\,,\,2)} = \dfrac{5-8}{2-3} = 3$

Zuzena: $y – 2 = 3(x – 8) \quad ; \quad \mathbf{3x – y – 22 = 0}$




Ariketa

Determinatu $x^2 + y^2 – 6x - 2y + 5 = 0$ zirkunferentziak P =(1,0) puntuan duen zuzen ukitzailearen ekuazioa.

(Sol: $2x + y – 2 = 0$)

## Ondoz-ondoko deribatuak

$f'(x)$ funtzioan, deribagarria den tartean, $f''(x)$ defini daiteke. Era berean, hirugarren, laugarren...*n.* deribatua.

Adibidea $y = \dfrac{1}{1+x}$ funtzioaren *n*. deribatua

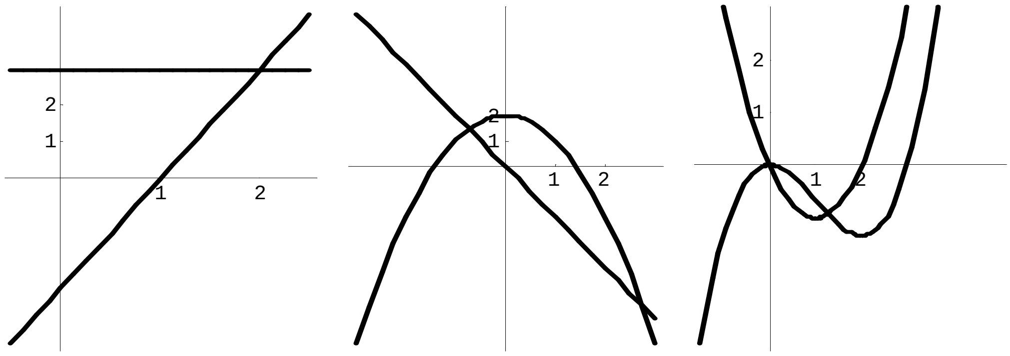
$$y = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$y' = -1(1+x)^{-2} \quad ; \quad y'' = 2(1+x)^{-3} \quad ; \quad y''' = -6(1+x)^{-4} \quad ;$$

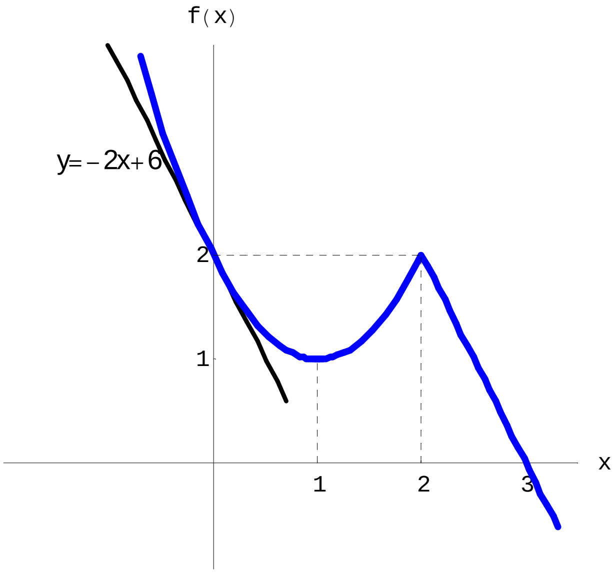
$$y^{IV} = 24(1+x)^{-5} \; ..... \; y^{n} = (-1)^n\, n!(1+x)^{-(n+1)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

## Ariketak

1. Grafiko hauetan, zienek adierazten du *f* funtzioa eta zeinek *f'* funtzio deribatua?



2. Ze balio hartzen du funtzio honen deribatuak x = 0, x = 1 eta x = 2 puntuetan? Arrazona ezazu.




3. Kalkulatu ondoko funtzioen deribatuak:

$y = \sin\frac{2}{x}.\cos\frac{x}{2}$ ; $y = \sqrt{(1+2x+3x^2)}$ ; $y = \frac{(4x^2-1)^5}{1-2x}$ ; $y = \cos x^2 .\cos^2 x$

$y = e^{\sqrt{1-x}}$ ; $y = (x.\sin a + \cos a)(x.\cos a - \sin a)$ ; $y = tg\,(6x^2-1)$ ; $y = (arc\sin(\sin x)$

$y = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ ; $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ ; $y = \sqrt[3]{arc\,tg\,x}$ ; $y = x^{\sin x}$ ; $y = \sqrt[x]{1-x}$

4. Aurki ezazu $y = e^{2x}$ funtzioaren *n.* deribatua

5. $f(x) = x^2 |x|$ funtzioa emanda, kalkulatu *f'(x), f''(x)* eta *f'''(x)*

6. Eman dezagu $f(x) = \frac{4}{x^2}$ funtzioa.

a) Aurki ezazu zuen ukitzaileaen ekuazioa *x = 2* abzisako puntuan
b) Zein puntutan da zuzen ukitzailea paraleloa *y = 2-x* zuzenarekin? Zein da zuzen horren ekuazioa?

7. Aurkitu *2x + y = 0* zuzenarekin paraleloak diren $y = \frac{2x}{x-1}$ kurbaren zuzen ukitzaileen ekuazioak

8. $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ funtzioan kalkulatu *a* eta *b*-ren balioak, funtzioa (-2 , 6) puntutik pasatu eta puntu horretan zuzen ukitzailea horizontala izan dadin.

9. $f(x) = ax^3 + bx$ funtzioa *(1 , 1)* puntutik pasatzen da eta puntu horretan duen zuzen ukitzailea *3x + y = 0* zuzenaren paraleloa da. Aurki itzau *a* eta *b*

10. $y = x^2 + 2x + 1$ kurbatik kanpo dagoen *P(0 , 0)* puntutik bi zuzen ukitzaile pasatzen dira. Bata OX ardatza da; kalkulatu bestearen ekuazioa.

11. Demagun *f(x)* eta g(x) bi funtzio deribagarriak honako baldintzekin: g(0) = 1, f'(1) = -2 eta g'(0) = -3. Kalkulatu *(f o g)(0)* funtzio konposatuaren deribatua.

12. f funtzioari buruz ondokoa dakigu: puntu guztietan deribagarria da eta, horrez gain, f(0) = 1 eta f'(0) = 2. izan bedi ondoko funtzioa: $h(x) = e^{f(x)} + \sqrt{1 + (f(x))^2}$ . Kalkulatu h'(0)

13. Kalkulatu *a* eta *b*-ren balioak ondoko funtzioa jarraitua eta deribagarria izan dadin *R* multzoan.

$$y = \begin{cases} x^3 - x & ; \quad x \le 0 \\ ax + b & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

14. Egiazta ezazu $f(x) = x|x-1|$ funtzioa ez dela deribagarria x = 1 abzisako puntuan.

15. Esan zeintzu puntutan ez den deribagarria $f(x) = |x+1| + |x-3|$ funtzioa. Egizu adierazpen grafikoa.

# Funtzio deribagarriei buruzko teoremak

## Rolle-ren teorema

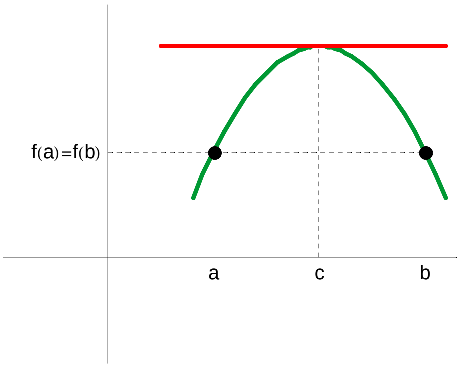
Izan bedi *f(x)* funtzioa. Ondoko hiru baldintzak betetzen badira:

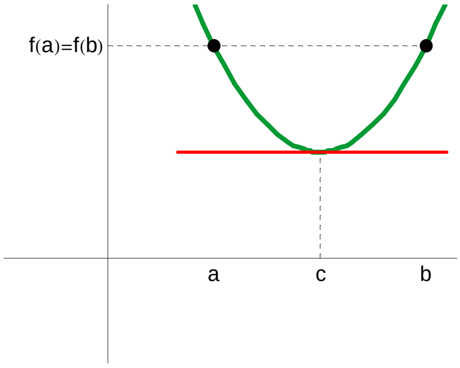
- *[a,b]* tarte itxian jarraitua izan.
- *(a,b)* tarte irekian deribagarria izan.
- *f(a) = f(b)*

*(a,b)* tartean existitzen da gutxienez *"c"* puntu bat, non *f´(c)=0* egiten duena.

Esanahi geometrikoa

Eman ditzagun Rolle-ren teoremaren hipotesia betetzen dituzten bi grafiko hauek:






Mendiko errepide bat bat igo eta gero jaitsi egiten baduzu (edo alderantziz), ibilbidearen gutxienez une batean zure autoa horizontalki ipiniko da (*f'(c) = 0*).

**Adibidea 1.** Demagun $f(x)=x^3-7x+6$ funtzioa. Aztertu ea betetzen dituen Rolle-ren teoremaren hipotesiak [-3, 2] tartean, eta erantzuna baiezkoa bada, lortu $f'(c)=0$ egiten duen *c*-ren balioa.

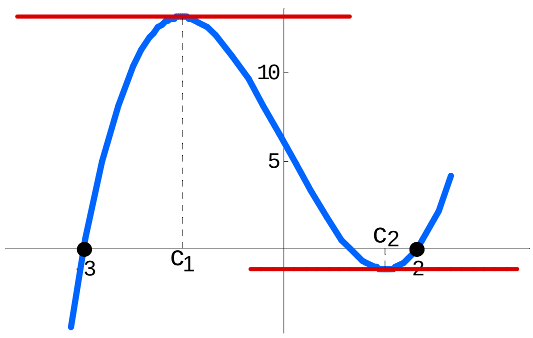
- *f* funtzio polinomikoa da. Beraz, jarraitua da [-3 , 2] tartean eta deribagarria da (-3 , 2) tartean.
- Gainera *f(-3) = 0* eta *f(2) = 0* dira.

*f*-k Rolle-ren teoremaren hipotesiak betetzen dituenez, *f* funtzioak *f'(c) = 0* den $c \in (-3, 2)$ puntu bat izango du gutxienez; hots, gutxienez mutur erlatibo bat izango du.

Mutur hori kalkulatzeko *f'(x) =0* ekuazioa ebatziko dugu:

f(‘) = $3x^2 - 7 = 0$

$x^2 = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = +\sqrt{\frac{7}{3}}$ eta $x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}$ Biak daude (-3,2) tartean.




Hortaz, bi puntutan betetzen da Rolle-ren teorema:

$c_1 = +\sqrt{\frac{7}{3}}$ eta $c_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}$

**Adibidea 2**

Azter dezagun Rolle-ren teorema $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ funtzioan [0 , 2] tartean

- *f(0) = 1* eta *f(2)= 1*
- Jarraitua da *[0 , 2]* tartean
- Ez da deribagarria *x = 1* puntuan, eta abzisako puntu hori *(0 , 2*) tartearen barruan dago.

Beraz, ezin da aplikatu Rolle-ren teorema.

## Lagrange-ren batez besteko balioaren teorema

Izan bedi *f(x)* funtzioa. Ondoko bi baldintzak betetzen badira:

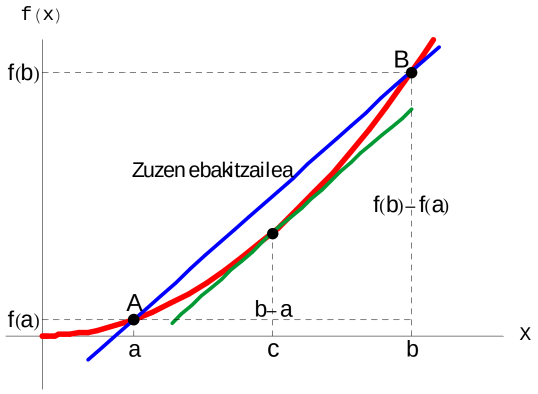
- *[a,b]* tarte itxian jarraitua izan.
- *(a,b)* tarte irekian deribagarria izan.

*(a,b)* tartean existitzen da gutxienez *"c"* puntu bat, hauxe betetzen duena:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$$

Interpretazio geometrikoa

Eman ditzagun Lagrange-ren teoremaren hipotesia betetzen duen grafiko hau:




*A* eta *B* puntuetatik pasatzen den zuzen ebakitzailearen malda eta “*c*” abzisako puntuan *f*-k duen zuzen ukitzailearen malda berdinak dira (bi zuzenak paraleloak dira)

**Adibidea 3.** Demagun *f(x)=x²* funtzioa. Aztertu ea betetzen duen Lagrange-ren teoremaren hipotesiak *[-1, 2]* tartean. Horrela bada, aurki ezazu teoremak baieztatzen duen tarte horretako *c* puntu bat.

- *f* funtzio polinomikoa da. Beraz, jarraitua da [-1 , 2] tartean eta deribagarria da (-1 , 2) tartean.

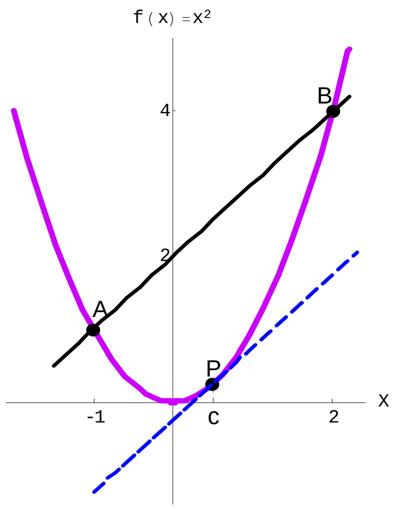
Egin dezagun adierazpen grafikoa:
A = (-1 , 1) eta B = (2 , 4) puntuetatik pasatzen den zuzenaren malda:

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}=\frac{4-1}{2-(-1)}=1$$

Bestalde, *f'(x) = 2x*

Beraz, $2x=1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2} \quad \text{edo} \quad c=\frac{1}{2}$

Bilaturiko puntua $P=(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ da.



## Cauchy-ren teorema

Izan bitez [a,b] tartean jarraituak eta (a,b) tartean deribagarriak diren f(x) eta g(x) funtzioak, non $g'(x) \neq 0$ den.

Existitzen da $c \in (a,b)$ puntu bat, zera betetzen duena: $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

**Adibidea 3**

Aplika dezagun Cauchy-ren teorema $f(x) = x^2 + 1$ eta $g(x) = x^3 - 1$ funtzioei *[1,2]* tartean, eta aurkitu *c* puntua.

Bi funtzioak jarraituak dira *[1,2]* tartean eta deribagarriak *(1,2)* tartean. Beraz,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} \quad \rightarrow \quad \frac{2x}{3x^2} = \frac{5-2}{7-0} \quad \rightarrow \quad \frac{3}{7} = \frac{2}{3x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{14}{9} \in (1, 2)$$

**ARIKETAK**

1. Eman dezagun $f(x) = 1 + x - x^2$ funtzioa. Existitzen al da *(0,1)* tarteko punturen bat, non *f*-ren zuzen ukitzailea *OX* ardatzaren paraleloa den?. Aplikatu Rolle-ren teorema.

2. Ondoko funtzioek aztertu ea betetzen dituzten Rolle-ren teoremaren hipotesiak. Horrela bada, lortu *c*-ren balioak.

   a) $y = x^3 - 2x^2$ ; [0,2] tartean

   b) $y = \text{tg } x$ $[0, \pi]$ tartean

   c) $y = |x^2 - 4|$ ; $[-3, 3]$ tartean

   d) $y = \begin{cases} 2x+2 & ; \ [0'5,1) \\ 5-(x-2)^2 & ; \ [1, 4] \end{cases}$

3. Kalkulatu *a, b* eta *c*-ren balioak $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & ; \ 0 \leq x \leq 2 \\ bx + c & ; \ 2 < x \leq 4 \end{cases}$ funtzioak Rolle-ren teoremaren hipotesiak bete ditzan. Aurkitu puntua.

4. Kalkulatu *b*-ren balioa $f(x) = x^3 - 4x + 3$ funtzioak Rolle-ren teoremaren hipotesiak bete ditzan *[0 , b]* tartean. Zein da teoremak beteko duen puntua?

5. Posible den kasuetan, aplika ezazu lagrange-ren batez besteko teorema ondoko funtzioei. Aurkitu puntuak.

a) $f(x) = x^2-3x+2$ ; $[-2 , -1]$ tartean

b) $g(x) = \ln x$ ; $[e , e^2]$ tartean

c) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & ; \ [-2\,,-1] \\ \dfrac{x^2-3}{2} & ; \ (-1\,,0] \end{cases}$ $\quad [-2\,,0]$ tartean

6. Egiazta ezazu $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & ; \ x<4 \\ -x^2+10x-19 & ; \ x\geq 4 \end{cases}$ funtzioak batez besteko balioaren teoremaren hipotesiak betetzen dituela [2 , 6] bitartean. Zein puntuan beteko du teorema?

7. *f(x)* funtzioa jarraitua eta deribagarria da *R* multzoan eta bere deribatuek $f'(x)\leq 2$ betetzen dute edozein *x*-entzat. Horrez gain, *f(3) = 1* bada, egiazta dezakegu $f(20)\leq 35$ izango dela? (Erabili batez besteko balioaren teorema).

8. *f(x)* funtzioa jarraitua eta deribagarria da *R* multzoan eta *f(0) = 3* da. Baldin *[0 , 5]* tarteko *“c”* puntu batean *f’(c)= 8* bada, zein izango da *f(5)*-en balioa?

9. Aplika ezazu Cauchy-ren teorema *f(x) = x* eta *g(x) = ln x* funtzioei *[1 , e]* tartean.

## L'hôpital

Ikus dezagun nola ebatz daitezkeen deribatuen bidez limiteetan agertzen diren indeterminazioak.

Izan bitez *f* eta *g* bi funtzio deribagarri *a* puntuaren ingurune batean,

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ edo $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ izanik, ondokoa betetzen da:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>1. adibidea</u> $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

Limite hori kalkulatzerakoan $\frac{0}{0}$ lortzen da. Beraz, L'Hôpital-en araua aplikatuko dugu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=e^0=1$$

Lehenengo deribatuarekin ez bada indeterminazioa desegiten, berriro ere L'Hôpital-en araua aplikatzen jarraitu beharko dugu.

<u>2. adibidea</u> $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

$\frac{0}{0}$ lortzen da. L'Hôpital-en araua aplikatuko dugu:

$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$. Berriro L'Hôpital:

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{0}{0}$ . Berriro L'Hôpital:

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$

*Oharrak:*

- Indeterminaziorik ez dagoenean, ez da L'Hôpital-en formularik aplikatu behar.
- Deribatzen den bakoitzean, probatu egin behar da indeterminazioa jarraitzen duen ala ez.

## Gainerako indeterminazioen kalkulua

Gainerako indeterminazioak ere ebatz daitezke arau horren bidez, behin $\frac{0}{0}$ edo $\frac{\infty}{\infty}$ motako indeterminazioa lortu ondoren. Azter ditzagun ondoko hiru kasuak:

- $0.\infty$ indeterminazio kasua. Adibidez $\lim_{x\to 0} x.\ln x$

$0.(-\infty)$ ateratzen da. Adieraz dezagun zatiki eran: $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$ edo $\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ Zein da bietatik egokiena?. Proba ditzagun biak:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{-1/x}{\ln^2 x}} = \lim_{x\to 0}(-x.\ln^2 x)$ . Hasierako limitea baino zailagoa bihurtu zaigu.

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$ Hori da aukera aproposena.

*Oharra:* $0.\infty$ kasuetan logaritmoa baldin badago, hobe logaritmoa zenbakitzailean adieraztea.

- $\infty - \infty$ kasua. Adibidez, $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right)$

$\infty - \infty$ ateratzen da. Kasu honetan parentesi barruko eragiketa egin behar da.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln x} .$$

$\frac{0}{0}$ lortzen denez, $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}(-x) = -1$

- $0^0 , \infty^0$ *eta* $1^\infty$ indeterminazio kasuak. Adibidez, $\lim_{x\to 0} x^{\sin x}$

Jarraitu hiru pausu hauek:

1. Emandako limiteari deitu $A$ ; hau da, $\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = \mathrm{A}$

2. Hartu logaritmo nepertarrak.

   $\ln A = \ln \lim_{x\to 0} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0} \ln x^{\sin x} = \lim_{x\to 0} \sin x(\ln x)$ . Horrela $0.(-\infty)$ indeterminazioa lortu da. Aurki dezagun soluzioa:

$$\ln A = \lim_{x\to 0} \sin x(\ln x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x\cos x} = \frac{0}{0} \ .$$

L'Hôpital apkilatuz, $\lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x\cos x}{\cos x - x\sin x} = \frac{0}{1} = 0$

3. Kalkulatu A: $\ln A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = e^0 = 1$

**Ariketa ebatziak**

- $\lim_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x+1}} = (1+0)^1 = 1$ (Ez dago indeterminaziorik)

- $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (-1)e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + (-1)e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + (-1)(-1)e^{-x}}{\cos x}$$
  $$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

- $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x - \sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) =$$
  $$= \lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{x}}{x} = \frac{2-0}{0} = \infty$$

- $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ Hiru pausuak:

1. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = A$

2. $$\ln A = \lim_{x\to 0} \ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln(\cos x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} =$$
   $$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2\cos x - 2x\sin x} = -\frac{1}{2-0} = -\frac{1}{2}$$

3. $\ln A = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A = e^{-1/2} = \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

# ARIKETAK

1. L'Hôpital-en formula ezin da erabili $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+1}$ kalkulatzeko. Zergatik?

2. Kritika ezazu ondoko limitearen soluzioa:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2+3x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-6x+3}=\lim_{x\to 2}\frac{6x-2}{6x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{6}{6}=1$$

3. Azter ezazu ondoko limitea *A* parametroaren arabera: $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2+A}$

4. Izan bedi $L=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{\sin x+\cos x-A}$.

*L*-ren kalkulua burutzeko *A*-ren zein baliotarako aplika daiteke L'Hôpital-en formula? Arrazona ezazu erantzuna eta bilatu *L* kasu guztietan.

5. L'Hôpital-en erregelak $\frac{0}{0}$ motako indeterminazioaren limiteak aztertzeko balio du. Nola pasatzen da $0.\infty$ motakoetatik aurreko motakoetara?

6. Kalkula itzazu ondoko limiteak:

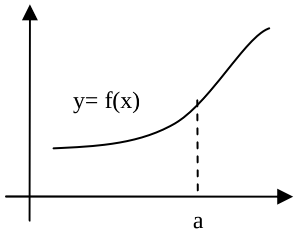
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}\quad;\quad \lim_{x\to 0}(x^3.\ln x)\quad;\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\cot g\,x\right)\quad;\quad \lim_{x\to 1}(x-1).\ln(x-1)$$

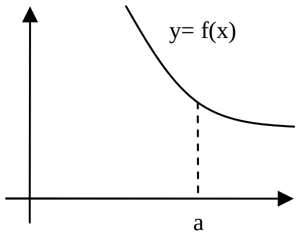
$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}\quad;\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{ax}}\quad;\quad \lim_{x\to 0}x^{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{1}{2-x}}\quad;\quad \lim_{x\to 0}(e^{6x}-x)^{\frac{1}{x}}\quad;\quad \lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{2x}$$

# 4-DERIBATUEN ZENBAIT APLIKAZIO

## Funtzio gorakorrak eta beherakorrak



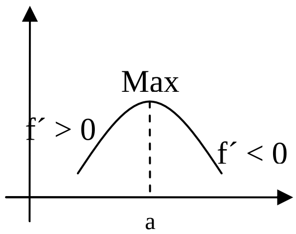

Gorakorra x = a puntuan
f´(a) > 0

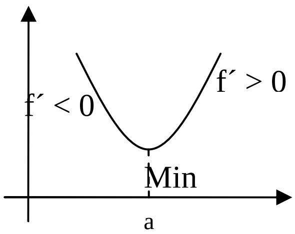
Beherakorra x = a puntuan
f´(a) < 0

**Teoremak:**

- $y = f(x)$ funtzioa **gorakorra** da $x = a$ puntuan baldin **f´(a)>0** bada
- $y = f(x)$ funtzioa **beherakorra** da $x = a$ puntuan baldin **f´(a)<0** bada

## Maximo eta minimo erlatiboak (muturrak)




Maximoa bada “a”ren ezker aldean gorakorra da ($f'>0$) eta eskuin aldean beherakorra ($f'<0$). Beraz, deribagarria denez “a” puntuan, ezker eta eskuin deribatuak berdinak izan behar dira; hau da, $f'(a)=0$

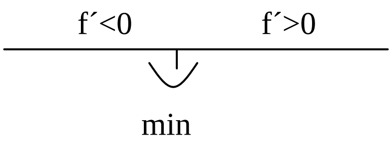
Minimoaren kasuan, “*a*”ren ezker aldean $f'<0$ da eta eskuinean $f'>0$. Beraz, $x=a$ puntuan $f'(a)=0$ izan behar du.

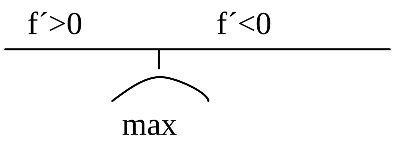
**Beharrezko baldintza.** $x = a$ puntuan, maximo eta minimo erlatiborik badu, derrigorrean **f´(a) = 0** izan behar du,

Baldintza hori **ez da nahikoa**. Gerta daiteke $f'(a)=0$ izatea eta $x=a$ puntuan ez edukitzea ez maximo ez minimorik. Adibidez, $y = x^3$ funtzioak $x=0$ puntuan

**Nahikotasun baldintzak**. *$f'(a)=0$ izanik*, nola ziurtatu $x=a$ puntuan maximo edo minimo erlatiborik duen ala ez?. Bi eratan egin daiteke:

I) $f'(a)=0$ noski. Gainera, “a”ren alboetan deribatua zeinuz aldatzen bada, maximoa edo minimoa izango du;




Alboetako deribatuen zeinuak berdinak badira, ez du maximo ez minimorik

II) $f'(a) = 0$ izanik, baldin:

- $f''(a)>0$ bada, minimo erlatiboa du x=a puntuan
- $f''(a)<0$ bada, maximo erlatiboa du x=a puntuan

Eta zer gertatzen da $f'(a)=0$ eta $f''(a)=0$ badira? Jarraitu ondoko teorema:

Izan bedi $f'(a) = f''(a) = f'''(a) =....= f^{n-1}(a) =0$ eta $f^{n}(a) \neq 0$ . Zera betetzen da:

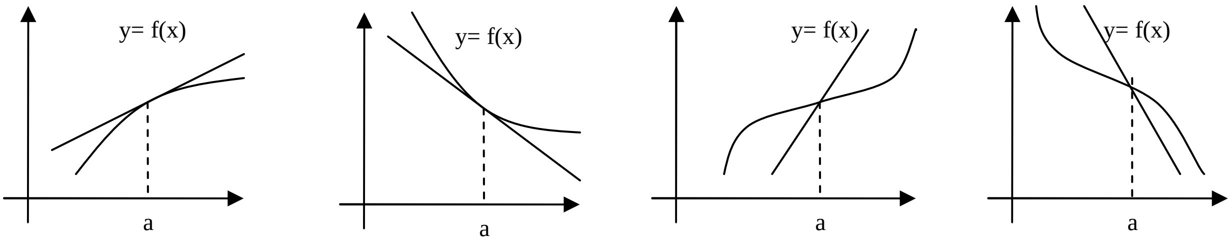
- *n* bikoitia bada, maximoa edo minimoa du: $f^{n}(a)>0$ bada, minimoa
  : $f^{n}(a)<0$ bada, maximoa
- *n* bakoitia bada, ez du maximo ez minimorik. Inflesioa du x=a puntuan

Ariketa. Azter itzazu funtzio hauen monotonia (gorapena eta beherapena) eta mutur erlatiboak (maximo-minimoak).

a) $y = x^2 - 2x + 1$ ; b) $y = x^3 - x$

c) $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ ; d) $y = x^5$

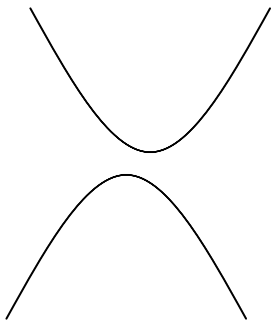
## Ahur eta ganbiltasuna. Inflesio-puntuak




Ganbila Ahurra

Inflexio-puntua Inflex-punt.

- *x = a* puntuan **ahurra** edo **konkaboa** dela diogu, baldin “*a*”-ren ingurunean f(x) funtzioaren balioa zuzen ukitzailearena baino handiagoa denean; hots, kurba zuzenaren goitik doanean
- **Ganbila** edo **konbexua** da baldin *f(x)*-aren balioa zuzen ukitzailearena baino txikiagoa denean; hots, kurba zuzenaren azpitik doanean
- Alde batean handiagoa eta bestean txikiagoa (edo alderantziz) denean, inflesio-puntua du *x=a* denean



-Kurba zati hori **konkaboa**(**ahurra**) da goitik ikusita. Zuzen ukitzaileen maldak A, B, C...F puntuetan gero eta handiagoak dira (A-n negatiboa, B-n ez da hain negatiboa, D-n positiboa da...). Beraz, *f´(x)* funtzioa gorakorra da. *f’* gorakorra bada, *f’*-ren deribatua (*f’’*) positiboa da.
Beraz, **f(x) konkaboa $\Rightarrow$ f’ gorakorra $\Rightarrow$ f´´(a)>0**

- Kurba zati hori **konkexua (ganbila)** da.
Zuzen ukitzaileen maldak gero eta txikiagoak dira. Beraz, deribatu funtzioa, *f´(x)*, funtzio beherakorra da.
**f(x) konkexua $\Rightarrow$ f’ beherakorra $\Rightarrow$ f´´(a)<0**

**<u>Beharrezko baldintza</u>: x = a puntua inflesioa baldin badu, derrigorrean f´´(a)=0 izan behar du**. Baldintza hori <u>ez da nahikoa</u>. Lehen gertatutakoaren arazo bera daukagu.

**<u>Inflesio puntuaren nahikotasun baldintzak</u>**. *f´´(a)=0* izanik, nola ziurtatu *x=a* puntuan inflesiorik duen ala ez?. Bi eratara egin daiteke:

I) *f´´(a)=0* noski. Gainera, "*a*"ren alboetan deribatua zeinuz aldatzen bada, badu maximoa edo minimoa;

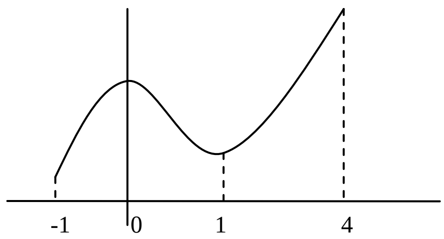
| f´´<0 | f´´>0 | | f´´>0 | f´´<0 |
|---|---|---|---|---|
| "*a*" | | | "*a*" | |
| *Inf-puntua* | | | *Inf-puntua* | |

Alboetako bigarren deribatuen zeinuak berdinak badira, ez du inflesio-punturik

II) f´´(a) = 0 izanik, baldin f´´´(a) $\neq$ 0 bada, inflesioa du x=a puntuan
Eta zer gertatzen da f´´(a)=0 eta f´´´(a)=0 badira? Jarraitu ondoko teorema:
Izan bedi $f''(a) = f'''(a) = .... = f^{n-1}(a) = 0$ eta $f^n(a) \neq 0$ . Zera betetzen da:
- *n* bakoitia bada, inflesio-puntua du x=a denean
- *n* bikoitia bada, ez du inflesio-punturik.

**<u>Oharrak</u>**

- Funtzio batek, infinitu maximo edo minimo erlatibo eduki ditzake. Adibidez, y= sinx.
- <u>Mutur erlatibo</u> edo <u>lokala</u> dela diogu, x = a puntuan, inguruneko puntuetan baino balio handiagoa (max) edo txikiagoa (min) hartzen duelako.
- Definizio-eremuan edo tarte baten hartzen duen balio handienari "maximo absolutua" deitzen diogu eta txikienari "minimo absolutua" (Gogoratu Weierstrass-en teorema)




Maximo absolutua: x = 4 puntuan
Minimo absolutua: x = -1 puntuan

Maximo erlatiboa: x = o puntuan
Minimo erlatiboa: x = 1 puntuan

- Gerta daiteke mutur erlatiboak eta absolutuak berdinak izatea.
  Adibidez: y = sinx, y = cosx, …

## ARIKETAK

**1-** Kirolari batek hiru orduko atletismo jokoetan kontzentratzeko duen gaitasuna honako funtzio honek ematen du: $f(t) = 300t(3-t)$, “t” orduak izanik:

a) Kalkulatu zein bitartean gehitzen den kontzentrazio gaitasuna eta zein bitartean gutxitzen den. Noiz da nulua?

b) Kontzentrazioa, noiz da maximoa?

**2-** Aurkitu $y = x^3 - x^2$ funtzioaren ahur eta ganbil tarteak eta inflexio-puntuak. Aurki itzazu ere gorapen eta beherapen tarteak eta mutur erlatiboak. Ondoren egizu adierazpen grafikoa.

**3-** Aztertu funtzio hauen gorapena eta beherapena, mutur erlatiboak, ahur eta ganbiltasuna eta inflesio-puntuak. Egizu adierazpen grafikoak

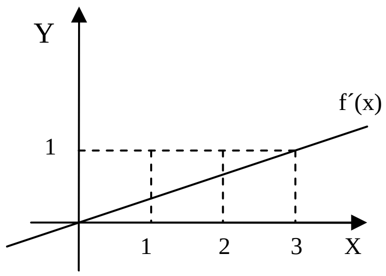
a) $y = x^3-3x^2-9x+5$ ; b) $y = \dfrac{2-x}{x+1}$

**4-** Aurki ezazu “a”-ren balioa $y = x^2 - 3x + a$ funtzioak bere minimo puntuan 3/2 balio dezan.

**5-** Aurki itzazu *a* eta *b*, $y = ax^3 - 3x + b$ funtzioak inflexio-puntu bat izan dezan (-1,-3) puntuan.

**6-** $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ kurbak abzisa ardatza ebakitzen du $x =-1$ puntuan eta inflexio-puntua du *(2,1)*-ean. Kalkulatu *a, b, c* eta idatzi funtzioa.

**7-** Ondoko grafikoa f funtzio baten f´ funtzio deribatuarena da.



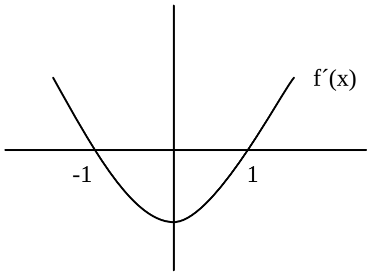

a) Aurkitu f funtzioaren gorapen eta beherapen tarteak.

b) Determina itzazu mutur erlatiboak

c) Esan zeintzuk diren tarte ahur eta ganbilak

d) Kalkulatu inflexio-puntuak

**8-** Ondoko grafikoa, f(x) funtzioaren deribatuarena da; hau da, f´(x)-ena.




Aurki itzazu:

a) f-ren gorapen eta beherapen tarteak

b) f-ren mutur erlatiboak

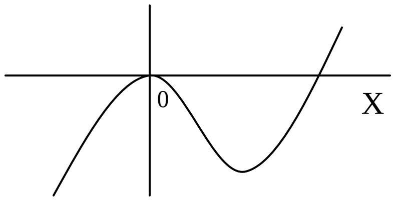
c) Tarte azur eta ganbilak

d) Inflexio-puntuak

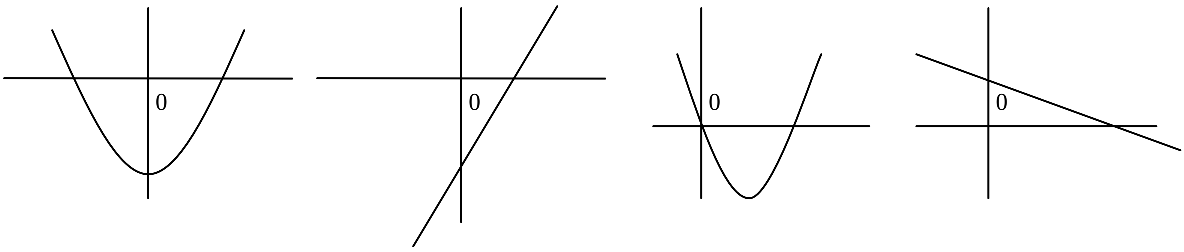
**9-** Aurkitu $y = x^4 - 8x^2$ funtzioaren maximo, minimo erlatiboak eta inflexio-puntuak.

**10-** Aurkitu $f(x) = x^2 + |x - 2|$ funtzioaren mutur erlatiboak.

**11-** Ondokoa, f funtzioaren grafikoa da:




Gainontzeko beste lau grafikoen artean f´ bere deribatuarena eta f´´(x) bere bigarren deribatuarena daude. Gelditzen diren beste bi grafikoek ez dute zerikusirik aurrekoekin. Grafikoak tarte berean irudikatuta daudela jakinik, lau grafiko horien artean, zeintzuk dira f´ eta f´´-ri dagozkienak? Arrazonatu.



# Optimizazio problemak

Zientzia, ekonomia, politika eta abarreko arlo askotan, eta hainbat matematika problematan, funtzioak optimizatzea, hau da, haien maximo eta minimoak aurkitzea, interesatzen zaigu. Hori gertatzen da, adibidez, baldintza jakin batzuen pean lantegi baten produkzio kostua minimizatu nahi badugu, edo lursail batean barazkien produkzioa maximizatu nahi badugu hezetasun eta tenperatura baldintza jakin batzuetan.

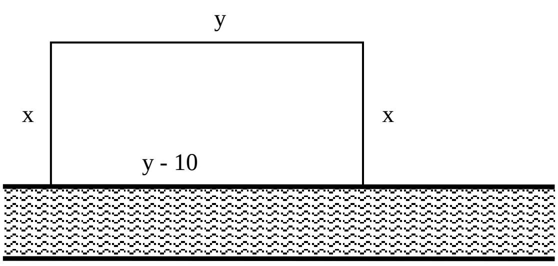
Horrelako problemak ebazteko, honakoak egin beharko ditugu:

- Optimizatu beharreko funtzioa atera.
- Funtzio horrek bi aldagai edo gehiago badauzka, ekuazio lagungarriak aurkitu, aldagai bakar baten bidez adierazi ahal izan dezagun.
- Funtzioaren maximo edo minimo erlatiboak aurkitu.
- Emaitzak interpretatu, nolako problema den kontuan izanik zentzurik ez dutenak baztertuz.

Adibidea:

Lursail handi bat daukagu errepide baten ondoan, eta haren azalerako 10.000 metro karratuko zati errektangeluar bati hesia jarri nahi diogu kanping bat egiteko. Hesiak kanping osoa inguratuko luke errepide ondoko hamar metro izan ezik, bertan sarrera jarriko dugu eta.

Hesi kantitate txikiena erabilita kanpinga nola jarri behar dugun aurkitu nahi badugu, optimizazio problema baten aurrean gaude.




Alboko irudiari begiratuta, honako funtzioa optimizatu bahar yugula ikusiko dugu:

f(x, y) = 2x + 2y - 10

Bi aldagaiko funtzioa denez, ekuazio lagungarri bat aurkitu beharko dugu. Kasu honetan, badakigu kanpingaren azalera 10.000 $m^2$-koa dela; beraz:

$$x \cdot y = 10.000 \Leftrightarrow y = \frac{10.000}{x}$$

Y ordezkatuz f(x, y)-n, hona zer dugun: $f(x) = 2x + \frac{20.000}{x} - 10$

Aurki ditzagun funtzio horren minimo erlatiboak:

$$f'(x) = 2 - \frac{20.000}{x^2} = \frac{2x^2 - 20.000}{x^2};\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 100 \text{ edo } x = -100$$

$$f''(x) = \frac{40.000}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(100) = 0{,}04 > 0 \Rightarrow x = 100 & \text{minimo erlatibo bat da} \\ f''(-100) = -0{,}04 < 0 \Rightarrow x = -100 & \text{maximo erlatibo bat da} \end{cases}$$

Hesiaren luzera minimizatu nahi dugunez, funtzioaren balioa minimoa baino ez dugu izango kontutan: x = 100. balio hori funtzioan ordezkatuz, y = 100 aterako zaigu; beraz, hona planteaturiko problemaren ebazpena: 100 metroko aldeko eremu karratu bat egingo dugu eta 390 metro hesi erabiliko.

## Ariketak (Optimizazioa)

**1-** Aurkitu bi zenbaki, euren batura 20 ematen dutenak, jakinik beraien alderantzizkoen batura minimoa dela.

**2-** Deskonposa ezazu bi batugaitan 28 zenbakia, haien biderkadura maximoa izan dadin.

**3-** 12 cm-ko perimetroa duen laukizuzen guztien artean, zeinek du diagonalik txikiena?

**4-** 30 cm-ko perimetroa duten triangelu isoszele guztien artean, zeinek du azalera maximoa?

**5-** Bi zenbakiren arteko batura 24 da, zenbaki baten kuboa bider bestea maximoa izanik. Kalkulatu zenbakiak.

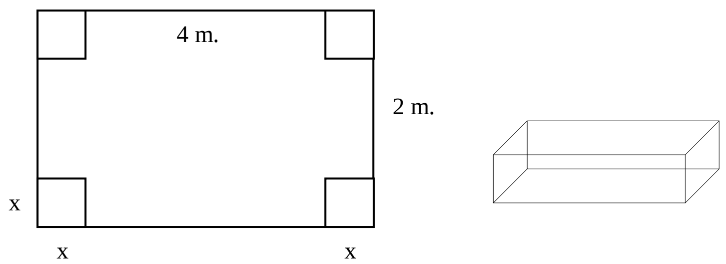
**6-** 100m.-ko soka batekin, osatu azalera maximodun zelai laukizuzena.

**7-** 100 $zm^3$-ko bolumena duten zilindro guztietatik, bilatu azalera maximoduna.

**8-** 2 m.-ko erradioa duen zirkulu batetan, inskriba ezazu azalera maximodun laukizuzena.

**9-** Bi metroko soka bat bi zatitan banatzen da, zati batekin karratu bat eta bestearekin zirkunferentzia irudikatzen ditugularik. Kalkulatu zati bakoitzaren luzera, bi irudien azaleren batura minimoa izan dadin.

**10-** 2m. eta 4m.-ko aldeak dituen lamina bati, lau ertzetan karratu bana ebakitzen diogu.




Lor daitekeen bolumen maximoko kutxa irekiaren dimentsioak kalkulatu

# ARIKETAK

(Deribatuen aplikazioak)

**1-** Egon al daiteke bere puntu guztietan deribagarria den funtzioa, $x = 1$ puntuan minimo bat daukana eta $f´(1) = 3$ egiaztatzen duena?. Arrazona ezazu erantzuna.

**2-** Gerta al daiteke funtzio baten deribatua puntu batetan zero izatea eta puntu horretan aipaturiko funtzioak ez maximorik ez minimorik ez edukitzea?. Arrazona ezazu erantzuna laburki.

**3-** Zer esan nahi du $f(x)$ funtzio deribagarri batek $x = a$ delakoan inflexio-puntu bat edukitzeak?

**4-** Parabola baten grafikoak, badu inflexio-punturik? Arrazona ezazu.

**5-** Zenbat inflexio-puntu eduki ditzake gehienez hirugarren mailako funtzio polinomiko batek? Arrazona ezazu.

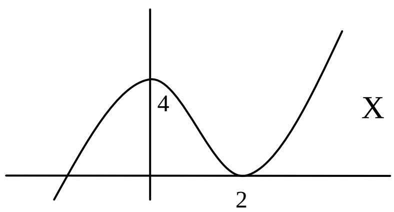
**6-** Aurkitu ondoko funtzioen mutur erlatiboak (max-minimoak) eta inflexio-puntuak:

a) $y = -x^4$ b) $y = xe^{-x}$ c) $y = x\ln x$

d) $y = (x-2)^3(x-1)$ e) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

**7-** $y = x^3 - ax^2 - 4x + b$ funtzioa anulatu egiten da $x = 3$ abzisa puntuan eta inflexioa du $x = 2/3$ denean. Bila itzazu “a”, “b”, maximo eta minimoak.

**8-** Grafikoan adierazten den funtzioa, hirugarren mailako polinomioa da. Ikusten denez, (0, 4) puntuan maximoa eta (2, 0) puntuan minimoa du. Zein funtzio da?




**9-** $y = \dfrac{ax}{x^2+b}$ funtzioak $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$ puntuan minimoa du. Aurkitu “a” eta “b” eta gorakor eta beherakor tarteak.

**10-** Hirugarren mailako funtzioa polinomiko batek, mutur erlatibo bat dauka (0, 2) puntuan eta (1, 1) puntutik pasatzen zaion zuzen ukitzailea $y = -x + 2$ da. Aurkitu funtzioa.

# Funtzioen adierazpen grafikoak

Funtzioak, zailtasunak dituenean edo azterketa sakon behar duenean, komeni da aurreko gaietan ikusi ditugun baliabide guztiak erabiltzea. Horretarako, informazio eta teknika ugari ditugu eskura.

- **Funtzioa zein eremutan aztertu behar den**
  - Izate eremua. Jarraitua da? Deribagarria?
  - Periodikotasuna
  - Simetriak
- **Asintotak**
- **Deribatuak**
  - Gorapena eta beherapena
  - Puntu kritikoak edo singularrak: maximo eta minimo erlatiboak
  - Ahur eta ganbiltasuna. Inflexio-puntuak
- **Puntu osagarriak lortu**
  - Ardatzekin ebaki-puntuak
  - Kurba irudikatzeko balio duten beste puntu batzuk

Oharra. Sarritan, ez dira behar izango tresna guzti horiek grafiko bat irudikatzeko. Gehienetan, begirada batekin kurbaren itxura jakin ahal da eta elementu gutxirekin grafikoa egin. Hala ere, behar den kasurako, nola erabiltzen diren jakitea ona da.

### Izate-eremua

Zein "x"-entzat dago definituta f(x) funtzioa? Gogora dezagun:

- Funtzio polinomikoak, $e^{3-x}$, sinx, cosx, $5^{2x}$, $\sqrt[n]{x}$ (n, bakoitia),....I.e. = $\Re$
- $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ zatikietan , I.e. = $\Re$ - {x / g(x) = 0}. Adib.

$$y=\frac{x}{x^2-4};\quad \text{I.e.} = \Re - \{\pm 2\}$$

$$y=\frac{x}{x^2+4};\quad x^2+4 \neq 0 \rightarrow \text{I.e.} = \Re$$

- **tgx eta secx** ez daude definituta 90º, 270º,... angeluetan
- $y=\sqrt{f(x)}$ I.e. = {x / f(x) $\geq 0$ } Adib.

$$y=\sqrt{4-x} \qquad I.e.=\{x\leq 4\}$$

$$y=\sqrt{x^2-2x-3} \qquad I.e.=(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$$

$$y=\sqrt{3+2x-x^2} \qquad I.e.=[1,3]$$

$$y=\sqrt{x^2+4} \qquad I.e.=\Re$$

- **arcsinx eta arccosx.** I.e.= [-1, 1]
- Ez dago "0" eta zenbaki negatiboen logaritmorik. Beraz,

$$y=\ln(x+2) \qquad I.e.=(-2,\infty)$$

$$y=\ln(x^2-5) \qquad I.e.=(-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},\infty)$$

Ariketa. Kalkulatu hurrengo funtzioen izate-eremuak:

$$y=\frac{2x}{\sqrt{9-x^2}} \qquad y=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & x\geq 0\\ \ln(1-x) & x<0\end{cases}$$

## Funtzio konposaketaren izate-eremua

F(x) funtzioaren definizio-eremua I = [1, 9] tartea dela dakigu.
Aurkitu, modu arrazoituan, ondoko funtzioen definizio-eremuak.

$$G(t) = F\left(\frac{1-3t}{2}\right); \quad H(t) = F(t^2); \quad J(t) = F(|2t-1|)$$

EBAZPENA

F(x)-en definizio-eremua jakinda, G(t), H(t) eta J(t) funtzioen definizio-eremua aurkitzea zera da:

x = f(t) erako aldaketa eginez sortzen diren funtzio berrien definizio-eremuak aurkitzea. x aldagaiaren irudi-multzoa ezagutzen dugu eta t aldagaiaren aurre-irudiak atera behar ditugu.

Kalkulu hauek egiteko x aldagaiaren definizio-eremuaren ertzetan planteatuko ditugu ekuazioak.

G(t)-ren definizio-eremua

$$x = \frac{1-3t}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1 = \dfrac{1-3t}{2} \rightarrow t = \dfrac{-1}{3} \\ 9 = \dfrac{1-3t}{2} \rightarrow t = \dfrac{-17}{3} \end{cases}$$

Hau da, $\left[\frac{-17}{3}, \frac{-1}{3}\right] \rightarrow [1,9]$

**G(t)-ren definizio-eremua $\left[\frac{-17}{3}, \frac{-1}{3}\right]$ da**

H(t)-ren definizio-eremua

$$x = t^2 \quad \rightarrow \begin{cases} 1 = t^2 \rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \end{cases} \\ 9 = t^2 \rightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 3 \end{cases} \end{cases}$$

Hau da, $[-3, -1] \cup [1, 3] \rightarrow [1, 9]$

**H(t)-ren definizio-eremua $[-3, -1] \cup [1, 3]$ da**

J(t)-ren definizio-eremua

$$x = |2t-1| \rightarrow \begin{cases} x = 2t-1 \rightarrow \begin{cases} 1 = 2t-1 \rightarrow t = 1 \\ 9 = 2t-1 \rightarrow t = 5 \end{cases} \\ x = 1-2t \rightarrow \begin{cases} 1 = 1-2t \rightarrow t = 0 \\ 9 = 1-2t \rightarrow t = -4 \end{cases} \end{cases}$$

Hau da, $[-4, 0] \cup [1, 5] \rightarrow [1, 9]$

**J(t)-ren definizio-eremua $[-4, 0] \cup [1, 5]$ da**

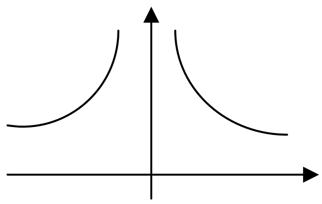
**Koordenatuekin ebaki-puntuak**

OX ardatzarekin. Egin y = 0 eta ebatzi ekuazioa.

OY ardatzarekin. Egin x = 0 eta ebatzi ekuazioa.

**Simetriak**

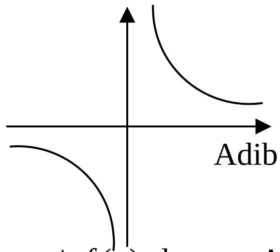
a) OY ardatzarekiko



f(-x) = f(x)

Adib., $y = x^4$ ; y = cos x; $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

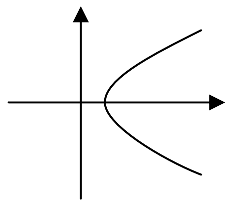
b) O jatorri-puntuarekiko



f(-x) = -f(x)

Adib., $y = \dfrac{1}{x}$; y = sinx, $y = x^3$

c) OX ardatzarekiko: $y = \pm f(x)$ denean. Adib., $y = \pm\sqrt{x-1}$



**Periodikotasuna**

f(x) = f(x + p) = f(x + 2p) =... Periodoa = p. Adibidez:

y = sinx, zeren sinx = sin(x + 360º). Periodoa = 360º edo $2\pi$

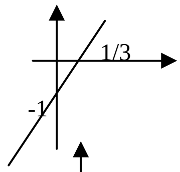
y = tgx, zeren tgx = tg (x + $\pi$). Periodoa: $\pi$ edo 180º.

Sarritan, lan guzti hori (simetriak, asintotak, gorakor - beherakor tarteak, inflexio-puntuak, ahur tarteak,e.a.) ez da beharrezkoa. begirada batekin kurbaren itxura jakin ahal da eta elementu gutxirekin kurba gehienak adieraz daitezke.

**Egin dezagun funtzioen errepaso labur bat:**

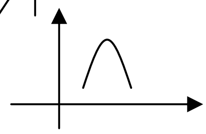
- $y = 3x - 1$ -Zuzen bat da.

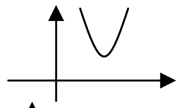
  -Ardatzekin ebaki puntuak: (0, -1) eta (1/3, 0)




- $y = ax^2 + bx + c$. -Parabola bat da.

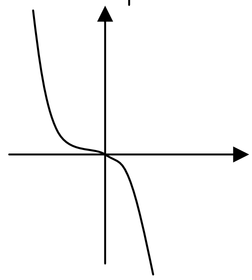
  a < 0 denean, maximoa du.
  a > 0 denean, minimoa
  - Aurkitu ardatzekin ebaki-puntuak



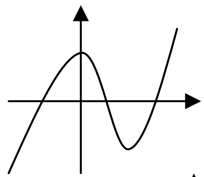


- $y = -x^3$ -(0, 0) puntutik pasatzen da.

  - Simetrikoa O-rekiko.
  - Beherakorra da.

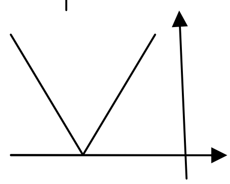


$y = x^3 - 3x^2 + 2$
- Ardatzekin ebaki puntuak
- Maximo bat eta minimo bat ditu
- Inflexio puntu bat du



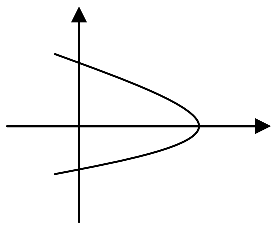
- $y = |x + 4|$ - Jarraitua da $\Re$ guztian

  - Ez da deribagarria x = -4 puntuan

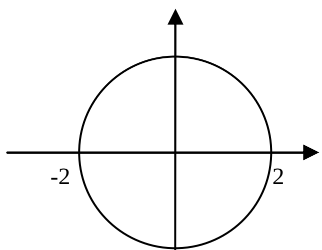


- **y =** $\pm\sqrt{4-x}$ - Izate-eremua: I.e. = $\{x / x \leq 4\}$

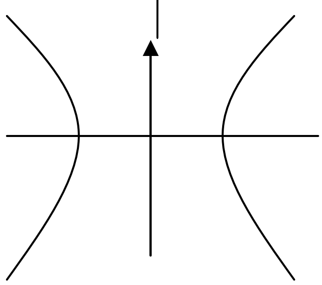
  - Ardatzekin ebaki puntuak
  - Simetrikoa OX-ekiko



$x^2 + y^2 = 4$ edo $y = \pm\sqrt{4-x^2}$
- Zirkunferentzia da
- I.e. = [-2, 2]
- Ardatzekin ebaki puntuak
- Simetriak OY, OX eta O-rekiko.

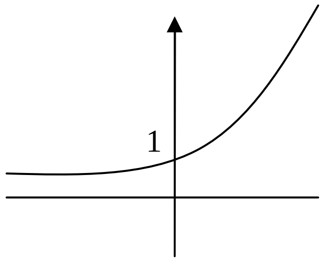



$x^2 - y^2 = 4$ edo $y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$
- Hiperbola bat da
- I = $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
- Ardatzekin ebaki-puntuak
- Simetriak OY, OX eta O-rekiko



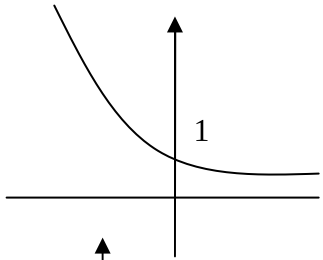
♦ $y = e^x$ - Izate-eremua = $\Re$

- (0, 1) puntutik doa
- Asintota horizontala OX ardatza, $-\infty$ aldean



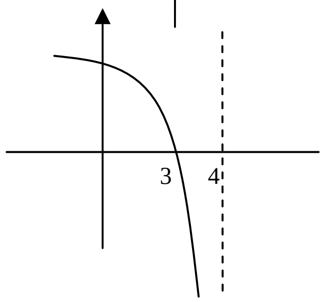

$y = e^{-x}$ - Izate-eremua = $\Re$

- (0, 1) puntutik doa
- Asintota horizontala OX ardatza, $\infty$ aldean



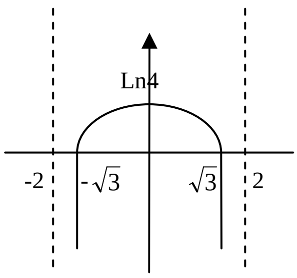

♦ $y = \ln(4-x)$ -I.e. = $\{x \,/\, x<4\}$

- Asintota bertikala: $x = 4$ zuzena
- (3, 0) puntutik doa, zeren $\ln 1 = 0$ baita



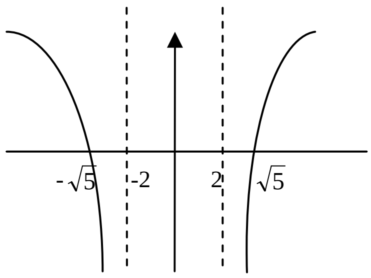

$y = \ln(4 - x^2)$ -I.e. = (-2, 2)

- Maximo bat
- Ardatzekin ebaki puntuak:
  $x = 0$ ; $y = \ln 4$
  $y = 0$ ; $x = \pm\sqrt{3}$
- Bi asintota bertikalak:
  $x = 2$ eta
  $x = -2$ zuzenak




$y = \ln(x^2 - 4)$ - I.e. = $(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

- OX ardatzarekin ebaki puntuak
  $x = \pm\sqrt{5}$
- Bi asintota bertikalak:
  $x = 2$ eta
  $x = -2$ zuzenak



Hala ere, funtzioak zailtasun handiak dituenean edo konkretuki azterketa sakon bat egitea eskatzen denean, erabili atal honen hasieran ikusitako puntu guztiak.

Adibideak:

1- Irudikatu $y = \dfrac{2x+1}{x}$ funtzioa.

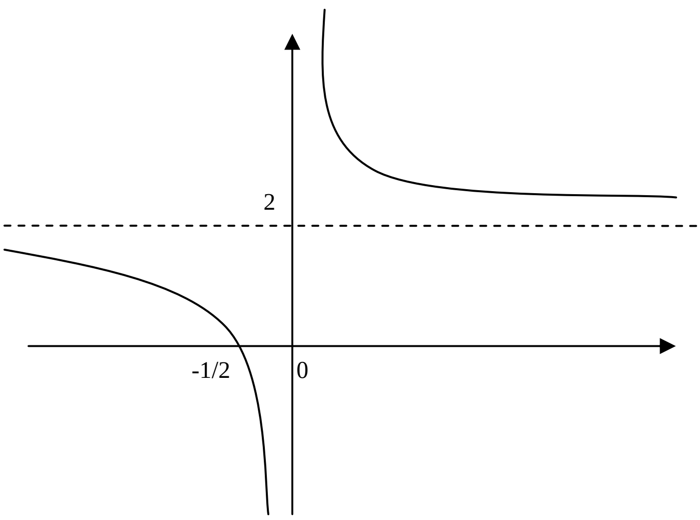
- I.E. = $\Re - \{0\}$
- Etena x = 0 puntuan: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty \end{cases}$
- Ardatzekin ebaki-puntuak: $\begin{cases} x = 0; \qquad \textit{ezinezkoa} \\ y = 0; \quad x = -1/2, \quad P(\dfrac{-1}{2},0) \end{cases}$
- Ez du simetriarik
- Asintotak. Bertikala: x = 0 zuzena

  Horizontala: y = 2 zuzena
- Maximo-minimoak: $y' = \dfrac{-1}{x^2} \neq 0 \Rightarrow$ Ez du max-min.

  Beherakorra "I.e." guztian.
- Inflexio-puntuak: $y'' = \dfrac{2}{x^3} \neq 0 \Rightarrow$ Ez du inflexio-punturik

  x > 0 denean, $y'' > 0$ , f(x) ahurra

  x < 0 denean, $y'' < 0$ , f(x) ganbila
- Balio-taula



2- Irudikatu $y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$ funtzioa.

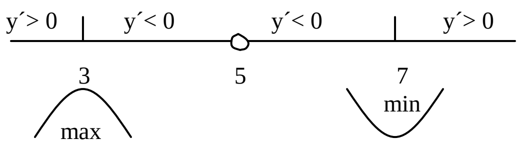
- I.e. = $\Re - \{5\}$
- Asintotak: Bertikala: x = 5 zuzena (Funtzioak ezin dira sinplifikatu)

  Zehiarra: y = x zuzena
- Ardatzekin ebaki-

  puntuak: $\begin{cases} x = 0 \longrightarrow\longrightarrow y = \dfrac{-4}{5}; \quad P(0, \dfrac{-4}{5}) \\ y = 0 \longrightarrow\longrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0; \quad x_1 = 4; x_2 = 1 \quad Beraz, P_1(4,0); P_2(1,0) \end{cases}$
- Gorakor-beherakor tarteak.Maximo-minimoak.

  $y' = \dfrac{x^2 - 10x + 21}{(x-5)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 10x + 21 = 0;$

  $x_1 = 7$ eta $x_2 = 3$. Max edo minimo posibleak

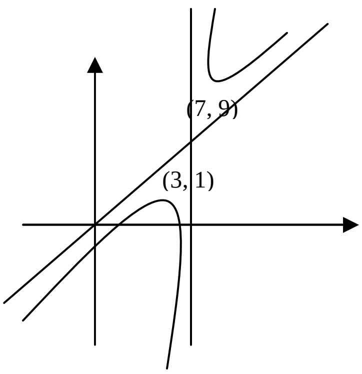



Gorakorra: $(-\infty, 3) \cup (7, \infty)$

Beherakorra: $(3,7) - \{5\}$

Maximoa: x = 3; y = 1; M(3, 1)

Minimoa: x = 7; y = 9; N(7, 9)




**Ariketak**

Adierazi grafikoki ondoko funtzioak:

1) $y = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$ 2) y = lnx – x 3) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ 4) $y = x \cdot e^{-x}$

5) $y = x^2 + |x - 2|$ 6) $y = \begin{cases} \sqrt{x}; & x \geq 0 \\ \dfrac{1}{x}; & x < 0 \end{cases}$ 7) $y = (x-1)^4$ 8) y = -x|x-1|

9) $y = \dfrac{1}{x^2}$ 10) $y = \dfrac{1}{(x-3)(x+1)}$ 11) $y = x^4 + 1$ 12) $y = x^3 - 3x$

## GALDERAK

1- Noiz esaten da f(x) funtzioak x = 1 delakorako asintota bertikal bat duela?

2- Ikasle batek, f(x) funtzioak, gehienez bi asintota bertikal eduki ditzakeela dio. Egia al da?

3- "f" funtzioa "a" puntuan jarraitua izan dadin, aldeetako limiteak egoteaz gain, zeintzuk dira eskatu beharreko baldintzak?

4- Egia al da, funtzio bat puntu batean jarraitua bada, orduan puntu horretan deribagarria dela? Arrazona ezazu erantzuna.

5- Funtzio bat bere puntu guztietan deribagarria bada eta bere deribatua positiboa bada, egia al da funtzioa puntu guztietan positiboa dela? Justifika ezazu erantzuna.

6- Eman dezagun $y = x^4 - 2x^2$ funtzioa. Aplikatu ondoko teoremak aipatzen diren tarteetan eta adierazi esanahia:

a) Bolzanoren teorema, [1, 2] tartean.

b) Bitarteko balioen teorema. Funtzioak, har dezake -0,3 balioa, $x \in [-1, 0]$ denean?

c) Akotazio teorema. Bornatua al dago [-1, 2] tartean?

d) Weierstrass-en teorema. Zein da maximoa eta zein minimoa [-1, 2] tartean?

e) Rolle, [-1, 2] tartean.

f) Gehikuntza finituen edo Lagrange-ren teorema [0, 1] tartean.

Egizu funtzioaren grafikoa eta konprobatu teorema guzti horiek betetzen direla.

7- Funtzio bat zenbaki erreal guztietan jarraitua bada eta ondoko desberdintzak egiaztatzen baditu: $f(x) < -3$, $x < -10$ denean eta $f(x) > x^2+1$, $x > 5$ denean, ziurta al daiteke $f(a) = 0$ beteko duen puntu bat gutxienez dagoela? Zergatik?

8- $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - 1}$ funtzioa, deribagarria al da x = 0 puntuan?

9- Kalkulatu $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$ funtzioaren izate-eremua.

10- F(x) funtzioaren izate-eremua [-1, 3] da. Aurkitu ondokoen izate-eremuak:

a) $G(t) = F\left(\dfrac{1-t}{2}\right)$ b) $H(t) = F(t^2 - 1)$ c) $I(t) = F(|t - 1|)$

11- Demagun $g(x) = f(2x)$ funtzioa eta $f'(0) = 3$ dela. Zenbat da $g'(0)$?

12- Demagun "f" eta "g" funtzio deribagarriak direla eta $g(3) = 0$, $f'(0) = -2$ eta $(f[g(3)])' = 8$. Zenbat da $g'(3)$?

13- Demagun f funtzioa deribagarria puntu guztietan eta *f(1) = 1* eta *f ' (1) = 2*. Izan bedi ondoko funtzioa: $h(x) = 3x^2\ f(x) + (f(x))^2 + \sqrt{f(x)} + 2$. Kalkulatu *h'(1)*

14- Demagun f funtzioa puntu guztietan deribagarria eta *f(0) = 1, f ‘ (0) = 2* eta *f ‘’ (0) =-1.* Izan bedi $g(x)=2e^{f(x)}$ funtzioa. Kalkulatu *g’’(0)*

15- $f(x) = Ax^2 + Bx$ funtzioa gorakorra da $(-\infty, 1]$ tartean eta beherakorra $[1, \infty)$ tartean. Gainera, badakigu x = 1 puntuan hartzen duen balioa L dela, L honako limite hau delarik: $L = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Kalkula itzazu arrazonatuki A eta B-ren balioak.

16- Azter ezazu ondoko limitea “a” parametroaren arabera: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x^2}$

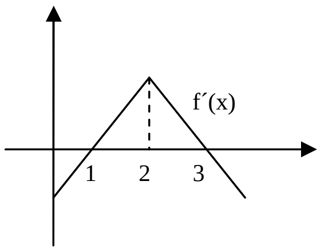
17- Aurkitu $y=\frac{4x^2+a}{x-1}$ funtzioaren asintota zehiarrak *a* parametroaren arabera.

18- Demagun *f* funtzio deribagarria dela puntu guztietan, bere deribatuak $f`(x) \geq 1$ edozein x-en baliorako betetzen duela eta f(0) = 3 dela. Froga ezazu $f(22) \geq 25$ dela.

19- Aurki itzazu $y = \ln(1 - x^2)$ funtzioaren izate-eremua, gorakor eta beherakor tarteak eta ahurtasun tarteak.

20- $f(x) = 1 - (2 - x)^5$ funtzioa emanik, egiaztatu $f´(2) = 0$, $f´´(2) = 0$ eta $f´´´(2) = 0$ direla. f(x) funtzioak ba al du maximo, minimo edo inflexio-punturik x = 2 puntuan?

21- Grafiko hau f funtzioarena da.




Aurki itzazu:

a) f-ren gorapen eta beherapen tarteak
b) f-ren mutur erlatiboak
c) Ahur eta ganbil tarteak
d) Inflexio-puntuak

## ARIKETAK

1- Eman dezagun f(x) = ln(1 + $x^2$) funtzioa. Aurkitu:
a) Izate-eremua.
b) Jarraitutasuna eta deribagarritasuna.
c) x = 2 puntutik pasatzen den zuzen ukitzailearen ekuazioa.
d) Zein puntutan bere zuzen ukitzailea da y = x zuzenarekiko paraleloa? Aurkitu zuzen hori.

2- Bila itzazu $x^2 + y^2 = 25$ zirkunferentzia-erdiaren zuzen ukitzaileen ekuazioak x = 0 eta x = 5 puntuetan.

3- Aurki itzazu $y = x^2 + 1$ kurbaren zuzen ukitzailea eta ukitze-puntua, ukitzailea kurbatik kanpo dagoen P(0, 0) puntutik pasa dadin.

4- Eman dezagun f(x) = $\begin{cases} 2x & x < 0 \\ \sin(px) & x \geq 0 \end{cases}$ funtzioa.

a) Egiazta ezazu jarraitua dela, “p” parametroak edozein balio duelarik.

b) Aurki ezazu “p”, funtzioa deribagarria izan dadin bere izate-eremuan.

5- Azal ezazu arrazonatuki zein puntutan ez da deribagarria y = |x – 1| + |x + 2| funtzioa.

6- Aztertu y = $\begin{cases} |x-1| & x < 1 \\ |2x-1| - 1 & x \geq 1 \end{cases}$ funtzioaren deribagarritasuna

7- Aurkitu “a” eta “b” parametroak ondoko funtzioa deribagarria izan dadin $\Re$ multzoan.

$$y = \begin{cases} \cos x & x \leq 0 \\ a + bx & x > 0 \end{cases}$$

8- Enuntziatu Rolle-ren teorema. Kalkulatu *p*, *m* eta *n*-ren balioak, ondoko funtzioak Rolle-ren teoremaren hipotesiak bete ditzan: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & ; \quad -1 \leq x \leq 3 \\ mx + n & ; \quad 3 < x \leq 5 \end{cases}$

9- Enuntziatu Batezbesteko Balioaren teorema. Erabili torema ondoko bi kasuetan:

a) y = $\sqrt{x}$ funtzioan [1, 9] tartean. Azaldu geometrikoki bere esanahia.

b) $y = e^{3x}$ funtzioan $I_n$ = [n , n+1] tartean, n zenbaki arrunta izanik.

10- Egiazta ezazu ondorengo funtzioak, Batezbesteko Balioaren teoremaren baldintzak betetzen dituen ala ez eta aurkitu teoremak iragartzen dituen puntuak:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x & [1,2] \\ x^2 + 7x - 4 & (2,3] \end{cases}$$

11- Kalkulatu ondorengo limiteak:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x \cdot \sin x}$ b) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{4x}$ c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

12- Aurki itzazu ondoko funtzioen definizio eremua, gorakortasuna eta beherakortasun tarteak,mutur erlatiboak eta asintotzak:

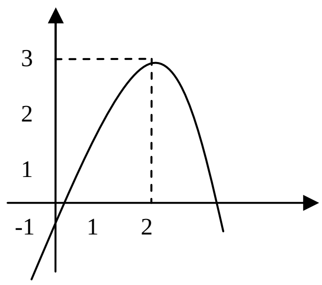
a) $y = x^3e^x$ ; b) $y = x^4\ln x$ ; c) $y = 1 + e^x - e^{2x}$ ;

$d)\ y = \dfrac{x^2}{x^2-9}$ ; $e)\ y = \dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)}$

13- Kalkulatu $y = x^3 - 6x^2 + 16x - 11$ kurbaren inflexio-puntutik pasatzen den zuzen ukitzailearen ekuazioa.

14- $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ funtzioak, inflexio-puntua du x = 3-an, minimoa x = 1-ean eta (1, 0) puntutik pasatzen da. Aurkitu “a”, “b” eta “c”.

15- Zein funtziori dagokio ondorengo grafikoa?




16- Bigarren mailako funtzio polinomiko batek mutur erlatibo bat dauka (1, 1) puntuan. Gainera, x = 2 abzisa-puntutik pasatzen den zuzen ukitzailea y = 2-x da. Aurki ezazu funtzioa.

17- $y = ax^3 + bx$ funtzioari buruz, badakigu *(1, 1)* puntutik igarotzen dela eta $3x + y = 0$ zuzenaren paraleloa den tangente bat duela puntu horretan.

a) Aurkitu “a” eta “b”.

b) Aurkitu mutur erlatiboak eta ahur eta ganbil tarteak.

18- Eman dezagun $f(x) = x^2 - 2|x|$ funtzioa.

a) Jarraitua al da puntu guztietan? Deribagarria al da?

b) Egizu funtzioaren ikerketa (Izate-eremua, simetriak, muturrak…)eta adierazi grafikoki.

19- Paralelepipedo baten bolumena 72 $zm^3$ da. Bila ezazu azalera maximodun paralelepipedoa, jakinik alde batek beste aldearen erdia neurtzen duela.

20- Aurki itzazu perimetro handieneko laukizuzenaren aldeak, laukizuzena R = 10 erradioko zirkunferentzierdi batetan inskribaturik eta bere aldeetako bat zirkunferentzierdiaren diametroaren gainean dagoelarik.

# 5-JATORRIZKO FUNTZIOAK. INTEGRAL MUGATUGABEA

## Jatorrizko funtzioa. Integral mugatugabea

f(x) funtzio baten jatorrizko funtzioa F(x) izango da, zera betetzen bada: F\`(x) = f(x) .

Adibidea:

f(x) = $3x^2$ funtzioaren jatorrizkoa funtzioa F(x) = $x^3$ da, zeren eta $(x^3)$\` =$3x^2$ . Eta ez bakarrik $x^3$ , baizik eta $x^3$ +2, $x^3$ - $\sqrt{2}$ , ...., $x^3$ +kte, ere bai.

Funtzio guzti hauen deribatua $3x^2$ da.

Jatorrizkoa funtzioen multzo osoa $\int f(x)dx$-en bidez adierazten da, eta integral mugagabea esaten zaio.

Beraz $\int 3x^2 dx = x^3 + k$ , $\int \frac{1}{x} dx = lx + k$ ......

Diferentziala eta integrala alderantzizkoak dira: $d\int f(x)dx = f(x) + k$

## Propietateak

1.- Funtzioen arteko baturaren integrala, integralen batura da:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

2.- Konstante eta funtzio baten arteko biderkaduraren integrala, konstantea bider funtzioaren integrala da.

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Propietate hauek, deribatuetan ikusi genituen antzeko propietateen ondorioak dira.

## Berehalako integralak

Funtzioen deribatuak eta integralaren kontzeptua kontutan harturik ,

$$F(x) \underset{\xleftarrow[\text{Integrala}]{}}{\xrightarrow{\text{Deribatua}}} f(x)$$, ondorengo taula lortzen da:

| | |
|---|---|
| $\int dx = x + k$ | |
| $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$ | $\int u^n \cdot u`\cdot dx = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + k$ |
| $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + k$ | $\int \dfrac{u`}{u} dx = \ln\|u\| + k$ |
| $\int a^x \cdot dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + k$ | $\int a^u \cdot u`\cdot dx = \dfrac{a^u}{\ln a} + k$ |
| $\int e^x \cdot dx = e^x + k$ | $\int e^u \cdot u`\cdot dx = e^u + k$ |
| $\int \sin x \cdot dx = -kosx + k$ | $\int u`\sin u \cdot dx = -kosu + k$ |
| $\int kosx \cdot dx = \sin x + k$ | $\int u`kosu \cdot dx = \sin u + k$ |
| $\int sek^2 x \cdot dx = \int \dfrac{dx}{kos^2 x} = tgx + k$ | $\int u`sek^2 u \cdot dx = \int \dfrac{u`}{kos^2 u} dx = tgu + k$ |
| $\int kosek^2 x \cdot dx = \int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ktgx + k$ | $\int u`kosek^2 u \cdot dx = \int \dfrac{u`}{\sin^2 u} dx = -ktgu + k$ |
| $\int tgx \cdot dx = \ln\|sekx\| + k$ | $\int u`tgu \cdot dx = \ln\|seku\| + k$ |
| $\int ktgx \cdot dx = \ln\|\sin x\| + k$ | $\int u`ktgu \cdot dx = \ln\|\sin u\| + k$ |
| $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ark\sin x + k$ | $\int \dfrac{u`}{\sqrt{1-u^2}} dx = ark\sin u + k$ |
| $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arktgx + k$ | $\int \dfrac{u`}{1+u^2} dx = arktgu + k$ |
| $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = arksekx + k$ | $\int \dfrac{u`}{u\sqrt{u^2-1}} dx = arkseku + k$ |

## Ariketak 1

1. Aurki ezazu f(x) funtzioa, jakinik f`(x) = 2x – 1 eta f(5) = 6 direla.
2. Aurkitu G funtzioa, jakinik G``(x) =6x+1 , G´(x)=3 eta G(1) = 0 direla.
3. f(x) = $x^2$ + 2x funtzioaren jatorrizko guztien multzotik, kalkula ezazu x = 1-entzat anulatzen dena.
4. y = sinx funtzioaren jatorrizko funtzio guztietatik, bila ezazu (0, 1) puntutik pasatzen dena.
5. Zenbat funtzioren deribatua da f(x) = 3$x^2$-1 funtzioa? Aurrekoen artean aurkitu bat non bere grafikoa (2, 1) puntutik pasatzen den.

6. Kalkula itzazu ondoko integral mugatugabeak:

a) $\int \sqrt[5]{x^{3}} \cdot dx$ b) $\int (4-2^{x}+\frac{5}{x^{2}})\cdot dx$ c) $\int \frac{2x}{x^{2}+5}dx$

d) $\int 4sek^{2}4x\cdot dx$ e) $\int 2x\sqrt{5+x^{2}}\cdot dx$ f) $\int \frac{x^{2}+1}{x}dx$

g) $\int \frac{3x^{3}-6x^{2}+x-7}{x}dx$ h) $\int \left(\sqrt{x}-2\right)^{2}\cdot dx$ i) $\int \frac{x^{3}-1+x^{2}}{x}dx$

j) $\int \frac{3x^{2}}{\sqrt{1-x^{6}}}dx$

## Integrazio-metodoak

- **Aldagai-aldaketa**

Eman dezagun $\int f(u)\cdot u`\cdot dx$ eratako integrala.

Aldagaia “x” izan beharrean, ondoko aldaketa proposatzen da: u(x) = t

Deribatuz, u`(x) dx = dt.

Beraz, $\int f(u)\cdot u`\cdot dx = \int f(t)\cdot dt$

Adibideak:

1- $\int x\sqrt{1+x^{2}}dx$

I = $\int x\left(1+x^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot dx$ ; $u^{n}\cdot u`$ forma dauka, u= $1+x^2$ delarik. Beraz, ondoko aldaketa dagokio: $1+x^2 = t$

Deribatuz, 2xdx = dt; edo: xdx = $\frac{1}{2}dt$ .

Orain, adierazi dena “t”-ren funtziopean. Hau da:

$$I = \int x\sqrt{1+x^{2}}\cdot dx = \int \frac{1}{2}\sqrt{t}\cdot dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\cdot dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+k = \frac{\sqrt{\left(1+x^{2}\right)^{3}}}{3}+k$$

2- $\int \frac{x^{2}}{1-2x^{3}}dx$

$\frac{u`}{u}$ forma dauka. Beraz, aldaketa: u = $1-2x^3$ = t

Deribatuz: $-6x^2dx$ = dt edo $x^2dx = \frac{-1}{6}dt$

Hau da: $I = \int \frac{x^{2}}{1-2x^{3}}dx = \int \frac{-1}{6}\frac{dt}{t} = \frac{-1}{6}\ln|t|+k = \frac{-1}{6}\ln\left|1-2x^{3}\right|+k$

**Ariketak 2**

Kalkulatu:

a) $\int \sin\frac{x}{3}\cdot dx$ b) $\int x\cdot 3^{2x^2}\cdot dx$ c) $\int kos^2 x\cdot \sin x\cdot dx$ d) $\int \sin 2x\cdot kos2x\cdot dx$

e) $\int tg4x\cdot dx$ f) $\int (4-x^3)\sqrt{x}\cdot dx$ g) $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx$ h) $\int \frac{dx}{4(5-3x)}$

* ark sin eta ark tg funtzioei dagozkien aldaketak

ark sin: $\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}}$ ark tg: $\int \frac{dx}{a+bx^2}$ Aldaketa: x = $\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot t$

Adibidea

I = $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

x = $\sqrt{\frac{9}{4}}t = \frac{3}{2}t$ $\rightarrow$ dx = $\frac{3}{2}t$ $\rightarrow$

$$I = \int \frac{\frac{3}{2}dt}{\sqrt{9-4\frac{9}{4}t^2}} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{9-9t^2}} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{9}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}ark\sin t + k = \frac{1}{2}ark\sin\frac{2x}{3} + k$$

**Ariketak 3**

Kalkulatu:

a) $\int \frac{dx}{1+8x^2}$ b) $\int \frac{dx}{100+x^2}$ c) $\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$

♦ **Zatikako metodoa**

“u” eta “v”, x-en funtzioak badira, zera betetzen da: d($u\cdot v$) = u dv + v du

u dv askatuz: u dv = d($u\cdot v$) – v du

Atal biak integratuz: $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$ $\rightarrow$ “Zatikako integrazioaren formula”

Formula honen bidez, $\int u\cdot dv$ kalkula daiteke, $\int v\cdot du$ jakinez gero.

Metodo hau, zenbait kasutan aplika daiteke:

★Alderantzizko funtzio trigonometrikoetan: $\int ark\sin x \cdot dx$; $\int arkkosx \cdot dx$;

$\int arktgx \cdot dx$

Adibidez, I = $\int arktgx \cdot dx$

Deitu: arktgx = u eta dx = dv

Kalkulatu du eta v du = $\frac{dx}{1+x^2}$ ; v = $\int dx$ = x

Aplikatu formula: I = x ark tgx - $\int \frac{x \cdot dx}{1+x^2} = xarktgx - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + k$

★ $\int x^n \sin px \cdot dx \quad (n \geq 1) \rightarrow$ $x^n$ = u eta $\sin px \cdot dx$ = dv (Berdin sinuarentzat)

★ $\int x^n \cdot e^{px} \cdot dx \quad \rightarrow$ $x^n$ = u eta $e^{px} \cdot dx = dv$

★ $\int x^n \ln px \cdot dx \quad \rightarrow$ lnpx = u eta $x^n \cdot dx = dv$

★ $\int x\sqrt{ax+b} \cdot dx \quad \rightarrow$ x = u eta $\sqrt{a+bx} \cdot dx = dv$

| |
|---|
| Hauek kalkulatzeko, errazago da a+bx = $t^2$ aldaketa egitea. |

$\int x^n \sqrt{ax+b} \cdot dx$ (Aurrekoaren berdina "n" aldiz)

★ $\int x(\ln x)^2 \cdot dx \quad \rightarrow \quad (\ln x)^2 = u$ eta $x \cdot dx = dv$

$\int \ln x \cdot dx \quad \rightarrow$ lnx = u eta dx = dv

★-----------------------------------------------------------------------------------------

Oharrak:

1- Batzutan 2, 3, ……., n aldiz aplikatu behar da formula

Adibidez $\int x^2 e^{5x} \cdot dx$ (2 aldiz) ; $\int x^3 kosx \cdot dx$ (3 aldiz) …….

2- Beste kasu batzuetan, formula bi aldiz aplikatu ondoren, hasierako integral berbera agertzen zaigu. Azken espresioan, I askatu behar da.

Adibidez $\int kos(\ln x) \cdot dx \quad \rightarrow$ kos(lnx) = u eta dx = dv

$\int e^{2x} kosx \cdot dx \rightarrow$ $e^{2x}$ = u eta $kosx \cdot dx = dv$ edo alderantziz.

**Ariketak 4**

Kalkulatu:

a) $\int x^2 \ln\frac{x}{2} \cdot dx$ b) $\int x^2 \sin\frac{x}{2} \cdot dx$ c) $\int x2^x \cdot dx$ d) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ e) $\int e^x \sin 2x \cdot dx$

♦ **<u>Funtzio arrazionalak</u>** $\left(\int \frac{f(x)}{g(x)}dx\right)$

Integrala kalkulatzeko, lehenengo hurrengo pausuak jarraitu:

a) Begira ezazu f(x)-en maila, g(x)-ena baino handiago edo berdina den. Horrela bada, egin zatiketa:

Adibidez: $\int \frac{x^3}{x^2-1}dx = \int\left(x+\frac{x}{x^2-1}\right)dx$

b) Deskonposatu faktoreetan g(x) .

**g(x)-ren faktoreen arabera, kasu hauek bereiztuko ditugu**:

**I) g(x)-ren faktore guztiak lehenengo mailakoak eta ezberdinak dira:**

(ax + b) faktore bakoitzari, $\frac{A}{ax+b}$ zatidura dagokio

<u>Adibidez:</u> $\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{dx}{(x+2)(x-2)}$

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

x aldagaiari izendatzailearen erroen balioak emanez A eta B kalkulatuko ditugu:

x = -2 ; 1 = A(-2-2) + B(-2+2) ; 1 = -4A ; A = $-\frac{1}{4}$

x = 2 ; 1 = A(2-2) + B(2+2) ; 1 = 4B ; B = $\frac{1}{4}$

Ondorioz, aurreko integrala horrela kalkulatuko dugu:

$$\int\frac{dx}{x^2-4} = \int\frac{dx}{(x+2)(x-2)} = \int\left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}\right)dx = -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{4}\ln|x+2|+\frac{1}{4}\ln|x-2|+k$$

**II) g(x)-ren faktoreak, lehenengo mailakoak dira baina errepikatzen dira:**

$(ax + b)^n$ faktore bakoitzari, ondoko batura dagokio:

$$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\dots+\frac{C}{(ax+b)^n}$$

<u>Adibidez:</u> $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

$x^3 - x^2 - x - 1 = (x+1)(x-1)^2$ Beraz:

$$\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

A, B eta C lortzeko haurreko ataleko pausuak jarraituz:

$$\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

x = -1 ; 3(-1) + 5 = A(-1-1)$^2$ + B(-1+1)(-1-1) + C(-1+1) ; 2 = 4A ; A= $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

x = 1 ; 3(1) + 5 = A(1-1)$^2$ + B(1+1)(1-1) + C(1+1) ; 8 = 2C ; C = 4

B-ren balioa kalkulatzeko x aldagaiari beste edozein balio eman, adibidez x=0

x =0 ; 3(0) + 5 = $\frac{1}{2}$ (0-1)$^2$ + B(0 + 1)(0 – 1) + 4(0+1) ; 5 = $\frac{1}{2}$ - B + 4 ; B= -$\frac{1}{2}$

Datu hauek erabiliz, integrala kalkulatuko dugu:

$$\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+4\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+4\frac{-1}{x-1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}+\text{k}$$

**III) g(x)-ren faktoreak, bigarren mailakoak eta ezberdinak dira**

Ikus dezagun zer prozedura erabili behar den kasurik errazenean, hots, integrakizuna mota honetakoa denean:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$ Q(x) laburtezina izanik (ezin da faktorketa egin)

Kasu honetan, emaitza bi integral berehalakoren batura da, bata logaritmiko motakoa izanik eta bestea arku-tangente motakoa. Bi adibide:

**<u>1. adibidea</u>**: $\int\frac{x+4}{x^2+2x+5}dx$

Izendatzailearen erroak konplexuak dira, beraz ezin da faktorketa egin.

- **Logaritmo nepertarra lortzeko,** zenbakitzailean izendatzailearen deribatuak egon behar du; kasu honetan 2x + 2. Pauso hauek egingo ditugu:

**1.-** 2 zenbakiaz biderkatu eta zatituko dugu integrala. Era horretan 2x azalduko da zenbakitzailean.

$$\int\frac{x+4}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2(x+4)}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+8}{x^2+2x+5}dx$$

**2.-** Zenbakitzaileari 2 zenbakia batu eta kenduko diogu, eta integrala bi integralen batura modura deskonposatuko dugu.

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x+8}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2-2+8}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2+6}{x^2+2x+5}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx+\int\frac{6}{x^2+2x+5}dx\right)=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|+3\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx$$

- Emaitzan geratzen zaigun integraletik **arku-tangentea lortzeko,** hauxe egingo dugu:

**3.-** Izendatzailea karratu perfektu bat gehi zenbaki baten moduan idatziko dugu, hau da:

$$x^2 + 2x + 5 = (ax + b)^2 + c = a^2x^2 + 2abx + b^2 + c$$

Polinomioen maila bereko gaien koefizienteak berdintzean lorturiko ekuazio-sistema ebatziz: a = 1, b = 1 eta c = 4 emaitzak lortzen dira. Beraz:

$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$, eta hortik $3\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx = 3\int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx$

**4**.- Eragiketak egingo ditugu, $\int \frac{g'(x)}{1+(g(x))^2}dx$ motako adierazpena lortu arte. Kasu honetan, hauxe lortzen da:

$$3\int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx = 3\frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{4}+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}dx = \frac{3}{2}arctg\,\frac{x+1}{2}$$

Beraz: $\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right| + \frac{3}{2}arctg\,\frac{x+1}{2} + K$

<u>*Oharra:*</u> $\int \frac{1}{(x+1)^4+4}dx$ integrala $x+1 = \frac{\sqrt{4}}{1}t = 2t$ aldaketa eginda ere kalkula daiteke

<u>**2. adibidea**</u>: $\int \frac{x-2}{(x-1)(x^2+1)}dx$

Izendatzaileko bi faktoreei zera dagokie:

(x-1) lehen mailakoari $\frac{A}{x-1}$ eta $(x^2 + 1)$ bigarren mailakoari $\frac{Bx+C}{x^2+1}$

Hau da: $\frac{x-2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$

$$x-2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

x = 1 denean -1 = 2A + 0 ; $A = -\frac{1}{2}$

x = 0 denean -2 = A – C ; $-2 = -\frac{1}{2} - C$ ; $C = \frac{3}{2}$

x = -1 ; -3 = 2A + (-B+C)(-2) ; $-3 = -1 + 2B - 3$ ; $B = \frac{1}{2}$

Beraz,

$$\int \frac{\frac{-1}{2}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}{x^2+1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{x+3}{x^2+1}dx = -\frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}I_1$$

$I_1$ kalkulatzeko aurreko adibidean oinarrituko gara bi integraletan bananduz, bata logaritmo nepertarra eta bestea arku tangente bat direlarik:

$$\int \frac{x+3}{x^2+1}dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx + 3\int \frac{1}{x^2+1}dx \quad = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + 3\int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\,arc\,tg\,x$$

Hasieran emandako integralaren soluzioa:

$$-\frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\,arc\,tg\,x + K \quad = \quad \ln\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}\right) + 3\,arc\,tg\,x + K$$

## Ariketak 5

Kalkulatu hurrengo integralak:

a) $\int \frac{5x^2-19x+2}{x^3-2x^2-5x+6}dx$ b) $\int \frac{2x+1}{x^3-x^2}dx$ c) $\int \frac{dx}{a^2-4x^2}$

d) $\int \frac{x}{(1-x)^2}dx$ e) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$ f) $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$

g) $\int \frac{dx}{x^2+8x+20}$ h) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$ i) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$ j) $\int \frac{2x+5}{x^2-4x+9}dx$

♦ **Funtzio trigonometrikoak**

Formula hauek kontuan hartzekoak dira:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad$ $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\quad$ $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\quad$ $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ $\quad$ $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

Integralak kalkulatzeko, hainbat kasu bereiztu daitezke:

**I)** $\int \sin^n x \cos^p x dx$ **(n edo/eta p berretzaileak, bakoitiak direnean)**

Adibideak:

★ $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot dx = \int \sin x \cdot (1-\cos^2 x)\cdot \cos^2 x \cdot dx =$

$= \int \sin x(\cos x - \cos^3 x)\cdot dx = \int \sin x \cdot \cos x \cdot dx - \int \cos^3 x \cdot \sin x \cdot dx =$

$= \int (\cos x)\cdot \sin x \cdot dx - \int (\cos x)^3 \cdot senx \cdot dx = \dfrac{-\cos^2 x}{2} - \dfrac{-\cos^4 x}{4} + k = \dfrac{-\cos^2 x}{2} + \dfrac{\cos^4 x}{4} + k$

★ $\int \cos^5 x \cdot dx = \int \cos^4 x \cdot \cos x \cdot dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cdot \cos x \cdot dx =$

$\int (1-2\sin^2 x + \sin^4 x)\cdot \cos x \cdot dx = \int \cos x \cdot dx - 2\int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx + \int \sin^4 x \cdot \cos x \cdot dx$

$= \sin x - 2\dfrac{\sin^3 x}{2} + \dfrac{\sin^5 x}{5} + k$

**II) Berretzaileak bikoitiak direnean**

Adibidea:

★ $\int \cos^2 3x \cdot dx = \int \dfrac{1+\cos 6x}{2} dx = \int \dfrac{1}{2} dx + \int \dfrac{\cos 6x}{2} dx = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{12}\sin 6x + k$

**III) Angeluak ezberdinak direnean**

Adibidez $\int \sin 3x \cdot \cos 5x \cdot dx$ (Zatikako metodoa erabiliz kalkulatu ahal dira; dena den, ez ditugu egingo).

**IV) tg $\frac{x}{2}$ = t aldaketaren bidez** (Hauek ere ez ditugu egingo)

**V) …**

**Ariketak 6**

Kalkulatu:

a) $\int \sin^3 x \cdot dx$ $\quad$ b) $\int \sin^3 2x \cdot \cos^3 2x \cdot dx$ $\quad$ c) $\int \sin^2 x \cdot dx$

## ♦ Funtzio irrazionalak

Kasuak:

**I)** $\int x, \sqrt{a - bx^2} \cdot dx$ Hauek x = $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sin t$ aldaketa eginez kalkulatzen dira (ez ditugu egingo)

Adibidez: $\int \sqrt{5 - x^2}\, dx$ aldaketa x = $\sqrt{5} \sin t$ litzateke

**II)** $\int x, \sqrt{a + bx^2}\, dx$ Aldaketa x = $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot tgt$ (ez ditugu egingo)

Adibidez: $\int \sqrt{16 + x^2} \cdot dx$ integrala kalkulatzeko x = $\sqrt{\frac{16}{1}} \cdot tgt$ = 4tg t aldaketa egin beharko genuke.

**III)** $\int x, \sqrt[n]{ax + b} \cdot dx$ Aldaketa ax + b = $t^n$

Adibideak:

★ $\int \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} dx$ Aldaketa x = $t^2$ ; dx = 2t dt

$$\int \frac{t}{t^2 + t} 2t \cdot dt = 2\int \frac{t^2}{t^2 + t} dt = 2\int \left(1 + \frac{-t}{t^2 + t}\right) dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{t + 1}\right) dt = 2t - 2\ln|t + 1| + k =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x} + 1\right| + k$$

★ $\int \frac{\sqrt{x - 1}}{1 + \sqrt[3]{x - 1}} dx$ m.k.t.(2, 3) = 6 ; Aldaketa x-1 = $t^6$ ; dx = $6t^5$ dt

$$\int \frac{\sqrt{t^6}}{1 + \sqrt[3]{t^6}} 6t^5 \cdot dt = \int \frac{t^3}{1 + t^2} 6t^5 \cdot dt = 6\int \frac{t^8}{1 + t^2} dt = 6\int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1 + t^2}\right) dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + arctg(t)\right) + k =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[6]{(x - 1)^7}}{7} - \frac{\sqrt[6]{(x - 1)^5}}{5} + \frac{\sqrt[6]{(x - 1)^3}}{3} - \sqrt[6]{x - 1} + arctg\sqrt[6]{x - 1}\right) + k$$

**Ariketa 7**

Kalkulatu $\int x\sqrt{4x + 7} \cdot dx$

# Integral mugatugabea (ariketak 1)

**1-** Kalkulatu:

a) $\int \frac{dx}{9-x^2}$ b) $\int \frac{dx}{9+x^2}$ c) $\int \frac{x \cdot dx}{9-x^2}$

d) $\int \frac{dx}{(9-x)^2}$ e) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ f) $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{9-x^2}}$

g) $\int \frac{x+3}{9+x^2} dx$ h) $\int x\sqrt{9-x^2} \cdot dx$ i) $\int x\sqrt{9-x} \cdot dx$

**2-** Aurki ezazu x = 5 puntuan 1 balioa duen “f” funtzioaren jatorrizko funtzioa:

$$f(x) = \frac{5x+4}{x^2-2x-8}$$

**3-** Kalkulatu $f(x) = \frac{2}{9x^2+1}$ funtzioaren jatorrizko funtzio bat.

**4-** Kalkulurik egin gabe, deskribatu $f(x) = \sin^3 nx$ erako funtzio baten jatorrizkoa aurkitzeko metodoa.

**5-** Kalkulatu $\int (x^n + x^2) \ln x \cdot dx$ , $n \geq 3$ eta zenbaki arrunta izanik

**6-** Kalkulatu:

a) $\int xe^{-3x} dx$ b) $\int \sin^2 nx \cdot dx$ c) $\int \cos^3 2x \cdot dx$

d) $\int \frac{dx}{tg(3x)}$ e) $\int \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x \cdot dx$ f) $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} dx$

g) $\int (x^2-1) \ln x \cdot dx$ h) $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$ i) $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \cdot dx$

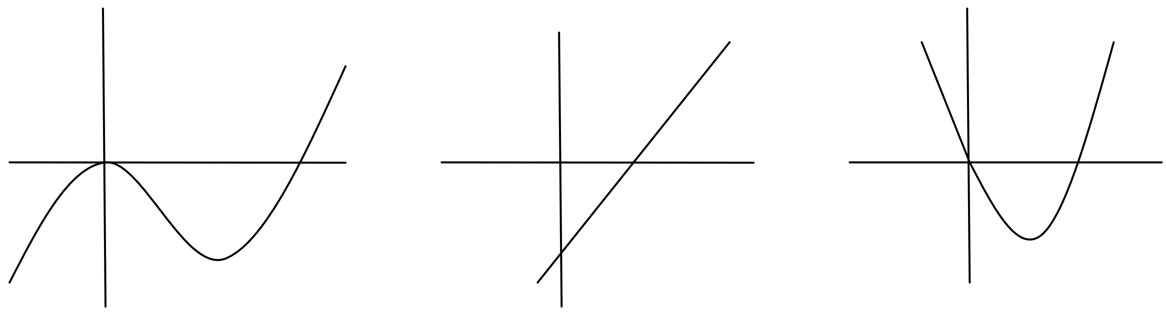
**7-** Aurkitu x = 0 kasuan anulatu egiten den $f(x) = \frac{1}{1+3x}$ funtzioaren jatorrizkoa.

**8-** Aurkitu ondoko jatorrizkoa $\int \frac{2}{x^2-2ax+a^2} dx$ , $a$ ezberdin 0 izanik

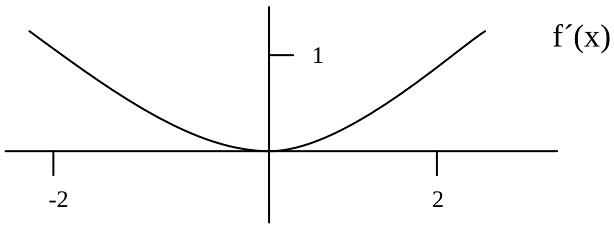
**9-** Kalkulatu $\int \frac{2x+a}{x^2+25} dx$ $a$ parametroaren arabera

# Ariketak 2

1.- Ondoko hiru grafikoak, “f” funtzio deribagarri batena, “f´ “ bere deribatuarena eta “F” jatorrizko batena dira. Identifikatu grafiko bakoitza bere funtzioarekin eta arrazonatu erantzuna.



2.- f(x) funtzio bat (1, 2) puntutik igarotzen da eta bere deribatu-funtzioaren (f´) grafikoa ondoko hau da:




Aurkitu f(x) funtzioa

3.- f(x) funtzio bati buruz hauxe dakigu: grafikoa (0, 0) puntutik pasatzen dela eta deribatua

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases}$$ funtzioa dela. Aurkitu f(x) eta irudikatu grafikoa.

4.- Kalkula itzazu:

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$ b) $\int \ln^2 x \cdot dx$ c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ d) $\int \cot gx \cdot \cos ecx \cdot dx$

e) $\int \frac{x^3}{1+x^8}dx$ f) $\int \frac{dx}{(ax+b)^2}$ g) $\int \frac{x+1}{x^2-25}dx$ h) $\int \frac{x+1}{x^2+25}dx$

i) $\int \frac{x+1}{(x-25)^2}dx$ j) $\int tgx \cdot dx$ k) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$ l) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$

m) $\int \frac{x^3+1}{x^2-5x+4}dx$ n) $\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ o) $\int \frac{1-\ln x}{x \cdot \ln x}dx$ p) $\int \frac{dx}{x^2+2x+17}$

q) $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$ r) $\int e^{3x} \cdot \cos x \cdot dx$ s) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ t) $\int \arcsin x \cdot dx$ u) $\int \frac{2+x}{x^2+1}dx$

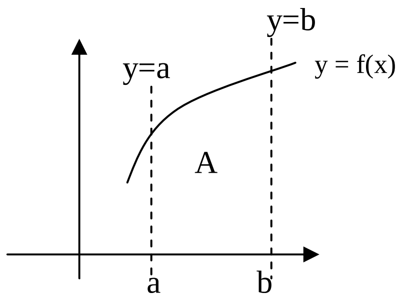
5.- Aurki ezazu x = 1 puntuan 0 balio duen “f” funtzioaren jatorrizkoa: $f(x) = \frac{2}{x^3+3x^2+2x}$

6.- Aurkitu ondoko jatorrizkoa $\int \frac{x^2}{x^2+a^2}dx$ , $a$ ezberdin 0 izanik

# 6-INTEGRAL MUGATUA

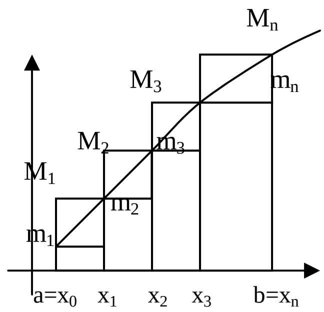
## Integral mugatuaren kontzeptua

Izan bedi [a, b] tartean jarraia den f(x) funtzioa.




Kalkula dezagun f(x) kurbak, OX ardatzak eta x = a eta x=b zuzenek mugatzen duten barruti itxiaren azalera (A).
Laukizuzenen bidez egingo dugu kalkulua.

[a, b] tartea, "n" zatitan banatzen dugu. Zati bakoitzean, f(x) jarraitua denez, Weierstrass-en teoremaren arabera, maximo eta minimo absolutuak ditu. Izan bitez "$M_i$" maximoa eta "$m_i$" minimoa. Balio horiekin, laukizuzenak osatzen ditugu, kurbaren goi eta behe aldeetatik.




Behe aldeko laukien azaleren batura:

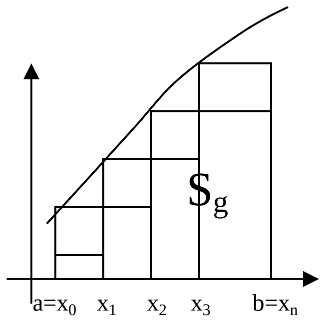
$S_b = m_1(x_1-x_0) + m_2(x_2-x_1) + \ldots\ldots + m_n(x_n-x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$

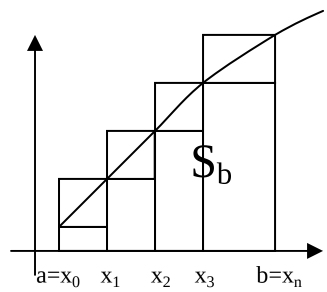
Kurbaren goi aldeko laukien azaleren batura:

$S_g = M_1(x_1-x_0) + M_2(x_2-x_1) + \ldots\ldots + M_n(x_n-x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$

Zera betetzen da: $S_b \le A \le S_g$

Tarteak txikiagoak eginik (hau da, lauki kopurua gehituz), $S_b$ –ren balioa gehituz doa eta $S_g$ –rena ordea, gutxituz. Bi segida hauek lor daitezke: $S_b \le S'_b \le S''_b \le \ldots\ldots$ eta $S_g \ge S'_g \ge S''_g \ge \ldots\ldots$




Tartearen zabalera zerorantz doanean ($h_i \to 0$) , bi segida horiek zenbaki erreal batetara hurbiltzen dira: "A". Hots,

$\lim_{h_i \to 0} S_b = \lim_{h_i \to 0} S_g = A$ , kurbak eta OX ardatzak mugatzen duten azalera [a, b] tartean.

Emaitza beste modu batetan idatz daiteke:

$$\lim_{h_i \to 0} S_b = \lim_{h_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i h_i$$

$$\lim_{h_i \to 0} S_g = \lim_{h_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i h_i \qquad \Rightarrow A = \int_a^b f(x)dx$$

Kontura zaitez, azken espresio honetan, notazio-aldaketa bat egin dugula:

- $h_i$-ren ordez, "dx" idatzi dugu
- $m_i$ eta $M_i$-ren ordez, "f(x)" idatzi dugu
- "$\Sigma$" ikurra, integral ikurra bihurtu da: "$\int$ ".

## Propietateak

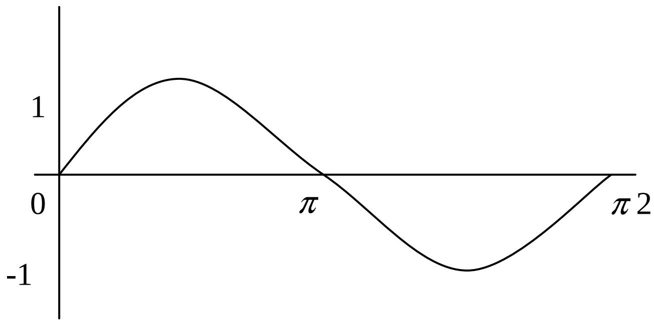
1.- $\int_a^b f(x)dx = 0$

2.- [a, b] tartean jarraitua eta f(x) >0 bada $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ >0 da.

[a, b] tartean jarraitua eta f(x) <0 bada $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ <0 da.

Adibideak:

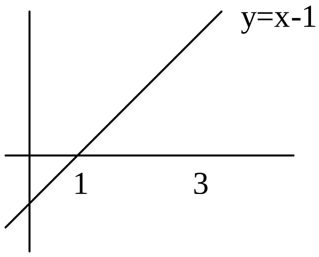
a) y = sinx kurbak eta OX ardatzak mugatzen duten azalera [0, 2$\pi$] tartean




$\int_0^{2\pi} \sin x dx$ eginik, “0” aterako litzaiguke. Kurbaren zati bat OX ardatzaren azpitik baldin badoa zati horri dagokion integrala ikurrez aldatu behar da. Hau da:

A = $\int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$ edo A = 2$\int_0^{\pi} \sin x dx$

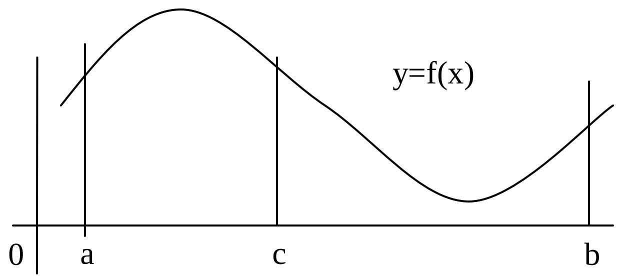
b) y = x-1 eta OX ardatzak mugatzen duten azalera [0, 3] tartean.




Azalera: - $\int_0^1 (x-1)dx + \int_1^3 (x-1)dx$

3.- Baldin a < c < b bada,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



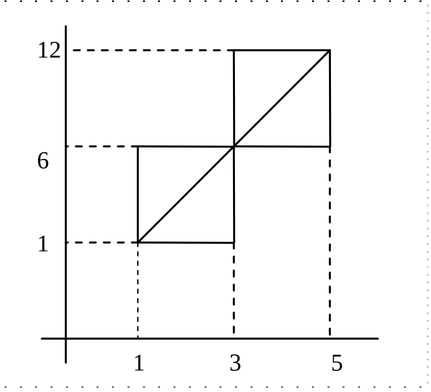

4.- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

5.- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

6.- $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \qquad \forall k \in \Re$

# Riemann-en behe eta goi-baturak

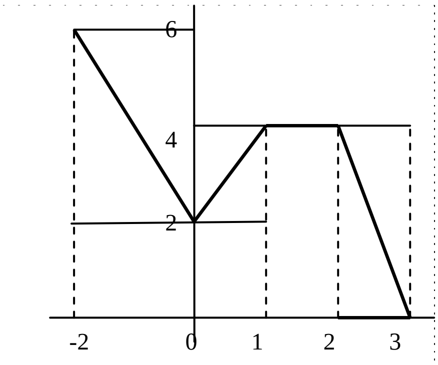
1.- Funtzio gorakor batek ondokoa betetzen du: f(1)=2 ; f(3)=6 eta f(5)=12. Zatitu ezazu [1,5] tartea hiru zatitan, P={1 , 3 , 5}, eta aurki itzazu "f" funtzioari dagokion behe eta goi-baturak




Behe-batura = (3 – 1)2 + (5 – 3)6 = 16

Goi-batura = (3 – 1)6 + (5 – 3)12 = 36

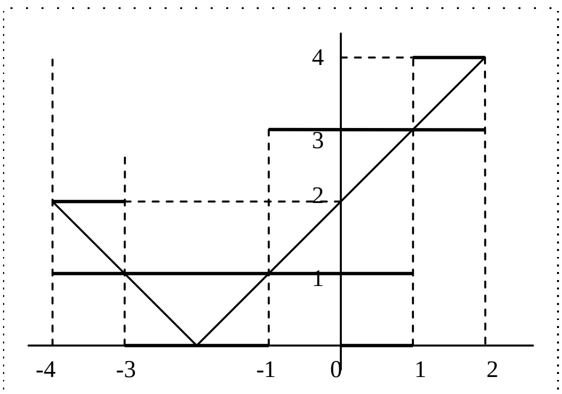
2.- Zatika definitutako funtzio lineal batek zera betetzen du: f(-2) = 6 , f(0) = 2 ; f(1) = 4 ; f(2) = 4 eta f(3) =0 . Irudika ezazu eta definitu P = {-2 , 0 , 1 , 2 , 3} partiketa. Kalkulatu Riemann-en goi eta behe-baturak




Behe-baturak= 2(2) + (1-0)2 + (2-1)4 + 0 = 10

Goi-baturak = 2(6) + (1-0)4 + (2-1)4 + (3-2)4 = 24

3.- Izan bitez f(x) = $|x+2|$ , I = [-4 , 2] tartean definitutako funtzioa eta P = { -4 , -3 , -1 , 1 , 2} aurreko tartearen partiketa. Kalkulatu *f* funtzioaren Riemann-en goi eta behe-baturak




Behe-baturak:
1(1) + 0 + 2(1) + 1(3) = 6

Goi-baturak:
1(2) + 2(1) + 2(3) + 1(4) = 14

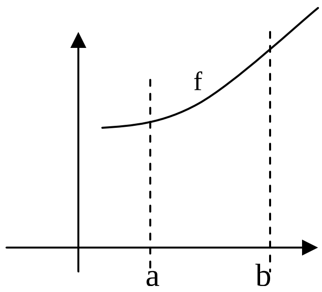
4.- Izan bitez f(x) = $x^2 – 1$ , [-3 , 2] tartean definituriko funtzioa eta P ={-3, -2, -1, 1, 2} aurreko tartearen partiketa. Kalkula ezazu, erantzuna arrazoituz, partiketa honi dagozkion goi-batura eta behe-batura.

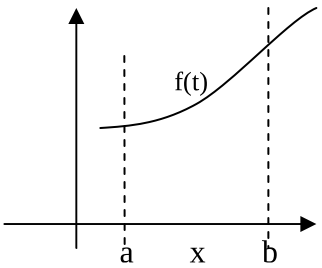
5.- Aurkitu P = {-1 , 0 , 1 , 3 , 4}partizioarekiko f(x) = $|x^2 - 4x|$ funtzioaren goi eta behe-baturak.

# Integral funtzioa-azalera funtzioa

Demagun [a, b] tartean jarraitua den funtzio bat.

Pentsa dezagun F(x) = $\int_a^x f$ , x∈ [a, b] funtzioa, funtzio berri bat dela; hau da, "f" funtzioaren azpian "a" puntu finkotik "x" puntu aldakor batetara sortzen diren azaleren balioak osatzen duten funtzioa.




"x" puntu bakoitzean, F(x) funtzioak azaleraren balio bat emango digu.

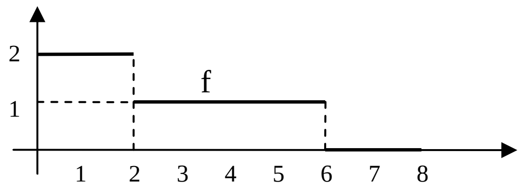
Funtzioa honela adieraziko dugu:

$$x \rightarrow F(x) \rightarrow \int_a^x f(t)dt$$

Kurbaren azpiko azalera aldakorra dela ikusten dugu; hots, azalera funtzio bat da.

1.adibidea

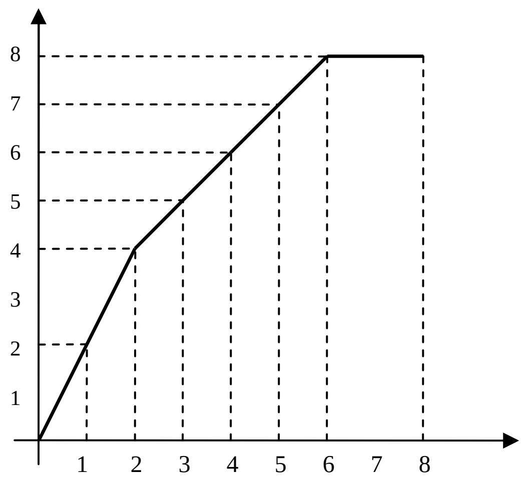
Demagun "f" funtzioa:




Pentsa dezagun F funtzioa, f-ren grafikopeko azalerak deskribatzen duena dela. Hau da,
F(1) = 2 izango da zeren "f" funtzioak [0, 1] tartean mugatzen duen azalera 2 baita
F(2) = 4 " " " " " " " " 4 baita

Berdin F(3) = 5 F(4) = 6 F(5) = 7 F(6) = 8 F(7) = 8 F(8) = 8

"x" bakoitzari azalera bat dagokio: $x \rightarrow F(x) \rightarrow \int_0^x f(t)dt$ AZALERA FUNTZIOA
EDO
INTEGRAL FUNTZIOA




OINARRIZKO TEOREMA

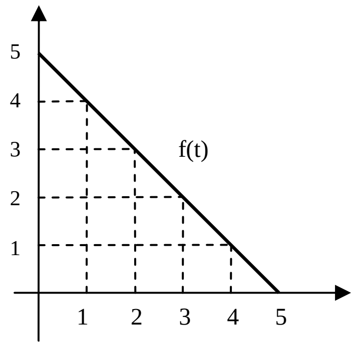
Azalera-funtzioaren deribatua eta azalera hori mugatzen duen kurbaren adierazpen analitikoa bat dira

F´= f

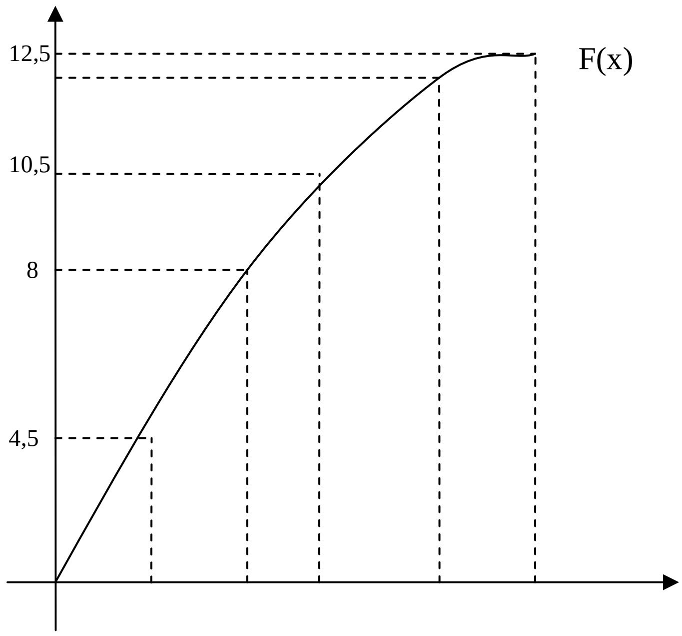
<u>2. adibidea</u>

Demagun f(t) funtzioa :

x =1 denean, f-ren azpiko azalera 4,5 da; beraz F(1) = 4,5
x =2 “ “ “ “ 4,5+3,5 da; beraz F(2)=8
x =3 “ “ “ “ 8+2,5 da; “ F(3)=10,5
x =4 “ “ “ “ 10.5+1,5 da; “ F(4)=12
x =5 “ “ “ “ 12+0,5 da; “ F(5) =12,5




F(x) = $\int_0^x f(t)\,dt$




Nahiz eta f(t) funtzio beherakorra izan, F(x) funtzioa modu azkarrean gorakorra da. Kontura zaitez f(t) = -t+5 funtzioa dela eta bere integral funtzioa

F(x) = $\int_0^x (-t+5)dt = -\dfrac{x^2}{2} + 5x$ (Barrow)

OINARRIZKO TEOREMA: F´= f

## <u>BARROW-ren erregela</u>

Izan bitez [a, b] tartean jarraitua den f(x) funtzioa eta G(x) bere jatorrizko funtzio bat (edozein jatorrizko).

Zera betetzen da: $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

<u>Adibidea</u>

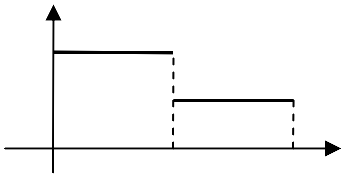
Kalkulatu $\int_1^2 \left(x^2+1\right)dx$

$$\int_1^2 \left(x^2+1\right)dx = \left.\frac{x^3}{3} + x\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3}+2\right) - \left(\frac{1^3}{3}+1\right) = \frac{10}{3}$$

## Ariketa-ebatziak (Integral-funtzioa)

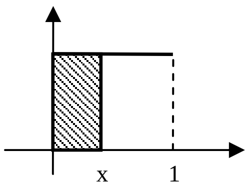
1.- Eman dezagun $f(t)=\begin{cases}1 & ; \quad 0\le t\le 1\\ 1/2 & ; \quad 1<t\le 2\end{cases}$ funtzioa. Zein da berari dagokion integral (azalera) *F(x)* funtzioa. Irudika ezazu *F(x)*

Irudika dezagun f(t)



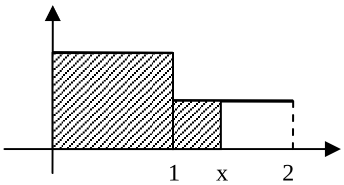
Integral funtzioa F(x):

$0\le x\le 1$ tartean :




F(x) = $\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 1dt = t\big]_0^x=(x-0)=x$

1<x≤2 tartean:



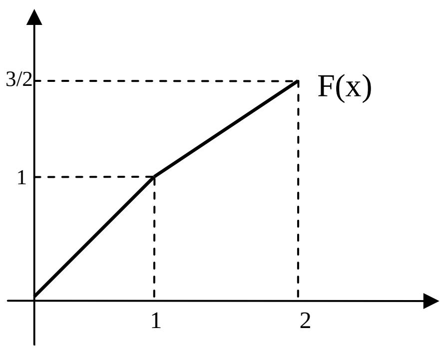

F(x) = $\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 1dt+\int_1^x \frac{1}{2}dt=$

$t\big]_0^1+\frac{1}{2}t\Big]_1^x=(1-0)+\frac{1}{2}(x-1)=\frac{1}{2}x$

Beraz, F(x) funtzioa = $\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & 1<x\le 2\end{cases}$

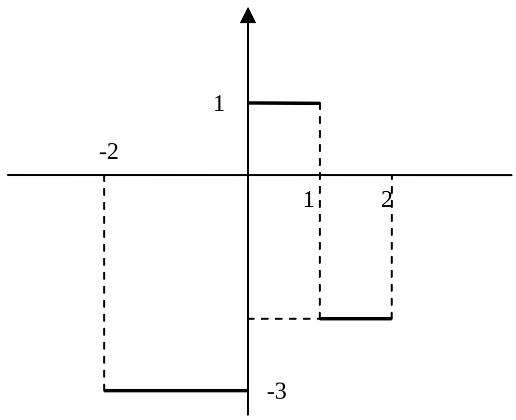
Oinarrizko teorema: F´=f

Integral-funtzioaren grafikoa:



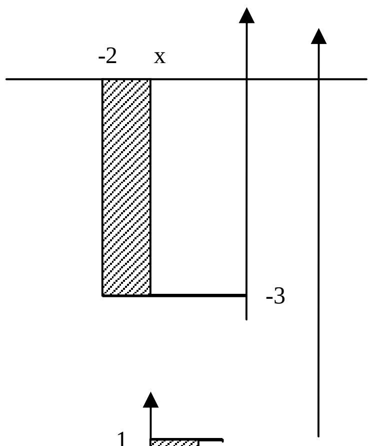
2.- Eman dezagun $E(x)=\begin{cases}-3 & ; \quad -2\le x\le 0\\ 1 & ; \quad 0<x\le 1\\ -2 & ; \quad 1<x\le 2\end{cases}$ funtzioa. Kalkulatu eta irudikatu integral- funtzioa.

Irudika dezagun E(x):




Integral-funtzioa F(x):

$-2\le x\le 0$ tartean

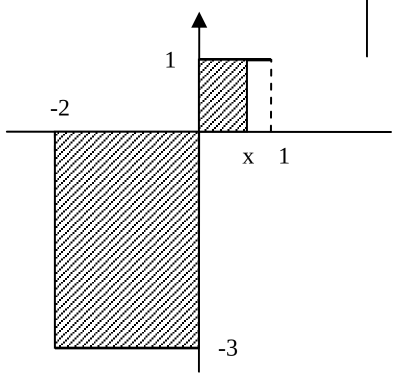



F(x) = $\int_{-2}^{x} E(t)dt = \int_{-2}^{x} -3dt$

= $-3t\Big]_{-2}^{x}$ = (-3)(x+2)=-3x-6

<u>Oharra:</u>Alde negatiboan irudikatzen denean bere zeinua errespetatu behar da.

$0<x\le 1$ tartean

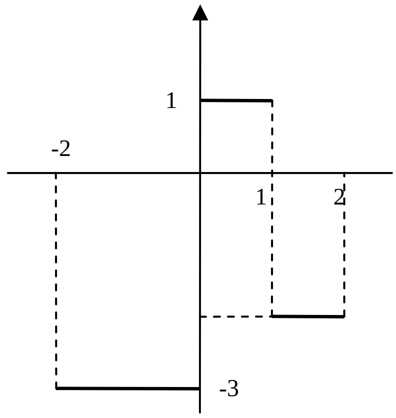



F(x) = $\int_{-2}^{0} E(t)dt + \int_{0}^{x} E(t)dt =$

$\int_{-2}^{0} -3dt + \int_{0}^{x} 1dt = -3t\Big]_{-2}^{0} + t\Big]_{0}^{x} =$

(-3)(0-(-2))+(x-0) = -6+x

$1<x\le 2$ tartean



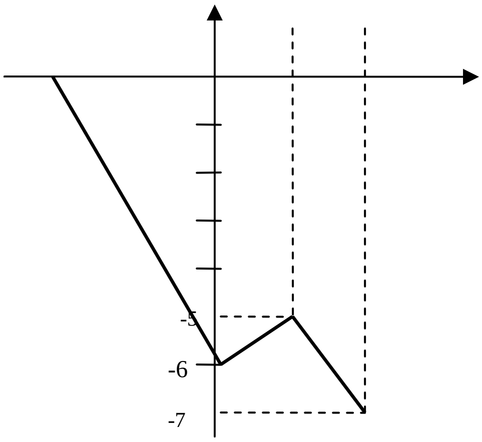

F(x) = $\int_{-2}^{0} E(t)dt + \int_{0}^{1} E(t)dt$

$+\int_{1}^{x} E(t)dt = \int_{-2}^{0} -3dt + \int_{0}^{1} 1dt + \int_{1}^{x}$

$-3t\Big]_{-2}^{0} + t\Big]_{0}^{1} + (-2)t\Big]_{1}^{x}$

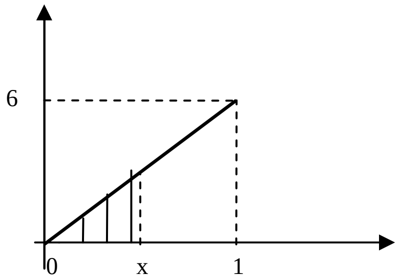
= (-3)(0-(-2))+(1-0)+(-2)(x-1)
= -2x-3

Beraz, F(x) = $\begin{cases} -3x-6 & -2 \le x \le 0 \\ x-6 & 0 < x \le 1 \\ -2x-3 & 1 < x \le 2 \end{cases}$




3.- Eman dezagun *f(t) = 6t* funtzioa [0 , 1] tartean.Zein da bere integral-funtzioa?

F(t) funtzioaren grafikoa

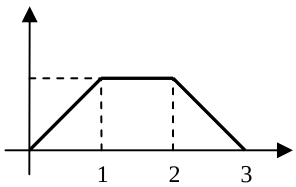



Integral-funtzioa: F(x)

F(x)= $\int_0^x 6tdt = \left.\frac{6t^2}{2}\right]_0^x = 3t^2\Big]_0^x = 3x^2 - 0 = 3x^2$

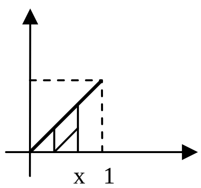
4.- Izan bitez $h(t) = \begin{cases} t & ; \quad 0 \le t \le 1 \\ 1 & ; \quad 1 < t < 2 \\ 3-t & ; \quad 2 \le t \le 3 \end{cases}$ eta $x \in [0,3]$ bakoitzerako $F(x) = \int_0^x h(t)dt$ . Kalkulatu *F(x)* integral-funtzioa.

h(t)-ren grafikoa:



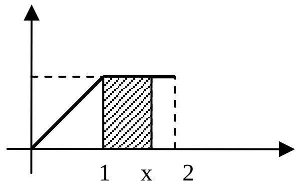

Integral-funtzioa F(x):

$0 \le x \le 1$ tartean



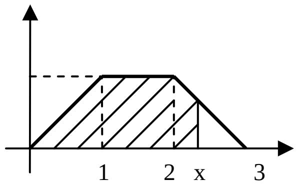

F(x) = $\int_0^x tdt = \left.\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$

1<x<2 tartean




$$F(x) = \int_0^1 t\,dt + \int_1^x 1\,dt = \frac{1}{2} + t\Big]_1^x$$
$$= \frac{1}{2} + (x-1) = x - \frac{1}{2}$$

$2 \le x \le 3$




$$F(x) = \int_0^1 t\,dt + \int_1^2 1\,dt + \int_2^x (3-t)\,dt =$$
$$\frac{1}{2} + 1 + \left[3t - \frac{t^2}{2}\right]_2^x = \frac{3}{2} + \left(3x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(6 - \frac{4}{2}\right)$$
$$= -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{5}{2}$$

Beraz, $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & 0 \le x \le 1 \\ x - \dfrac{1}{2} & 1 < x < 2 \\ -\dfrac{x^2}{2} + 3x - \dfrac{5}{2} & 2 \le x \le 3 \end{cases}$

5.- Integrala kalkulatu gabe, aurkitu $F(x) = \int_0^x (t^2 - 1)\,dt$ funtzioaren mutur erlatiboak

Oinarrizko teorema: $F'(x) = x^2 - 1$
Mutur erlatiboak: $F'(x) = 0 \longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ edo $x = 1$

$F''(x) = 2x$ $\quad$ $F''(1) = 2 > 0 \Rightarrow$ minimoa x = 1 puntuan
$F''(-1) = -2 < 0 \Rightarrow$ maximoa x = -1 puntuan

Ariketak

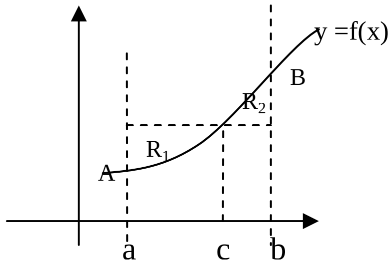
1.- Eman dezagun $E(x) = \begin{cases} 1/2 & ; \quad 2 \le x \le 3 \\ 3/4 & ; \quad 3 < x \le 4 \\ 1 & ; \quad 4 < x \le 5 \end{cases}$ funtzioa . Kalkulatu funtzio horri dagokion integral (azalera) funtzioa

2.- Kalkulatu $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ funtzioaren integral-funtzioa [0 , 1] tartean

# Kalkulu integralaren "batezbesteko teorema"

F(x) jarraitua bada [a, b] tartean, existitzen da tarteko "c" puntu bat non:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$



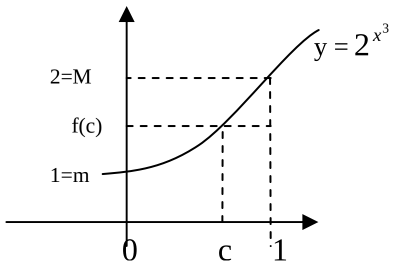

Esanahi geometrikoa:

AB kurbak sortzen duen azalera (aABb trapezio kurboak) eta oinarritzat (b-a) eta altueratzat f(c) dituen laukizuzenaren azalera berdinak dira. $R_1 = R_2$

f(c) puntua, funtzioaren minimo eta maximo absolutuen artean dago.

Adibidea

Egiazta ezazu, $1 < \int_0^1 2^{x^3} dx < 2$ ezberdintza betetzen dela.




$\int_0^1 2^{x^3} dx$ integralak, y = $2^{x^3}$ kurbaren azalera adierazten du [0, 1] tartean.

Funtzioa jarraia denez, existitzen da c∈ (0, 1= puntu bat non azalera (1-0)f(c) den.

[0, 1] tartean, funtzioaren minimoa: m = $2^0$ = 1

Beraz 1 < f(c) < 2

" " " maximoa: M = $2^1$ = 2

Azalera = (1-0) f(c) denez $\Rightarrow$ $1 < \int_0^1 2^{x^3} dx < 2$

Ariketak

1.- Jatorrizko funtzioa kalkulatu gabe, froga ezazu $3 \le \int_1^4 (1+\sin x)dx \le 6$ betetzen dela

2.- Kalkulatu $y = e^x$ funtzioaren batezbesteko balioa [0 , ln5] artean

3.- Funtzio baten integral mugatuak [1 , 2] tartean $\int_1^2 f(x)dx \ge 1$ egiaztatzen badu, egia al da $x \in [1,2]$ puntu guztietarako $f(x) \ge 0$ dela? Arrazonatu erantzuna

# INTEGRAL MUGATUA (ariketak)

**1.-** Izan bitez f(x) = 4 – $x^2$ , [-2 , 3] tartean definitutako funtzioa eta P ={-2,-1,1,2,3} aurreko tartearen partiketa. Kalkula ezazu partiketa honi dagozkion goi eta behe-baturak.

**2.-** Bigarren mailako f(x) funtzio polinomiko bati buruz zera dakigu:

- Anulatu egiten da x = 0 puntuan
- Mutur erlatibo bat du x = 1 puntuan
- $\int_0^1 f(x)dx = 1$

Zein da funtzioa?

**3**.- Aurkitu $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 3\cos(2\pi x)$ funtzioaren integral mugatua I = [2 , 4] tartean

**4.-** Eman dezagun $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & ; \quad -1 \le x \le 0 \\ 1-x & ; \quad 0 < x < 1 \\ -1 & ; \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$ funtzioa

Irudikatu eta kalkulatu ondorengo integral mugatuen balioak:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \quad ; \quad \int_{1}^{2} f(x)dx \quad ; \quad \int_{-1}^{2} f(x)dx$$

**5.-** Egiaztatu $\int_0^2 |2x-1| dx$ integralak $\dfrac{5}{2}$ balio duela

**6.-** Kalkulatu: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\, dx$ ; $\int_0^{1/3} \dfrac{1}{9x^2+1} dx$

**7.-** Eman dezagun $f(t) = \begin{cases} -1 & ; \quad 0 \le t \le 1 \\ 0 & ; \quad 1 < t \le 2 \\ 1 & ; \quad 2 < t \le 3 \end{cases}$ funtzioa. Kalkulatu integral-funtzioa eta irudikatu

**8.-** Kalkulatu f(x) = cos x funtzioaren batezbesteko balioa x = 0 eta x = $\pi/2$ artean

**9.-** Integrala kalkulatu gabe, froga ezazu $1 \le \int_0^1 e^{x^2} dx \le 3$ dela

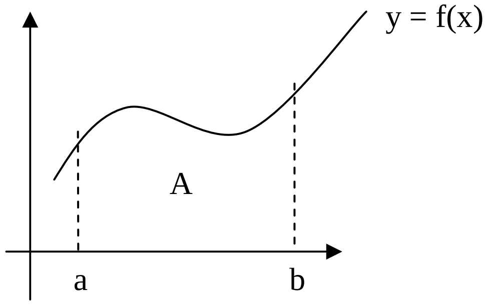
**10.-** Demagun "f" funtzio jarraiaren integralak ondorengo desberdintza betetzen duela:

$4 < \int_1^2 f(x)dx < 10$.

- Baiezta daiteke [1 , 2] tarteko "x" guztietarako 4<f(x)<10 betetzen dela?
- Baiezta daiteke badagoela gutxienez "x" puntu bat [1 , 2] tartean 4 < f(x) betetzen duena?. Erantzunak arrazoitu

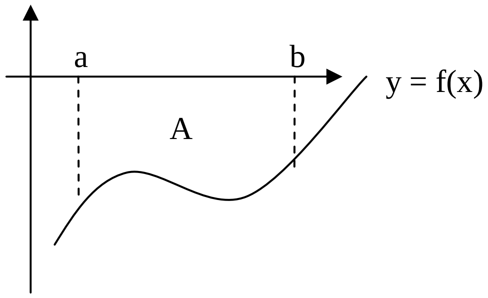
# Azalerak

I-




A $= \int_a^b f(x)dx$

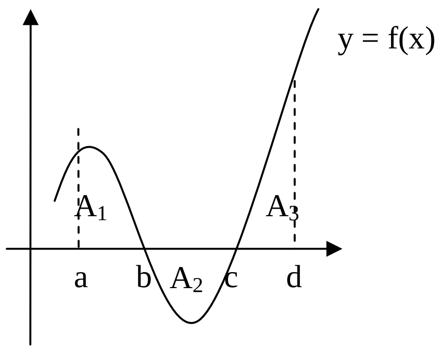
II-




f(x) < 0 denean

A = $-\int_a^b f(x)dx$

III-



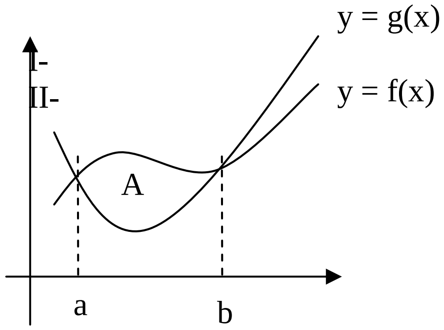

A = $A_1 + A_2 + A_3$

A = $\int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$

Ariketak

1. Kalkulatu y = $x^3$ – 16x kurbak eta OX ardatzak mugatzen duten barruti itxiaren azalera. Egizu grafikoa
2. Kalkulatu $y = \pm\sqrt{1-x}$ kurbak eta koordenatu-ardatzek mugaturiko azalera
3. Kalkulatu y = $x^2$ – 2x –3 kurbak eta y = 0 , x = 0 eta x = 4 zuzenek mugaturiko barrutiaren azalera

IV-




f(x) eta g(x) kurbek osatzen duten azalera.
Ebaki puntuak , x = a eta x = b

A = $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

# AZALERAK 1

1.- Kalkulatu $y = x^2-2x+1$ eta $y = -x^2+4x+1$ kurbek mugatzen duten azalera

2.- Kalkulatu ondorengo kurbek osatzen dituzten azalerak. Egizu grafikoak

a) $y = 5$ eta $y = x^2 - 4x$

b) $y = 2 - x^2$ eta $y + x = 0$

c) $y = x^2$ eta $x = y^2$

d) $y = x^2 + 2x - 3$ kurbak , OX ardatzak eta $x = -4$ eta $x = 2$ zuzenek

e) $y = \begin{cases} x^2 + 1 & ; \quad x > 0 \\ x + 1 & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$ , OX ardatzak eta $x = 5$ zuzenak

f) $y^2 = x$ eta $y = |x - 2|$

g) $y = x^2$ ; $y = \dfrac{x^2}{2}$ eta $y = 2x$

h) $x + 4y - 12 = 0$ zuzenak, $y = \sqrt{x}$ parabolak eta OX ardatzak

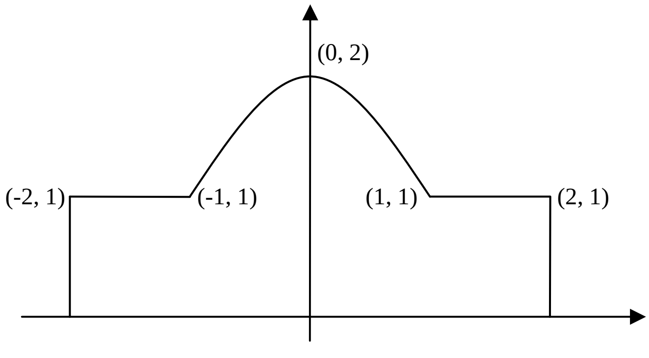
i) $y^2 = 4x$ eta $y = 2x - 4$

3.- Aurki ezazu $y = x^2-2x+2$ kurbak, beraren $x = 3$ abzisa-puntuko zuzen ukitzaileak eta koordenatu-ardatzek mugatzen duten barrutiaren azalera. Egizu grafikoa

4.- $y = x^2$ parabolak eta $x = 1$ eta $x = 3$ puntuetatik doazen zuzen ukitzaileek hiruki mixtilineo bat mugatzen dute. Egizu grafikoa eta kalkulatu hiruki horren azalera

5.- $y^2 = 2px$ eta $y = x$ kurbek mugaturiko barrutiaren azalera 6 $u^2$ da. Aurkitu $p$

6.- Kalkulatu irudiko azalera:



# AZALERAK 2

1.- Bilatu ondorengo kurbek mugatzen dituzten azalerak:

a) $x = 4 - y^2$ parabolak eta ordenatu-ardatzak (OY)

b) $y = x^2$ eta $y^2 = 8x$

c) $y = 2 - x^2$ eta $y = |x|$

d) $y = \ln x$ kurkak , $y = 1$ zuzenak eta koordenatu-ardatzek

e) $y = x^4 - 1$ eta $y = x - 1$

f) $y = x^2$ ; $y = \dfrac{1}{x}$ eta $y = 4$

g) $y = x^2$ eta $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

h) $y = \dfrac{3}{x^2 - 5x + 4}$ kurbak, OX ardatzak eta $x = 2$ eta $x = 3$ zuzenek

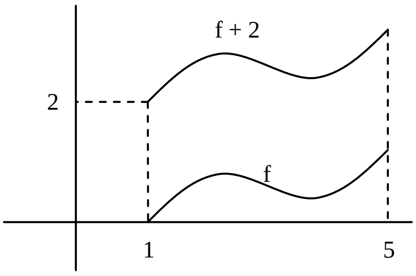
2.- Aurki ezazu OX ardatzaren gainean eta $y = x^2$ eta $y = \dfrac{16}{x^2}$ kurben azpian kokaturiko barruti lauaren azalera

3.- $y = 4 - x^2$ kurbak, bere $y = 3$ ordenatu-puntutik pasatzen den zuzen ukitzaileak eta *OX* ardatzak barruti bat mugatzen dute lehen koadrantean. Egizu grafikoa eta kalkulatu barrutiaren azalera.

4.- $y = x^3$ eta $y = mx$ funtzioek mugaturiko barrutiaren azalera 8 $u^2$ da. Aurkitu *m* eta egin grafikoa

5.- Badakigu f funtzio batek, abzisa ardatzak eta x = 1 eta x = 5 zuzenek mugatzen duten azalera 6 dela.

Zenbat handituko da azalera f funtzioa 2 unitate gorago mugitzen badugu?




6.- Adierazi grafikoki *ABC* eskualdea eta bere azalera kalkulatu ondoko datuak erabiliz: *A=(0,0), B=(0,2), C=(1,1), AB* eta *BC* lerroak zuzenak dira eta *AC* lerroaren ekuazioa $y= 2x–x^2$ da.

7.- Kalkula ezazu $y = x^4 + 1$ eta $y = 8x + 1$ kurben artean mugatutako azalera.

(Sol: $\frac{48}{5}u^2$)

8.- Kalkula ezazu $y = x^4$ funtzioaren grafikoak, *(1,1)* puntuko kurba horren zuzen tangenteak eta *OY* ardatzak mugatzen duten eskualdearen azalera.

(Sol: $\frac{6}{5}u^2$)

9.- Kalkulatu $y = x^2$ eta $y = 2x$ kurbek $y = 1$ zuzenaren azpian mugatzen duten barrutiaren azalera.

10.- $y = 2x^2$ ekuazioko kurbak, *A(0,0)* , *B(1,0)* , *C(1,1)* eta *D(0,1)* erpinetako karratua bi eskualdetan banatzen du. Aipaturiko eskualdeak irudika itzazu eta bakoitzaren azalera kalkulatu.

11.- Izan bitez $y = x(1-x)$ eta $y = (x-1)(x+2)$ ekuazioko parabolak. Egizu bi grafikoen eskema bat ardatz cartesiar berean eta kalkulatu mugatzen duten azalera.

12.- Irudikatu A(0,0), B(2,1) eta C(1,4) erpinetako triangelu lerronahasia ondoko datuak erabiliz: AC aldea lerro zuzena da, AB eta BC aldeak $y=\frac{x^2}{4}$ eta $y=\frac{4}{x^2}$ ekuazioko kurbak dira hurrenez hurren. Kalkulatu ABC triangeluaren azalera.