Batxilergo Zientifiko-Teknikoa

MATEMATIKA II

ALGEBRA

Ignacio Zuloaga BHI (Eibar)

ARGIBIDEA

1.- BEKTORE ESPAZIOAK

Bektore espazioaren egitura

Definizioa

Eman ditzagun bi multzo hauek: bat *E*, eta bestea "Gorputzaren" egitura duen *K* multzoa.

*) *E* multzoan ondoko barne-eragiketa bat (+) definitzen dugu:

$E + E \longrightarrow E$; adib P(polinomio bat) + P (polin) $\longrightarrow$ P (polin)

*) *E* multzoan *K*-rekiko kanpo-eragiketa bat (•) definitzen dugu; hau da: $E \bullet K \longrightarrow E$

Adibidez, P(polinomio bat) • R (zenbaki erreal bat) $\longrightarrow$ P (polinomioa)

Eragiketa horiek emanda, baldin *E* multzoak 8 propietate betetzen baditu (zeintzuk diren ez goaz orain aipatzera), esan genezake *E* multzoak (adib, polinomioak) bektore-espazioaren egitura duela *K* gorputzaren gain. Honela adierazten da: $(E, +, \bullet K)$

E multzoko elementuei *bektoreak* esaten zaie eta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\mu}...$ idazten dira., *K* multzokoei *eskalarrak* deitzen zaie eta $\alpha, \beta, t, s...$ letrakin idazten dira.

Adibideak

1.- Eman dezagun *C* zenbaki konplexuen multzoa eta bi eragiketa hauek:

$C + C \longrightarrow C$; adib: (2+3i) + (1-5i) $\longrightarrow$ (3-2i)

$E \bullet R \longrightarrow E$; adib: 3 . (2+3i) $\longrightarrow$ (6+9i)

Froga daiteke 8 propietate "famatu" haiek betetzen direla. Beraz, esan genezake *C* multzoak bektore-espazioaren egitura duela *R* gorputzaren gain: $(C, +, \bullet R)$

2.- Eman dezagun $M_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ;\ a, b, c, d \in R \right\}$ matrizeen multzoa eta bi eragiketa hauek:

$M_{2,2} + M_{2,2} \longrightarrow M_{2,2}$; adib. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}$

$M_{2,2} \bullet R \longrightarrow M_{2,2}$; adib. $-2 . \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Froga daiteke bektore-espazioaren egitura duela *R* gorputzaren gain: $(M_{2,2}, +, \bullet R)$

3.- Berdin $P_3(x)$ polinomioen multzoa: $\{ (ax^3 + bx^2 + cx + d) \ ;\ a, b, c, d \in R \}$

$P_3(x) + P_3(x) \longrightarrow P_3(x)$; adib. $(7x^3 + x^2 - 1) + (x^3 - 7) \longrightarrow (8x^3 + x^2 - 8)$

$P_3(x) \bullet R \longrightarrow P_3(x)$; adib. $2 \bullet (7x^3 + x^2 - 1) \longrightarrow (14x^3 + 2x^2 - 2)$

8 "propietateak" betetzen direla jakinda, $P_3(x)$ multzoak bektore-espazioaren egitura du: $(P_3(x), +, \bullet R)$

4.- Berdin R^2 erako multzoak: $\{ (x, y) \ ; \ x, y \in R \ \}$

$R^2 \ + \ R^2 \longrightarrow R^2$; adib. $(1, 5) + (-2, 7) \longrightarrow (-1, 12)$

$R^2 \ . \ R \longrightarrow R^2$; adib. $7 \ . \ (2, 3) \longrightarrow (14, 21)$

R^2 multzoak bektore-espazioaren egitura du R gorputzaren gain: $(R^2, +, \bullet R)$

5.- Berdin R^3 multzoak: $\{ (x, y, z) \ ; \ x, y, z \in R \ \}$

$R^3 \ + \ R^3 \longrightarrow R^3$; adib. $(1, 3, 4) + (3, -1, 0) \longrightarrow (4, 2, 4)$

$R^3 \ . \ R \longrightarrow R^3$; adib. $5 \ . \ (1, 2, 4) \longrightarrow (5, 10, 20)$

R^3 multzoak bektore-espazioaren egitura du R gorputzaren gain: $(R^3, +, \bullet R)$

6.- Berdin R^4, R^5 ……, R^n

GOGORATU!
Bektore-espazioaren egitura duen multzo bateko elementuei bektoreak esaten zaie eta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\mu}$... izendatzen dira; esaterako:

$\vec{a} = 4 + 5i$; $\vec{b} = (1, 5, 3)$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

Idatzi $P_4(x)$ multzoaren bektore bat

Egitura kontzeptua erabilita (bektore-espazioak…) Matematikako adar ezberdinak (Aritmetika, Geometria, Algebra…) bateratzeko bidea irekitzen da, bide guztiz interesgarria. Multzo ezberdinen berdintasunak adierazten ditu eta gaia modu orokorragoan aztertu daiteke.

Konbinazio lineala

Adibideak:

1.- R^2 multzoan $\vec{a} = (1, -5)$ bektorea $\vec{b} = (1, 1)$ eta $\vec{c} = (1, 4)$ bektoreen konbinazio lineala da zeren

$$(1, -5) = 3(1, 1) - 2(1, 4) \quad \text{edo} \quad \vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{c}$$

2.- $P_2(x)$ multzoan $\vec{a} = 2x^2 + 5x$ bektorea ondoko hiru bektoreen konbinazio lineala da $\vec{b} = x^2 + 3$; $\vec{c} = x^2 + x - 1$ eta $\vec{d} = x^2 - 3x + 1$ zeren

$$2x^2 + 5x = (x^2 + 3) + 2(x^2 + x - 1) - (x^2 - 3x + 1)$$

3.- $M_{3,4}$ multzoan, eman dezagun $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ elementua

Hirugarren lerroa aurreko bien konbinazio lineala da zeren $Lerro_3 = 3Lerro_2 - Lerro_1$ baita. Berdin, lehen lerroa beste bien konbinazio lineala dela esan daiteke, $L_1 = 3L_2 - L_3$ betetzen delako. Eta zutabeka ere bai: $zut_4 = 3zut_1 - 2zut_2 + 0zut_3$

Bektoreak linealki dependenteak. Sistema lotua

- Bi bektore linealki menpekoak edo dependenteak dira proportzionalak direnean. Adibidez R^4 multzoan B sistemaren $\vec{a}$ eta $\vec{b}$ bektoreak: $B = \{ \ \vec{a} = (1, -2, 3, 0) \ , \vec{b} = (-2, 4, -6, 0 \ \}$

- n bektore linealki dependenteak dira gutxienez horietako bektore bat gainontzekoen konbinazio lineala denean. Adibidez, aurreko atalean (konbinazio lineala) hiru adibideetako bektoreak beraien artean linealki dependenteak dira

$$C \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + 10y - 23z = 7 \end{cases}$$

C sisteman, hiru ekuazioak linealki dependenteak dira, zeren *ekuaz*$_3$ = 7*ekuaz*$_1$ – 3 *ekuaz*$_2$

R^2 multzoan $\vec{a} = (1, -5)$ $\vec{b} = (1,1)$ eta $\vec{c} = (1,4)$ bektoreak linealki dependenteak dira, zeren $\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{c}$ baita. Kasu horretan, hiru bektoreek R^2 multzoan **sistema lotua** osatzen dutela dela esaten da.

Bektoreak linealki independenteak. Sistema librea

- Bi bektore linealki independenteak dira proportzionalak ez direnean. Adibidez $P_2(x)$ multzoan ondoko D sistemaren bi bektore hauek: $D = \{ \ \vec{a} = 7x^2 + 1 \quad ; \quad \vec{b} = x^2 - x + 1 \ \}$

- n bektore linealki independenteak dira, ezinezkoa denean konbinazio linealik adierazi. Adibidez
R^4 multzoan $F = \{ \ (1, 0, 4, 3) \ , \ (2, 1, 1, 4) \ , \ (1, 2, 1, 1) \ \}$

Ondoko matrizean ere, hiru lerroak linealki independenteak dira $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Eta ekuazio sisteman honetan hiru ekuazioak linealki independenteak dira: $\begin{cases} x + 4z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$

Heina

Bektore multzo baten heina da bektore linealki independenteen kopurua.
Aurreko ataletako sistemak berrikusita:

A matrizearen heina 2 da
B sistemaren heina 1 da
C ekuazio sistemaren heina 2 da
F sistemaren heina 3 da.

ARIKETAK

1.- *C* zenbaki konplexuen multzoan, adieraz ezazu bektore bat beste bien konbinazio lineal lez. Nolakoak dira idatzi dituzun hiru bektoreak? Linealki dependenteak ala independenteak ?

2.- $P_3(x)$ multzoan idatzi bi bektore linealki dependenteak direnak. Ondoren beste bi independenteak direnak.

3.- R^3 multzoan idatzi hiru bektore linealki dependenteak direnak, eta beste hiru independenteak. Zenbat da heinaren balioa kasu bakoitzean ?

4.- Arrazoitu R^2 multzoan ondoko sistema lotua dela: $\{(1,2),(2,4),(3,6)\}$. Zenbat da heina?

Oinarria. Koordenatuak

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$... bektore sistema bat E multzoaren oinarria dela esaten da ondoko bi baldintzak betetzen direnean:

I) Bektoreak linealki independenteak izatea

II) E multzoaren sistema sortzaile izatea; hau da, E-ko beste edozein bektore emandako $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$... bektoreen konbinazio lineal izatea.

Adibideak:

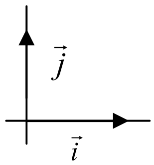
1.- $\{\ \vec{a}=(1,5)\ eta\ \vec{b}=(-1,2)\ \}$ bektoreak R^2 espazioaren oinarri dira zeren:

- Linealki independenteak dira (ez dira proportzionalak)
- R^2-ko edozein bektore adieraz daiteke bi horien konbinazio lineal bezala; hau da, bat aukeratuz, esaterako (0 , 4), lortzen dira α eta β **koordenatuak** ondokoa bete arazten dutenak: (0 , 4) = α (1 , 5) + β (-1 , 2)

  Koordenatuak kalkulatzeko sistema hau ebatzi behar da: $\begin{cases} 0 = \alpha - \beta \\ 4 = 5\alpha + 2\beta \end{cases}$

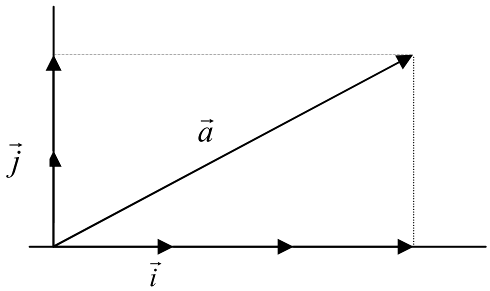
$$\text{Soluzioa: } \alpha = \beta = \frac{4}{7}$$

2.- Planoko bektoreen multzoan *(V^2)*, **oinarri ortonormala** bi bektore unitarioak eta perpendikularrak osatutakoa da



$\{\vec{i}\ ,\vec{j}\ \}$

- $\vec{i}$ *eta* $\vec{j}$ linealki independenteak dira (ez dira paraleloak)
- Planoko edozein bektore $\vec{i}$ *eta* $\vec{j}$ -ren konbinazio lineala da; adibidez , $\vec{a}$



$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$

3.- R^3 multzoan **oinarri kanonikoa** $\{(1,0,0)\ ,\ (0,1,0)\ ,\ (0,0,1)\ \}$ sistemari esaten zaio. Beste edozein aukeratuta, esaterako (1 , 3 , -5), koordenatuak 1, 3 eta –5 baitira. Izan ere:

(1 , 3 , -5) = 1(1,0,0) + 3(0,0,1) – 5(0,0,1)

E bektore-espazio batean, oinarri guztiek bektore kopuru berbera dute.   Kopuru horri DIMENTSIOA esaten zaio

ARIKETAK

1.- Aztertu kasu bakoitzean emandako bektoreak linealki menpekoak ala independenteak diren. Zenbat da heina?

a) 3 +4i eta 2+i

b) (3,4) , (2,1) eta (1,3)

c) (4,6,-2) eta (-2,-3,1)

d) (1,0,0) , (0,2,-3) eta (0,0,4)

2.- Demagun R^2 espazioaren $\{(1,2),(3,1)\}$oinarria.

a) Frogatu $\vec{a} = (-1,3)$ bektorearen koordenatuak 2 eta -1

b) Kalkulatu oinarri berean (0 , 5) bektorearen koordenatuak

3.- $P_3(x)$ multzoan, $\vec{a} = x^3 + x - 2$, $\vec{b} = 3x^3 + x^2 + 4$ eta $\vec{c} = -x^3 - x + 2$ bektoreak linealki menpekoak dira. Posible al da $\vec{b}$ bektorea beste bien konbinazio bezala adieraztea? Eta $\vec{c}$ bektorea?

4.- Demagun $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ R^4-ko bi bektore linealki independenteak direla. Osatzen al dute R^4-ko oinarri bat?. Zenbat bektore falta dira dira oinarri bat osatzeko.

5.- Idatzi hiru lerro eta hiru zutabeko matrize bat bere heina 1 delarik. Ondoren idatzi beste bat heina 2 delarik

6.- Eman ditzagun $\vec{u} = (a,-2,1,b)$, $\vec{v} = (1,2,3,4)$ eta $\vec{w} = (-1,0,-2,3)$ bektoreak. Aurkitu a eta b-ren balioak, $\vec{u}$ bektorea $\vec{v}$ eta $\vec{w}$-ren konbinazio lineala izan dadin

2.-MATRIZEAK

Sarrera

Adibidea

Enpresa batek hiru biltegi ditu (B1, B2 eta B3) eta bost artikulu mota (A1, A2, A3, A4 eta A5).

Ondoko matrizearen bidez, biltegi bakoitzeko produktu kantitatea (milaka unitateetan) adierazten da:

	A1	A2	A3	A4	A5
B1	3	4	1	3	4
B2	3	2	5	3	2
B3	7	4	3	2	3

- Matrize horrek 3 lerro eta 5 zutabe ditu; beraz, *3x5* ordenakoa da
- Bere barruko elementuak a_{21}, a_{13},... adierazten dira. Esaterako, a_{31} elementua, 3. lerro eta 1. zutabekoa da, balioa 7 delarik
- Lerroz eta zutabeka adierazitako zerbait, errazago ulertzekoa da, informazio pila bat gorde dezake eta ondorioak ateratzeko erosoagoa da. Erantzun galdera hauei:

  a) Non aurkitzen da kantitate gehienean A3 produktua ?.
  Zein terminori dagokio datu hori?
  Zein da bere balioa?

  b) Zer adierazten du a_{32} elementuak?.
  Eta a_{23}-k?

  c) Artikulu kopurua gutxitzeko asmotan, zein biltegi eta zein produktu eskainiko zenuke salneurri merkeagoan?

  d) Elementu hoiek, lerroka batzea badu zentzurik? Eta zutabeka?

Adibidea

Egizu Gipuzkoako lau herrien arteko distantziak erakusten dituen matrize bat; eman distantziak kilometrotan eta kontuan eduki herrien izenak ordena berean idatzi behar dituzula lerro zein zutabetan.

a) Zeintzuk dira diagonal nagusiaren elementuak?
b) Eman dezagun ibilgailu batek kilometroko 40 zentimo gastatzen dituela eta, hori dela ta, matrizeko elementu guztiak 40rekin biderkatzen ditugula. Zer adieraziko luke sortzen den matrizeak?

Definizioak

R gorputzaren gaineko $m \times n$ ordena edo dimentsioko matrize bat, *m* lerro eta *n* zutabez osaturiko zenbaki errealen koadro bat da. $A_{m,n}$ adierazten da

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beste idazkera bat ere erabili daiteke: $A_{m,n} = (a_{ij})$ non $i=1,2,...m$ eta $j=1,2,...n$ delarik

Adibideak.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ matrizea *3x2* ordenakoa da
- $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 & 12 \end{pmatrix}$ matrizea *1x4* ordenakoa da
- a_{ij} gaia emanik eta *A*-ren dimentsioa ezagutuz, matrizearen elementu guztiak lortu daitezke. Eman dezagun $A = (a_{ij}) \in M_{2,3}$ dela eta $a_{ij} = i-4j$. Idatz ezazu matrizea

  a_{11}=1-4(1)=-3 ; a_{12}=1-4(2)=-7 ; a_{13}=1-4(3)=-11 ; a_{21}=2-4(1)=-2 .....

  $A = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -11 \\ -2 & \dots & \dots \end{pmatrix}$ Bete falta diren elementuak

- **Errenkada edo lerro matrizea**. m=1 denean. Adib, A= (2 3 -7) , *1x3* ordenakoa

- **Zutabe matrizea**. n=1. Adib, $A_{4,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, *4x1* ordenakoa

- **A-ren matrize iraulia** A-ko lerroak eta zutabeak elkar aldatuz ateratzen zaiguna. A^t adierazten da. Adib., $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ bada, bere iraulia zera da: $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

  Propietateak: $(A + B)^t = A^t + B^t$
  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

- **Matrize karratua**: m=n. Adib. $A_{3,3} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- **Diagonal nagusia**: a_{11}, a_{22}, a_{33},..... Aurreko matrizean, 4, -1 eta 2 elementuek osatutakoa
- **Matrize triangeluarra**.- Diagonal nagusiaren azpian (edo goian) dauden elementu guztiak zero badira. Adibidez, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Matrize diagonala**.- Diagonal nagusian ez dauden elementu guztiak zero badira. Adib.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matrize simetrikoa**.- Elementu berdinak dituenean diagonal nagusiarekiko.

  Adibidez, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; hau da, $A = A^t$ denean

- **Matrize antisimetrikoa**: $A = -A^t$ denean. Adibidez, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

- **A-ren aurkako matrizea**: $-A$

- **Matrize nulua**. *2x3* ordenakoa: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Unitate edo identitate matrizea**.- *I* adieraztenda. Matrize karratu bat da eta bertan diagonal nagusiko elementu guztiak berdin 1 dira eta diagonalean ez dauden elementu guztiak berdin 0

3 ordenako unitate matrizea: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 ordenako unitate matrizea: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Matrize berdinak**

  $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ Ordena berdinekoak eta termino guztiak berdinak

$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} c & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ berdinak badira, derrigorrez c=1 , a=2 eta b=7 izan behar dira

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ez dira berdinak

- **Alderantzizko matrizea** . A^{-1} adierazten da.
  Zera betetzan da: $A. A^{-1} = I$ eta $A^{-1}. A = I$

Ariketak

1.- Idatzi, posible bada:

a) 4 ordenako identitate matrizea
b) *1x4* ordenako matrize nulua
c) *2x3* ordenako matrize simetriko bat
d) *4x2* ordenako matrize bat eta bere iraulia

2.- Zeren berdina da $(A^t)^t$?

Matrizeen arteko eragiketak

▪ Batuketa

Bi edo *n* matrizeen arteko batuketa egiteko ordena berekoak izan behar dira.

Izan bitez $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+1 & -1+2 & 6-3 \\ 4+5 & 2+0 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Propietateak batuketarekiko (+):

1.- Elkartze: (A + B)+C = A +(B+C)
2.- Trukatze: A + B = B +A
3.- Elementu neutroa: A + 0 = A
4.- Aurkakoa: A + (-A) = matrize nulua

+ barne eragiketarekiko, talde abeliarra da

▪ Zenbaki erreal bat bider matrize bat

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \Re \, . \, A_{3,2} \rightarrow A_{3,2} \text{ aplikazioa da (kanpo-eragiketa)}$$

Esate baterako, 20 zenbakiak eta lau herrien arteko kilometroak adierazten zuen matrizearen arteko biderkadura

Propietateak. **t** eta **s** zenbaki errealak izanik,

5.- t.(s.A) = (t.s).A
6.- t.(A+B) = t.A + t.B
7.- (t+s) . A = t.A + s. A
8.- 1. A = A

8 propietate hoiek betetzen dituelako, $M_{m,n}$ matrizeen multzoak BEKTORE-ESPAZIOAREN egitura du *R* gorputzaren gain: $(M_{m,n}\,,\,+\,,\,.R)$

Dimentsioa *mxn* da; hau da, oinarri guztiak *mxn* bektorez osaturik daude. Adibide gisa, $M_{2,2}$ multzoko oinarri kanonikoa aipatuko dugu:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

▪ Matrizeen arteko biderketa

A eta B biderkatzeko, A.B, lehenengoaren zutabe kopurua eta bigarrenaren lerro kopurua berdinak uzan behar dute

Eman ditzagun $A_{3,4} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ eta $B_{4,2} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \\ 0 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

A.B egin ahal da zeren A-ren zutabe kopurua eta B-ren lerro kopurua berdina bait da, 4 hain zuzen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \\ 0 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+3\cdot7+5\cdot0+1\cdot4 & 2\cdot6+3\cdot2+5\cdot(-5)+1\cdot0 \\ 7\cdot1+2\cdot7+4\cdot0+3\cdot4 & 7\cdot6+2\cdot2+4\cdot(-5)+3\cdot0 \\ (-1)\cdot1+5\cdot7+0\cdot0+8\cdot4 & (-1)\cdot6+5\cdot2+0\cdot(-5)+8\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -7 \\ 33 & 26 \\ 66 & 4 \end{pmatrix}$$

Ateratzen den matrizearen ordena *3x2* da, hau da, A-ren lerro kopurua eta B- ren zutabe kopurua dituena.

Ordea, $B_{4,2}.A_{3,4}$ ezinezkoa da. Zergatik?................................

Adibidea.

Eman ditzagun $A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ eta $B_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ matrizeak. Kalkulatu A.B eta B.A

$$A_{3,2}.B_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 11 & 4 & 15 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_{2,3}.A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$A.B \neq B.A$

Propietateak:

Matrizeetan, **EZ** da betetzen trukatze propietatea. $A.B \neq B.A$
Elkartze: (A.B).C = A.(B.C)
Banatze: A.(B+C) = A.B + A.C
A.I = A

Ariketak.

1.- Matrize hauek binaka hartuta, egitzazu biderkaketa posible guztiak:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.- *A* matrizeak adierazten du *F1, F2, F3* eta *F4* familiek urtean kontsumitzen duten fruta eta haragi kopurua kilotan
B matrizeak, 2001, 02 eta 03 urteetan ogiak eta haragiak izan duten prezioa eurotan

A =

	Fruta	Haragia
F1	430	150
F2	500	210
F3	120	80
F4	800	110

B =

	2001	02	03
Fruta	1,50	1,80	2
Haragia	10,50	11	10

Egizu $A_{4,2}$. $B_{2,3}$ biderkaketa. Aterako zaizuna, era honetako matrizea izango da:

A.B =

	2001	02	03
F1			
F2			
F3			
F4			

Zer adierazten du matrize horrek?

3.- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ izanik, kalkulatu A-ren berredurak eta A^n

ARIKETAK

1.- $A_{8,6}$ eta $C_{8,3}$ matrizeak emanik, zein ordenakoa izan behar du B matrizeak A.B =C bete ahal izateko?

2.- Nolakoa izan behar du *A* matrizea, A^2 eduki dezan?. Arrazonatu

3.- A eta B bi matrize ez karratuak izanik, posible al da alde bietatik biderkatu ahal izatea, hau da, A.B eta B.A egitea?. Ze baldintza bete behar dute?

4.- Izan bitez $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrizeak.
Egiazta ezazu $(A.B)^t = B^t.A^t$

5.- $A = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$ matrizea emanik, kalkulatu $A.A^t$

6.- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ matrizeak emanik, kalkulatu A.B eta B.A

7.- Aurki itzazu *a* eta *b*, ondokoa bete dadin: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

8.- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ eta bi ordenako *I* unitate matrizeak emanik, kalkulatu
$A^2 + xA + yI = 0$ erlazioa egiaztatzen duten *x* eta *y* zenbaki errealak.

9.- Eman ditzagun $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ matrizeak. Kalkula itzazu:

a) A.B – B.A
b) X matrizea, jakinik 2A + 3X = -B dela
c) X eta Y matrizeak, ondoko sisteman: $\left.\begin{aligned} 2X - 3Y &= A \\ -3X + 4Y &= -2B \end{aligned}\right\}$

10.- 2A + 3B = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ eta 3A- B = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ izanik, kalkula itzazu, posible bada, A . B eta $A . B^t$

11.- Eman dezagun $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizea. Aurki ezazu A.B = B.A trukatze erlazioa egiaztatuko duen B matrizea

12.- Egizu berdina $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ matrizearekin

13.- $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ matrizea emanik, aurkitu *a*-ren balio positiboa ondoko dendintzak egiaztatzen dituena:

a) $A^2 = A$; b) $A^2 = 0$; c) $A^2 = I_2$

14.- A eta B bi matrize karratuak eta ordena berdinekoak dira. Egiazkoak al dira ondoko erlazioak?. Arrazonatu

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
b) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

15.- $M + N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ eta $M - N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ badira, kalkulatu $M^2 - N^2$

16.- Ebatzi ondoko matrizear ekuazioak:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

17.-*AX = BX + C* ekuazio matriziala ebatzi, *A, B* eta *C* matrizeak ondokoak izanik:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

18.- Kalkulatu A^n bi matrize hauetan:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19.- $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea emanik, kalkulatu A^7

20.- Eman dezagun $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dela.

a) Egiaztatu $(A - I)^2 = 0$
b) Kalkulatu $A + A^2 + A^3 + ... + A^n$

21.- Enpresa batek A, B, C eta D lau akzio motatan inbertitzeko aukera ematen du eta hiru modu desberdinetan, matrize honek adierazten digun bezala:

Lerro bakoitzak inbertsio-modu bat adierazten du, ehunekotan
$$\begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 20 & 20 & 30 & 30 \\ 25 & 25 & 25 & 25 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ondoko taulan, hiru hilabetetan zehar, akzioetako bakoitzetik ateratako etekina batekotan adierazten da:

	A	*B*	*C*	*D*
1. hilabetea	0,98	1,2	0,8	1,1
2.hilabetea	1,2	0,8	1,5	1,3
3.hilabetea	1,1	1,4	0,7	0,9

Matrizeekin eragiketak eginez, kalkula ezazu inbertsio-modu bakoitzean hilabeteroko etekina ehunekotan

22.- Ebatzi ondoko matrizear sistema. Ondoren, kalkulatu $X^2 + Y^2$

$$\left.\begin{aligned} 4X + 3Y &= \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

3.- DETERMINANTEAK

Determinanteak , tresna baliotsuak dira Matematikan, batez be Algebra arloan.

Matrizea karratua denean definitzen dira.

Zer da matrize karratu baten determinantea ? Matrizearen elementuekin , eragiketa bereziak (bihurriak , hobe esanda) eginez lortzen den **zenbaki erreal bat** .

Zenbaki hori **det(A)** edo deitzen da eta laguntza handikoa dugu zenbait kasuetan.

Ikasgai honetan ikasiko duzuna:
- 2. eta 3. mailako determinanteak kalkulatzen
- Determinanteen propietateak
- 4.eta n. mailako determinanteen kalkulua
- Aplikazioak:
  - Matrize karratu batek alderantzizkoa izango du baldin ***det(A) ≠ 0*** bada . Hori gertatzen denean, alderantzizkoa erabili ahal da ekuazio-sistemen ebazpenak egiteko.
  - Lerroak (zutabeak), noiz diren linealki menpekoak ala independienteak
  - Matrize baten heinaren kalkulua

2. ordenako determinanteak

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bi ordenatu matrize karratu baten determinantea honako eragiketa hau egin ondoren ateratzen den zenbaki erreala da: $a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}$. Eta honela adierazten dugu:

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Adibideak

a) Baldin $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ bada, $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=1.(-3)-(-4).2=5$

b) Baldin $B=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, orduan $|B|=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2.3-8.1=-2$

*A matrize karratu bat **eregularra** da* $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$

3. ordenako determinanteak . Sarrus-en erregela

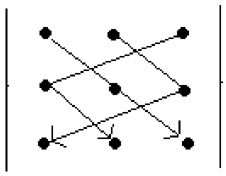
3 ×3 ordenako determinantea honela kalkulatzen da:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$

Biderkadura bakoitzean hiru elementu daude, lerro eta zutabe bakoitzeko biderkagai bat hartuta (posizioak errepikatu gabe).

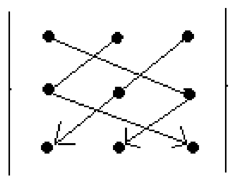
Guztira 3! = 6 batugai. Sei batugai horiek oso erraz gogora daitezke Sarrus-en erregela erabiliz.

Batu egiten diren ; gaiak:



;

Kendu egiten gaiak:



4. mailako determinantea

Biderkadura bakoitzean lau elementu daude, lerro eta zutabe bakoitzetik biderkagai bat hartuta eta posizioak errepikatu gabe. Guztira **4! = 4.3.2.1=24** batugai, erdiak positiboak eta beste erdiak negatiboak

n. mailako determinantea

Aurrekoaren berdina. Guztira **n!** batugai (erdiak + eta erdiak -), bakoitzean *n* elementu biderkatzen direlarik, lerro eta zutabe bakoitzetik bat hartuta.

4.,5.,..., n. mailako determinanteak kalkulatzeko, metodo askoz praktikoagoa ikusiko dugu hurrengo orrialdeetan

Ariketak

1.- Kalkula ezazu $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ matrizearen determinantea

2.- Ebatzi $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & x \end{vmatrix} = 24$ ekuazioa

Determinanteen propietateak

1. Matrize karratu baten eta bere irauliaren determinanteek berdin balio dute: *det(A) = det(A)*^{t} .

2. Bi lerro (edo zutabe) elkarrekiko trukatzen badira,determinantearen zeinua aldatu egingo da

3. Bi lerro (edo zutabe) berdinak baldin badira,determinantearen balioa zero da

4. Lerro bateko elementu guztiak zenbaki batez biderkatzen badira,determinantea zenbaki horretaz

biderkatuta geratuko da.

5. Lerro bateko elementu guztiak nuluak baldin badira,determinantearen balioa zero da

6. Bi lerro proportzionalak badira,determinantearen balioa zero da

7. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b & a_{32}+c & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b & c & d \end{vmatrix}$$

8. Lerro bat beste lerroen konbinazio lineala baldin bada, determinantearen balioa zero da

9. Determinante bateko lerro (edo zutabe) bati beste lerroen konbinazio lineal bat batzen bazaie, determinantearen balioa ez da aldatzen.

10. Matrize triangeluar baten determinantea haren diagonal nagusiko elementuen biderkadura da.

11. $|A.B| = |A|.|B|$, A eta B matrize karratuak izanik

12. $|I_n| = 1$**,** n-ren edozein balioarentzat

ARIKETAK

1.- Adibide bana idatziz,erantzun galdera hauei:

1.a - Noiz ez da aldatzen determinante baten balioa ?

I)

II)

Eta ,noiz da berdina baina zeinuz aurkakoa ? :

1.b - Egiazkoak al dira ondoko erlazioak ? Arrazonatu :

a) $|A+B| = |A| + |B|$

b) $|A.B| = |A|.|B|$

c) $10.|A| = |10.A|$

1.c - Noiz da determinante baten balioa 0 ?

I)

II)

III)

IV)

Bi lerro (zutabe) berdinak edo proportzionalak izatea, konbinazio lineal izatearen kasu bat da. Zera esan genezake:

- $\det(A) = 0$ bada, lerro(zutabe) bat gainontzekoen konbinazio lineala da. Beraz, lerroak linealki menpekoak dira
- $\det(A) \neq 0$ bada, lerroak linealki independienteak dira

Orokorrean: R^n bektore espazioan, n bektore linealki menpekoak dira, baldin $\det(A) = 0$ bada. Eta linelki independenteak dira, baldin $\det(A) \neq 0$ bada.

Gogoratu!. Heina eta bektore linealki independenteen kopurua gauza bera da

2.- R^3 multzoan, aztertu ondoko bektore-sistemak linealki independienteak ala menpekoak diren

a) $S_1 = \{(2,3,2),(1,2,1),(0,1,1)\}$; b) $S_2 = \{(3,2,-1),(0,-1,3),(3,0,5)\}$

3.- $P_2(x)$ multzoan, zenbatekoa izan behar du "a", ondoko bektoreak: $ax^2 + x - 1$; $x^2 - 1$ eta $2x^2 + x$

a) linealki menpekoak izan daitezen

b) linealki independienteak izan daitezen

4.- Sarrus aplikatu barik, frogatu ondoko determinanteak nuluak direla:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} sin^2 x & 1 & \cos^2 x \\ sin^2 y & 1 & \cos^2 y \\ sin^2 z & 1 & \cos^2 z \end{vmatrix}$$

5.- Sarrus egin barik, kalkulatu "x"-en balioak: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & x & 6 \\ 3 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$

6.- Egiaztatu, garatu gabe, determinante hau 12-ren multiploa dela: $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 1 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

7.- Baldin $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eta *det(A)=5* bada, kalkula itzazu:

$$|3.A| \quad ; \quad 3.|A| \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 2a & 2c \\ -3b & -3d \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{vmatrix}$$

8.- $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ determinantearen balioa 2 bada, kalkulatu arrazonatuki:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 4 \\ 1+a & 1+b & 1+c \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 6 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+3 & 3b & 3c+4 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$$

9.- Diagonal nagusitik gora edo behera "zeroak eginez", kalkulatu determinante hauek:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

10.- Garapena egin barik eta determinanteen propietateak erabiliz, kalkulatu:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

11.- Determinanteen propietateak erabiliz, kalkula itzazu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & a+c \\ a.b & b.c & a.c \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

4. mailako determinanteak

Elementu baten Adjuntua

Eman dezagun $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ matrizea

a_{ij} elementu baten adjuntua, "i" lerroa eta "j" zutabea kenduz, ateratzen den determinantearen balioa da, $(-1)^{i+j}$ -ren bidez biderkatuz . A_{ij} adierazten da. Adib:

a_{11} elementuaren adjuntua: $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

a_{12} elementuaren adjuntua: $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

Erregela (Determinanteen beste propietate bat)

Determinante bat kalkulatzeko, ondoko formula erabil daiteke:

"Lerro (edo zutabe) bateko elementu bakoitza, biderkatu adjuntuarekin eta egin denon arteko batura" . *Edozein lerro edo zutabe aukera dezakezu.* Hau da:

$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ (1.lerroa aukeratuz) . Baita:

$= \ a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$ (3.zutabea aukeratuz)

$=$ ....

Lerro edo zutabe egokiena aukeratzea komeni da.

Adibidea 1

Kalkulatu $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ lerro bateko elementuen garapena eginik

1.lerroa aukeratuz, $|A| = 1.(-1)^2\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2).(-1)^3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^4\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \underline{13}$

Ahalik eta "zero" gehiago lortuz, determinante gutxiago kalkulatu beharko da. Hori dela ta, egin dezagun "zero" a_{12} elementua; horretarako, 2. zutabearen ordez ipini dezagun $Z_2+2.Z_1$

$|A| \to z_2 + 2z_1 \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 11 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 1. lerroaren bidez garatuz, $|A| = 1.(-1)^2\begin{vmatrix} 11 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 13$

Adibidea 2.

$$\text{Kalkulatu} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Zeroak lortzeko aukera dezagun 1.zutabea . a_{21} eta a_{31} elementuak 0 egingo ditugu. Horretarako, *L2-L1* eta *L3+L1*. Hau da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Egin dezagun garapena 1.zutabeko elementuetatik abiatuta:

$$|A| = 1.A_{11} + 0.A_{21} + 0.A_{31} + 0.A_{41} = 1.(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 8 - 4 + 4 = \underline{\underline{10}}$$

Gauss-en metodoa erabilita (triangeluarizatuta), soluzio bera lortzen da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow L2 - L1; L3 + L1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow L3 - 2.L2; L4 - L2 \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow L4 - L3 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1.1.2.5 = \underline{\underline{10}}$$

ARIKETAK

1.- Kalkulatu $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ bi metodo hauek erabiliz:

a) Sarrus
b) Lerro (edo zutabe) bateko elementuak (bat ezik) zeroak eginez

2.- Kalkula itzazu :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad ;$$

(Sol.= -49) (Sol.=38) (Sol.=-2)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

(Sol.=-5) (Sol.=-18)

3.- Izan bitez $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & a & 2 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Bi matrizeen determinanteen balioa 2 dela jakinda, kalkulatu a eta b

Alderantzizko matrizea

Zertarako matrize baten alderantzizkoa, A^{-1}? Ekuazio-sistema batzuen ebazpena egiteko (Hurrengo galderan ikusiko dugu)

Eman dezagun $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ matrizea

Alderantzizkoa edukitzeko derriorrezko bi baldintza:

- Matrize karratua izatea
- Bere determinantea ezberdin 0 izatea; hau da, $|A| \neq 0$
- Zein da A-ren alderantzizkoa?. Formula: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

Zera betetzen du: $\mathbf{A.A^{-1}=I}$ eta $\mathbf{A^{-1}.A=I}$

<u>Adibidea.</u> Kalkula dezagun $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizkoa

Pausuz pausu egitea gomendatzen da.

1.- Kalkulatu A-ren determinantea:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0+0+10-0-4+0 = 6 \ ; \ |A| \neq 0 \text{ denez, badu alderantzizkoa}$$

2.- Kalkulatu A-ren adjuntuak:

$$A_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1 \ ; \ A_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-6) = 6 \ ; A_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -16 \ ; \ A_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

$$A_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ A_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-5) = 5 \ ; \ A_{33} = (-1)^6\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

3.- Soluzioa.- Idatzi $\dfrac{1}{|A|}$ bider adjuntuen matrizearen **iraulia:** $A^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & -16 & 5 \\ 2 & -14 & 4 \end{pmatrix}$

<u>**Ariketa:**</u> Kalkula itzazu bi matrize hauen alderantzizkoak: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Aplikazioa. Ekuazio-sistema bat matrize eran adierazi eta sistema ebatzi

Ebatz dezagun ondoko sistema $\left\{\begin{array}{l} x-z=1 \\ 2y+3z=0 \\ x-y+z=4 \end{array}\right\}$

1.- Matrize eran idatzi: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

A . X = B

2.- Ebazpena:

X askatzeko, atal biak A^{-1}en bidez biderkatzen ditugu ezker aldetik:

$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$

$A^{-1}.A = I$ eta $I.X = X$ denez gero, $\mathbf{X = A^{-1}.B}$

Beraz, soluzioa, A-ren alderantzizkoa kalkulatu eta B-rekin ezker aldetik biderkatuz lortzen da.

A-ren alderantzizkoa:

A-ren determinantea: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+0+0+2+3=7$

Adjuntuak : $A_{11} = 5$; $A_{12} = -(-3)$; $A_{13} = -2$

$A_{21} = -(-1)$; $A_{22} = 2$; $A_{23} = -(-1)$

$A_{31} = 2$; $A_{32} = -3$; $A_{33} = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sistemaren soluzioa.:

$$X = A^{-1}.B = A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 13 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/7 \\ -9/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}$$

x = 13/7 ; y = -9/7 ; z = 6/7

Ekuazio matrizialak

Adibideak.

Askatu X matrizea ondoko ekuazioetan:

a) A . X = B ; b) X . A = B ; c) A . X . B = C

a) A . X = B ; $A^{-1} . A . X = A^{-1} . B$; $\mathbf{X = A^{-1} . B}$

b) X . A = B ; $X . A . A^{-1} = B . A^{-1}$; $\mathbf{X = B . A^{-1}}$

c) A.X.B = C ; $A^{-1}.A.X.B = A^{-1}.C$; $X.B = A^{-1}.C$; $X.B.B^{-1} = A^{-1}.C.B^{-1}$; $\mathbf{X = A^{-1}. C.B^{-1}}$

Ariketa.

Askatu X:

a) B . X = A ; B = A . X ; A . B . X = C ; A . X . A = C

ARIKETAK

1.- Har dezagun A matrizea: $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) a-ren zer balioentzat edukiko du alderantzizkoa?

b) Aurki ezazu $a=2$ denean

2.- Eman ditzagun hiru sistema hauek:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x+2y-z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y=1 \\ x+2y=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+2z=-2 \\ 2x+z=-1 \end{cases}$$

a) Adierazi matrizialki

b) Kalkulatu, posible denean, koefiziente-matrizearen alderantzizkoa eta ebatzi sistema

3.- Izan bitez $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ matrizeak . Kalkulatu X matrizea ondoko kasuetan: a) $A.X = B$; b) $X.A = B$ (Erabili alderantzizkoaren metodoa)

4.- $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ eta $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ emanik, ebatzi $AX=BX + C$ ekuazio matriziala.

Matrize baten heina

Matrize baten heina,matrizearen lerro (zutabe) linealki independenteen kopurua da .

Tresna bezala , determinanteak erabiliko ditugu . Matrize baten heina h bada, existitzen da "h" mailako determinante bat ezberdin 0 dena eta "h" baino maila handiagoko determinante guztiak 0 dira

Ohar batzuk :

- Lerro linealki indep. kopurua eta zutabe linealki indep. kopurua berdina da
- Lerroen(zutabe)ordena aldatzen bada , heina ez da aldatzen . (Determinantea,bai)
- Lerro bat zenbaki erreal batekin biderkatu arren , heina ez da aldatzen (Determinantea,bai)
- Lerro bati batzen bazaio besteen konbinazio lineal bat ,heina ez da aldatzen (Determinantea erez)
- Lerro bateko den denak 0 badira , lerroa kendu daiteke (Determinantea =0 da)
- Lerro bat beste batzuen konbinazio lineala denean ,lerroa kendu daiteke eta heina ez da aldatzen . Beraz,kalkulua egin aurretik,ohartzen bazara konb. linealik dagoen,lerro hori kenduz lana eta denbora aurreratuko duzu.
- A matrizeak "n" lerro baditu eta heina "h" izan , lerro linealki independente kopurua "h" da eta gainontzeko "n-h" lerroak besteen konbinazio linealak dira.

NOLA KALKULATU HEINA ?

Hainbat metodo erabili daitezke. Ikus ditzagun adibide batzuk, bi kasu bereiztuz:

- Matrizea karratua denean
- " " ez denean

I) Matrizea , karratua ez denean

Adibidea 1

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 10 & -3 & 11 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ matrizearen heina kalkulatu.

Lehenengo zeroak lortuko ditugu lehenengo zutabean “1” zenbakiaren azpian.

Horretarako hurrengo aldaketak egingo ditugu: $l_2=l_2+2l_1$

$l_3=l_3-l_1$

$l_4=l_4+2\,l_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

$l_3 = l_2$ eta $z_2 = 2z_1$ direnez, l_3 eta z_2 kendu daitezke eta heina ez da aldatzen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

Anulatzen ez den maila handieneko determinantea aurkitu behar da. Maila hori eta heina gauza bera dira.

Kasu honetan determinantea gehienez 3 mailakoa izango da, 3 lerro baino ez dituelako geratu zaigun matrizeak.Har dezagun matrizetik har daitezkeen 3 mailako determinanteetariko bat:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -28 + 7 \neq 0$ denez, A-ren heina, h(A) = 3 da. Beraz, lerro linealki independente kopurua 3 da.

SINPLIFIKATU LANA!

Hasieran konturatuko bagina A matrizean $z_2 = 2z_1$ eta $l_3 = 3l_1 + l_2$ betetzen zela, bi lerro horiek kenduz (z_2 eta l_3), heinaren kalkulua askoz errazago egingo genuke.

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \text{Heina} = 3$$

Adibidea 2

Kalkulatu $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -8 & 4 & -4 & -6 \\ 5 & 1 & 1 & -2 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ matrizearen heina.

Ba al dago konbinazio linealik, lerro edo zutabe bat kendu ahal izateko? Ez bagara ohartzen, aurrera jarraituko dugu eta hurrengo pausoa lehen zutabean "zeroak" egitea izango da (edozein lerro edo zutabetan egin daitezke).

$l_2 = l_2 - 2l_1$

$l_3 = l_3 - 3l_1$

$l_4 = l_4 - 2l_1$

$l_5 = l_5 - 5l_1$

$l_6 = l_6 - 3l_1$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -4 & -8 \\ 0 & -14 & 6 & -8 & -16 \\ 0 & -14 & 6 & -8 & -16 \\ 0 & -14 & 6 & -12 & -16 \\ 0 & -7 & 3 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

Ba zeuden hainbat lerro linealki menpekoak. Orain garbiago ikusten da: $l_3 = 2l_2$

$l_4 = 2l_2$

$l_6 = l_2$

Kendu egingo ditugu lerro horiek:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -4 & -8 \\ 0 & -14 & 6 & -12 & -16 \end{pmatrix}$$

Diagonalaren azpitik 0-ak egiten jarraituko dugu.

$l_3 = l_3 - 2l_2$ eginik:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Zenbat da azken matrize horren heina?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

Badago 3 mailako determinante bat 0 ez dena, beraz B matrizearen heina 3 da.

<u>Beste adibide eta metodo bat</u>

<u>Adibidea 3</u>

Kalkulatu A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrizearen heina.

Oraingoan beste metodo bat erabiliko dugu. Lehenengo 0 ez den 2. mailako determinante bat aukeratzen dugu; adibidez $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Honek lehen bi lerroak linealki independenteak direla ziurtatzen gaitu.

Determinante hori finkatuz, osa dezagun 3. lerroarekin 3 ordenako determinante bat:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 - 6 + 1 = 0$$

0 aterako ez balitz, hiru lerroak linealki independenteak zirela esango genuke; beraz heina 3.

Baino hori gertatu ez denez 3. ordenako beste determinantea hartu behar dugu.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Determinante hau ere 0 da beraz, hiru ordenako determinante guztiak anulatzen direnez, hirugarren lerroa beste bien konbinazio lineala da.

Beraz heina (A) = 2

II) Matrizea , karratua denean

Adibidea

Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizearen heina.

Zuzenean A matrizearen determinantea kalkulatu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4-3-2=-9$$

→ 0 ez denez, heina (A) = 4

→ 0 aterako balitz, aurreko adibideetan egindako pausuak jarraitu.

ARIKETAK

1- Laugarren mailako matrize karratu batean, lehen bi lerroak ezagutzen dira:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Idatzi hiru matrize (bakoitzetik bat), heinak 2, 3 eta 4 direlarik.

2- Kalkulatu ondoko matrizeen heinak:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda+3 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ "λ" parametroaren arabera

$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix}$ "t" parametroaren arabera $\quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ "a" eta "b" parametroen arabera.

DETERMINANTEAK (ARIKETAK 1)

1.- "n" mailako matrize karratu baten elementu guztiak **-1** en bidez biderkatzen dira . Zenbatean aldatzen da matrize horren determinantea ?

2.- Laugarren mailako A matrize karratu baten determinanteak 2 balio badu , zenbat da 3A matrizearen determinantea ?

3.- Lerro bateko elementu guztiak nuluak direnean , determinanteak 0 balio du . Zenbat 0 eduki ditzake 3. mailako matrize karratu batek , jakinik bere determinantea ezberdin 0 dela ?

4.-Askatu X matrizea ondoko ekuazioetan:

a) A.X + B.X = C ; b) A.X.B + C = D ; c) A.X.(B-C) =D

5.- Izan bitez $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ eta $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizeak. Aurkitu $A+B$ matrizearen alderantzizkoa eta X matrizea non $X(A+B) = 2(A-B)$ den.

6.- $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ eta $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ izanik, ebatzi $A.X.B = C$ ekuazioa. Erabili alderantzizkoaren metodoa

7.- Ba al du $A=(a_{ij})$; $a_{ij}=i+j$; $\forall i, j = 1,2,..4$ matrizeak alderantzizkorik?. Zergatik? Zenbat da heina?

8.- Kalkulatu $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearen heina

9.- Kalkulatu ondoko bektore-sistemen heinak, parametroen arabera:

a) $S_1 = \{(2,-1,1); (m,-1,1); (1,m,1)\}$

b) $S_2 = \{(1,2,1); (-1,m,-1); (2,1,1); (1,0,4)\}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ a & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} a & 3 & 12 & 6 \\ b & 1 & 4 & 2 \\ a+b & 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}$

10.- Aurkitu "a" eta "b", $S = \{(1,0,1), (0,1,0), (1,a,b)\}$ sistemaren bektoreak

-linealki menpekoak izan daitezen

-linealki independenteak izan daitezen

DETERMINANTEAK (ARIKETAK 2)

1- Ebatzi, posible bada, ondoko ekuazioak:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & x & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$

b) $\left| \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$

c) $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ x & x+1 & 0 \\ 2 & x & x \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 4x+5 & 4x+7 & 4x+9 \\ 4x+9 & 4x+5 & 4x+7 \\ 4x+7 & 4x+9 & 4x+5 \end{vmatrix} = 0$

2- Izan bitez A eta B ondoko matrizeak:

$$A = \begin{pmatrix} x+1 & 3x & -1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 1+x & 6 & -x \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} x & x & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$$

B determinantearen balioa 4 dela jakinik, erabili determinanteen propietateak A matrizearen determinantea kalkulatzeko

3- Egiaztatu ondoko berdintza hauek:

a) $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & y & y & y \\ x & y & z & z \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = x(y-x)(z-y)(t-z)$

b) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - b^4$

c) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2b & 2c \\ 2a & b-c-a & 2c \\ 2a & 2b & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

d) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^2$

e) $\begin{vmatrix} x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$

f) $\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix} = b^3 \cdot (4a+b)$

4- Kalkula itzazu VANDERMONDE-ren determinante hauek:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

Egin z_2-z_1 eta z_3-z_1. Atera 2. zutabetik (b-a) biderkagai komuna eta 3.-etik (c-a).

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$

5- Determinanteen propietateak erabiliz, kalkula itzazu:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$

6- Kalkulatu m-ren balioa, ondoko matrizeak

$$\begin{pmatrix} m & 4 & 5 & 6 \\ -m & 1 & 2 & 3 \\ -m & -m & 0 & -1 \\ -m & -m & -m & -1 \end{pmatrix}$$

a) Alderantzizkorik ez dezan

b) Heina 3 izan dadin

7- Eman dezagun A = $\begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$ matrizea

a) Aurkitu x-ren balioak, zeintzuetarako A matrizeak alderantzizkorik ez duen.

b) Aurkitu A-ren alderantzizkoa, x= 3 den kasurako.

8- Kalkulatu heina “a” eta “b” parametroen arabera:

A = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & a & b \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & b \end{pmatrix}$

9- ad-bc = 3 dela jakinik, kalkulatu ondoko matrizeen determinanteak:

A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & a \\ 0 & 0 & d & b \end{pmatrix}$

10.- Izan bitez $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrizeak. Aztertu $3A - t\,B$ matrizearen heina *t* parametroaren arabera

11.- 4. mailako A matrize karratu batean, ondoko transformazioak egin eta gero, B matrizea lortzen da.
Lehenik 2. eta 3. zutabeak trukatzen dira. Ondoren 2. errenkada -3 zenbakiaz biderkatzen da, eta 3. errenkada 4 zenbakiaz biderkartzen da. Ondoren 1. zutabeari bigarrena bider 4 eta hirugarrena bider 3 gehitzen zaizkio.
A matrizearen determinantea 10 dela jakinda, zenbat izango da B matrizearen determinantea? Arrazoitu erantzuna

4.- EKUAZIO LINEALAK . SISTEMAK

Ikasgai honen laburpena :

I) Ekuazio sistema motak :- Intuitiboki
-Arrazonatuz : Rouché-ren teorema
II)Sistemen ebazpena : -Ohizko metodoak
-Cramer-en formula, alderantzizko matrizean oinarrituz
-Gauss-en metodoa
III)Hiru ezezaguneko sistemen esangura geometrikoa

EKUAZIO LINEALAK

Adibidea .

"Parisera astebete pasatzera joateak 300 euro balio du. Ikasgelan, 5.400 euro bildu baditugu , zenbat lagun joan gaitezke?"

300 x = 5400 Honelako adierazpenari , "ekuazio lineala" deitzen zaio.

Era orokorrean : **a.x = c** . Zein da soluzioa ? ....

Demagun , baldintza berri bat eransten diogula : ... "eta gurasoak langabezian dituzten ikasleek 150 besterik ez dute ordainduko ". Orain , ekuazioa zera da :

300 x + 150 y = 5400 .

Orokorrean : **a.x + b.y = c** . Zein da soluzioa ? ....

Zenbat eta baldintza gehiago sartu , ekuazioa luzeagoa egiten da .

"a" eta "b" koefizienteak dira ; "x" eta "y" ezezagunak eta "c" gai independientea

EKUAZIO SISTEMAK

Adibidea

Hiru "butaka" eta sei "palko" sarrerengatik 150 euro ordaindu dira . Aztertu honako hauek ordaindu diren kasuak ere :

a) Bi butaka eta bi palko sarrerengatik 70 euro
b) Butaka sarrera bat eta bi palkogatik 50 euro ordaindu dira
c) Bi butaka eta lau palko sarrerengatik 110 euro.

Bilatu jarleku bakoitzaren prezioak , posible den kasuetan .

a) $3x + 6y = 15.000$ $x + 2y = 5.000$ **y=1500**
$2x + 2y = 7.000$ $x+ y = 3.500$ **x=2000 Soluzio bakarra**. **<u>Bateragarria determinatua</u>**

b) $3x + 6y = 15000$ $x + 2y = 5000$
$x + 2y = 5000$ $x + 2y = 5000$ **x = 5000 - 2y . Infinitu soluzio .<u>Bateragarria indeterminatua</u>**

c) $3x + 6y = 15000$ $x + 2y = 5000$
$2x + 4y = 11000$ $x + 2y = 5500$ **0=500?? Ez du soluziorik . <u>Bateraezina</u>**

Sistema baliokideak

Ekuazio-sistema batetan,honelako transformazioak egin daitezke **soluzioa aldatu gabe** :
a) Ekuazioen nahiz inkogniten ordena aldatu
b) Ekuazioaren alde biak zenbaki ez nulu batekin biderkatu edo zatitu
c) Ekuazio bat , bera gehi beste ekuazioen arteko konbinazio lineal batez ordezkatu

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+2y+z=0 \\ 4x+y-z=4 \end{cases} \qquad ek_3=ek_3+ek_2-3ek_1 \qquad \begin{cases} 2x+y=3 \\ x+2y+z=0 \\ -x=-5 \end{cases}$$

d) - Bi ekuazio berdinak edo proportzionalak badira,horietako bat kendu egin daiteke
- Ekuazio bat, beste batzuen konbinazio lineala baldin bada , ekuazio hori kendu egin daiteke :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+5z=6 \\ 3x+6z=7 \end{cases} \qquad ek_3=ek_1+ek_2 \qquad \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+5z=6 \end{cases}$$

Rouche Frobenius-en teorema

Izan bedi "m" ekuazio eta "n" inkognita dituen sistema orokorra:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+....+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+....+a_{2n}x_n=b_2 \\ ....+........+........+........=.... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+....+a_{mn}x_n=b_n \end{cases}$$

eta

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad Z=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

Koefizienteen matrizea **Matrize zabaldua**

Teorema :
Ebazpenari edo soluzioari dagokionez , sistema mota hauek daude :

Sistema **BATERZAEZINEK** . Ez dute soluziorik: rang (A) $\neq$ rang (Z)
Sistema **BATERAGARRIEK** soluzioa dute: rang (A) = rang (Z)
-Bateragarri DETERMINATUA . Soluzio bakarra: rang(A) = rang(Z)= ezezagun kopurua.
-Bateragarri INDETERMINATUA . Infinitu soluzio: rang(A) = rang(Z) < ezezagun kopurua

Aztertu sistema hauen bateragarritasuna eta soluzio kopurua :

<u>Adibide 1</u>

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$$

Heina(A/Z) : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{l_3=l_3-l_1}{\overset{l_2=l_2-2l_1}{\to}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$ heina(A) = heina(Z) = 2; Ezezagun kopurua = 3. **Sistema bateragarri indeterminatua.**

Ebazpena egiteko jarraitu hurrengo pausuak:

- Heina 2 denez, aukeratu heinaren kalkuluan lortu dugun sistema baliokidea:
  $$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ -3y=0 \end{cases}$$
- Aukeratu 2 ezezagun independenteak (det$\neq 0$) eta gainontzeko terminoak pasatu berdintza ikurraren beste aldera:
  $$\begin{cases} x+2y=1-z \\ -3y=0 \end{cases}$$
- Lortzen den sistemaren ebazpena egin (Cramer-en erregela erabiliz)(Aurrerago ikusiko da)

<u>Adibide 2</u>

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \\ 2x-6y=3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

A matrizeak 2 zutabe besterik ez ditu: hau da, heina (A) $\leq$ 2.
Z-ren heina ordea izan daiteke 3. Beraz, kalkula dezagun hasieratik Z-ri dagokion determinantea:
- det (Z) $\neq 0$ bada, ariketa bukatutzat ematen da. Heina(Z) = 3 eta heina (A) $\leq$ 2 direnez sistema bateraezina delako.
- det (Z) = 0 bada, jarraitu A eta Z-ren heinak kalkulatzen.

Kalkulatu det(Z) eta aztertu emaitza:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -6 & 3 \end{vmatrix}$ = -3-6+2-3 = -10 Beraz heina(Z) = 3 eta **sistema bateraezina da.**

<u>Adibidea 3</u>

Aztertu sistemaren bateragarritasuna “a” parametroaren arabera:

$$\begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y=2 \\ ax+y=1 \\ -x+z=3 \end{cases}$$

Heina (A) $\leq$ 3 . Ordea , heina (Z) baliteke 4 izatea . Beraz, kalkulatu det (Z)

$$|Z| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \underset{l_4 - l_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{z_3 + z_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ a & 1 & a+1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = -2(a+1-4) = -2(a-3)$$

Posibilitateak:

I) **a** $\neq$ **3** $\Rightarrow$ det(Z) $\neq 0$, beraz heina(Z) = 4 eta heina(A) ≤ 3 $\Rightarrow$ **Sistema bateraezina**

II) **a = 3** $\Rightarrow$ det(Z) $\leq$ 3 $\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0$

heina(A) = heina(Z) = 3 = Ezezagun kopurua $\Rightarrow$ **Sistema bateragarri determinatua**

Emaitza kalkulatzeko 3 ekuazio independente aukeratu (det $\neq 0$ duen matrizeari dagokion 3 ekuazioko sistema).

ARIKETAK

1- Izan bedi ondoko *S* sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$$

a) Aurkitu $Ax + By = C$ erako ekuazio bat, *S* sistemari gehitzen zaionean lortutako sistema berria bateraezina delarik.

b) Aurkitu $Ax + By = C$ erako bi ekuazio, S sistemari gehitzen zaizkionean lortutako sistema berria bateragarria delarik.

2- $S \equiv \begin{cases} x+y+z=m \\ 2x+2y+2z=2m \\ x+y=1 \\ 2x+2y+z=1+m \end{cases}$

sistema emanda, adieraz ezazu bi ekuazio soilik dituen S-ren sistema baliokide bat. Arrazonatu erantzuna.

3.- Heinak kalkulatu gabe, aurki itzazu arrazonatuki "a" parametroaren bi balio, sistema bateraezina gerta dadin:

$$\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ 2x+ay+z=2 \\ x+2y=0 \\ 2x+ay=1 \end{cases}$$

4.- Eztabaidatu sistema hauek *m* parametroaren arabera

a) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=1 \\ 4x-y=m \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-my-3z=0 \\ 5x+2y-z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+my-z=0 \\ 5x+y+z=2 \end{cases}$

Sistemen ebazpena.metodoak

Ohizko metodoak :

- *Ordezkapen metodoa :* "Ekuazio batean ezezagun bat askatu eta beste ekuazio guztietan ordezkatu ....."
- *Laburpen metodoa* : "Ekuazioak binaka hartuz eta ezezagun baten koefizienteak berdindu ..."
- *Berdinketa :* "Ekuazio guztietan ezezagun berdina askatu ,..."

CRAMER -en erregela

Definizioa:

Ekuazio-sistema bat , Cramer-ena dela esaten da , baldin :

I) Ezezagun eta ekuazio kopurua berdinak direnean (m=n) eta

II) Koefizienteen matrizearen determinantea ezberdin 0 denean ; $|A| \neq 0$

Ebazpena:

Eman dezagun hiru ekuazio eta hiru ezezaguneko sistema lineal bat:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Cramer-en sistema bat dela suposatuko dugu, hau da, $|A| \neq 0$

Adieraz dezagun era matrizialean:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{edo} \quad A \cdot X = B \rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Hau da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

edo:

$$x = \frac{1}{|A|}\left(b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}\right) = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y = \frac{1}{|A|}\left(b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}\right) = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|A_y|}{|A|}$$

$$z = \frac{1}{|A|}\left(b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}\right) = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|A_z|}{|A|}$$

Adibidea 1

Ebatzi ondorengo sistema: $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$

- Ezezagun kopurua eta ekuazio kopurua berdinak dira (3).
- Koefizienteen determinantearen balioa ezberdin 0 da. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

Beraz, Cramer-en sistema bat da.

Soluzioa:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{3}{4}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-15}{4}; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-25}{4}$$

Adibidea 2

Ebatzi $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 4x+5y=1 \end{cases}$ sistema.

I) Ezezagun kopurua = Ekuazio kopurua

II) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$

Beraz, Cramer-en sistema da.

Soluzioa:

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{7} = -\dfrac{2}{7}$ $\qquad$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{7} = \dfrac{3}{7}$

ARIKETA

-Rouché-ren teoreman aztertu ditugun sistemen ebazpena egizu,bateragarriak diren kasuetan.

Adib1

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$$

Adib 3

$$\begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y=2 \\ ax+y=1 \\ -x+z=3 \end{cases}$$

(a=3 denean bateragarri determinatua da) $\Rightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y=2 \\ 3x+y=1 \end{cases}$

Sistema homogenoak

Sistema bat homogeneoa da, gai aske guztiak 0 direnean.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots + \dots\dots + \dots\dots + \dots\dots = \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Heina (A) = Heina (Z) denez beti, sistema homogeneoak <u>beti dira bateragarriak.</u>

- Heina (A/Z) = ezezagun kopurua denean, BATERAGARRI DETERMINATUA $\rightarrow$ Soluzio bakarra: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

- Heina (A/Z) < ezezagun kopurua denean, BATERAGARRI INDETERMINATUA $\rightarrow$ ∞ soluzio.

Adibidea 1

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Heina (A) = heina (Z) = 3 $\rightarrow$ Soluzio bakarra : x = 0 , y = 0 , z = 0

Adibidea 2

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 4y - z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ heina (A/Z) = 2}$$

$\Rightarrow$ Sistema Bateragarri Indeterminatua

Sistema baliokidea: $\begin{cases} x - y = z \\ x + y = 2z \end{cases}$

Soluzioa $x = \dfrac{\begin{vmatrix} z & -1 \\ 2z & 1 \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{3z}{2}$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & 2z \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{z}{2}$ Hau da $\left(\dfrac{3\lambda}{2}, \dfrac{\lambda}{2}, \lambda\right), \forall \lambda \in \Re$

Parametrodun sistemak

I) Ekuazio kopurua eta ezezagun kopurua berdinak direnean

Adibidea

Eztabaida eta ebatz ezazu sistema "a" parametroaren arabera

$$\begin{cases}(a+1)x+y+z=3\\ x+2y+az=4\\ x+ay+2z=2\end{cases} \qquad \text{Heina (A)} \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 1 & a & 2\end{vmatrix} = -a(a+3)(a-2)$$

Kasuak:

♦ $a \neq 0$, $a \neq -3$ eta $a \neq 2$ denean , heina (A) = heina (Z) = 3. Sistema BATERAGARRI DETERMINATUA. Cramer-en sistema da eta soluzioak hauek dira:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1\\ 4 & 2 & a\\ 2 & a & 2\end{vmatrix}}{-a(a+3)(a-2)} = \frac{3}{a+3} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 3 & 1\\ 1 & 4 & a\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}}{-a(a+3)(a-2)} = \frac{9-2a}{-(a+3)(a-2)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & a & 2\end{vmatrix}}{-a(a+3)(a-2)} = \frac{4a+3}{(a+3)(a-2)}$$

♦ $a = 0$ denean, ordezkatu a-ren balioa

$$\begin{cases}x+y+z=3\\ x+2y=4\\ x+2z=2\end{cases}$$

A-ren heina <3 da, a =0 -rentzat det (A) = 0 bait da.

Eta $\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} \neq 0$ denez, heina (A) = 2 da.

Z-ren heina : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix} = 0$. Beraz, heina (Z) = 2

Heina (A) = heina (Z) < ezezagun kopurua $\Rightarrow$ Sist. BATERAGARRI INDETER.

Aukera dezagun Cramer-en sistema bat, emandakoaren baliokide dena:

$\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1 \neq 0$ denez, $\begin{cases}x+y=3-z\\ x+2y=4\end{cases}$ sistema aukera daiteke.

Soluzioak:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}}{1} = 2\text{-}2z \; ; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z\\ 1 & 4\end{vmatrix}}{1} = 1+z \qquad \text{Hau da : } (2-2\lambda, 1+\lambda, \lambda)\forall\lambda \in \Re$$

♦ $a = 2$ denean (ordezkatu a –ren balioa)

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

Bigarren eta hirugarren ekuazioei begiratuz, bistan dago sistema BATERAEZINA dela. Hala ere, kalkulatu ditzagun A eta Z-ren heinak:

Heina (A) < 3 , det (A) = 0 delako. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ denez, heina(A) = 2

Heina (Z) $\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0.$ Beraz, heina(Z) = 3

$\Rightarrow$ heina(A) $\neq$ heina(Z) $\Rightarrow$ Sistema BATERAEZINA.

♦ $a = -3$ denean (ordezkatu a –ren balioa)

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 4 \\ x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

$a = -3$ kasurako $|A| = 0$ denez, heina(A)<3 da

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, beraz, heina (A) = 2

Heina (Z) : $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -17 \neq 0$ beraz, heina (Z) = 3

$\Rightarrow$ sistema BATERAEZINA.

II) Ekuazio kopurua > Ezezagun kopurua

Adibidea

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x + (a+1)y = 2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

A= $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & a+1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ heina(A) $\leq$ 2

Z-ren heina : $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a+1 & 2 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2$

Kasuak:

- $a \neq 1 \quad \Rightarrow$ heina (Z) = 3 eta heina(A)=2 $\left(\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 \neq 0 \quad , a \neq 1 \quad bada \right)$

  $\Rightarrow$ Sistema BATERAEZINA.

- a = 1 $\Rightarrow$ (ordezkatu a-ren balioa)

  $$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

  A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ heina(A) = 1

  $\Rightarrow$ Sistema BATERAGARRI INDETERM.

  Z= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ heina (Z) = 1

  Ezezagun kopurua =2. Beraz sistema baliokidetzat {x+y=1 har dezakegu.
  Soluzioak y = λ
  x = 1- λ (1- λ, λ) $\forall \lambda \in \Re$

III) <u>Ekuazio kopurua < Ezezagun kopurua</u>

<u>Adibidea</u>

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay + z = a^2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

h(A) $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a$; $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = (1 + a)(1 - a)$

Kasuak:

- $a \neq 1 \quad \Rightarrow$ heina(A) =2 eta heina(Z) = 2. Ezezagun kopurua = 3 $\Rightarrow$ S. BAT. IND.

  Sistema baliokidea: $\begin{cases} ax + y = a - z \\ x + ay = a^2 - z \end{cases}$

- a = 1 $\Rightarrow$ (ordezkatu a-ren balioa)

  $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ h(A) = h(Z) = 1 S. BATER. INDETER.

  Soluzioa: x=$1 - \lambda - \mu$ y=λ z=μ $\forall \lambda, \mu \in \Re$

ARIKETAK

1- Eztabaida eta ebatz itzazu ondoko sistemak, parametroaren arabera:

a) $\begin{cases} x+y+mz=0 \\ 3x+2y+4mz=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2y-z=a \\ 3x-2z=11 \\ y+z=6 \\ 2x+y-4z=a \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z=a+1 \\ x+y+(a-1)z=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+my-z=0 \\ mx+3y=0 \\ 2mx+7y-mz=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+(1+a)y+z=2a \\ x+y+(1+a)z=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x-y=2 \\ ax-2y=1 \\ 2x+ay=2 \\ x+5y=a \end{cases}$ h) $\begin{cases} mx+2y=2 \\ 2x+my=m \\ x-y=-1 \end{cases}$

2- Eztabaidatu "a"-ren arabera $\begin{cases} x+2y+z=a \\ x+2y+3z=3a \\ 2x+4y+az=4 \end{cases}$ sistema. Ebatzi, posible bada, a = -2 denean.

3.- Kutxa batean hiru motako txanponak daude: bi eurokoak, euro batekoak eta 50 zentimokoak.
Guztira 33 txanpon daudela eta guztien balioa 40 euro dela jakina da.
Mota bakoitzeko txanpon-kopurua zehaztea posible al da?
Erantzuna baiezkoa izatekotan aurkitu mota bakoitzeko txanpon kopurua.
Erantzuna ezezkoa izatekotan, aurkitu aipatutako moduko 33 txanponeko bi multzo desberdin gutxienez, txanponen balioa bi kasuetan 40 euro delarik

Gauss-en metodoa :

Helburua , sistema triangeluar bat lortzea da ; hau da , diagonal azpiko elementu guztiak "zero" egin.

Adibide 1

Ebatzi $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x-5y+3z=4 \\ 5x+y+7z=11 \end{cases}$ sistema.

Pausoak :

I) Koefiziente eta gai independienteak,adierazi matrize batetan : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{array}\right)$

II) Lortu matrize triangeluarra

-Egin "zeroak" 1. zutabeko "2" eta "5" zenbakiak : $l_2 = l_2 - 2l_1$
$l_3 = l_3 - 5l_1$

-Egin "zero" 2. zutabeko 11 zkia : $l_3 = l_3 + 11.l_2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{array}\right)$

III) Lortzen den sistema,emandakoaren baliokide da :

$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ -y+z=-2 \\ 13z=-26 \end{cases}$ Ebatzi azken ekuaziotik hasita , atzetik aurreruntz :

3.ekuaz : **z = -2**
2.ekuaz : -y +2 = -2 ; **y = 0** **Soluzio bakarra. Sistema bater. determinatua.**
1.ekuaz : x - 0 -2 = 3 ; **x= 5**

Adibide 2

Ebatzi $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y-2z=0 \\ 3x-3y+2z=0 \end{cases}$ sistema

Pausoak :

I) Adierazi matrize batean: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$

- Aldatu 1. eta 2. lerroak. "Zeroak" lortzeko, hobe duzu 1 (edo -1) zenbakia eduki "zutabe burutzat".

(Trukatu daitezke 1. eta 2. zutabea ere . Hori eginez gero , sistema baliokide triangeluarra idazten duzunean (III. pausoa) ,kontuan izan 1. zutabea "y" ezezagunari dagokiola eta 2. zutabea "x"-i.)

Hau da: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$

II) Egin 0 lehen zutabeko 2 eta 3 zenbakiak : $l_2 = l_2 - 2l_1$ eta $l_3 = l_3 - 3l_1$

Egin 0 bigarren zutabeko azken zbkia : ....

III) Idatzi sistema baliokidea :

IV) Egin ebazpena azken ekuaziotik hasita :

Adibide 3

Ebatzi $\left\{\begin{array}{c} x + y - z = 0 \\ 2x - y = 1 \\ x - 2y + z = 3 \end{array}\right.$ sistema.

Laburpena. Sistema motak Gauss-en metodoa erabiliz:

Bateragarri determ.	**Bateragarri indet.**	**Bateraezina**
$\left(\begin{array}{cccc\|c} * & - & - & - & - \\ 0 & * & - & - & - \\ 0 & 0 & * & - & - \\ 0 & 0 & 0 & * & - \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cccc\|c} * & - & - & - & - \\ 0 & * & - & - & - \\ 0 & 0 & * & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cccc\|c} * & - & - & - & - \\ 0 & * & - & - & - \\ 0 & 0 & * & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - \end{array}\right)$

ARIKETAK

1.- Egitzazu sistema hauen ebazpenak Gauss-en metodoa erabiliz :

a) $\begin{cases} 5x - y + z = 13 \\ x - 2y + 3z = 12 \\ 2x + y + z = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ x + z = 0 \\ y - z + 2t = 2 \\ x - 2y + 2z - t = -1 \end{cases}$

2.- Aurki ezazu a-ren balioa, honako sistema hau bateragarri indeterminatua izan dadin:
(Gauss erabili)

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ x + 2y - z = 4 \\ 4x + 3y + z = a \end{cases}$$

3.- Kalkulatu a-ren balioa sistema hau bateraezina izan dadin:
(Gauss erabili)

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ -2x + y = 6 \\ 3x + az = 14 \end{cases}$$

EKUAZIO SISTEMAK

Galderak :

1. Izan bitez "m"=ekuazio kopurua eta "n"=ezezagun kopurua . Aztertu sistema hauek :

- **a)** m=3 eta n=2 dela jakinik , izan al da bateragarria determinatua ?
- **b)** m=2 eta n=3 delarik , izan al da bateraezina ? Eta,bateragarria determinatua?
- **c)** m=2 eta n=4 delarik ,izan al da bateragarria?
- **d)** m=n=3 eta matrize zabalduaren heina 3 delarik, derriorrez bateragarria izan behar du ?
- **e)** m=5 eta n=2 delarik , izan al da bateragarria determinatua ? Arrazoitu
- **f)** Sistema homogeno batetan m=n=3 da . Eztabaidatu bateragarritasuna eta soluzio motak heinaren arabera.

2. Manuk, bi arkatz, boligrafo bat eta errotuladore bat erosi ditu paperdenda batean, orotara 7€ ordaindu duelarik. Mirenek, ordea, arkatz bat, bi boligrafo eta errotuladore bat erosi ditu, guztira 9€ ordainduz. Azkenez, Jonek, hiru arkatz eta errotuladore batengatik 5€ ordaindu ditu.
Nahikoak al dira aurreko datuak, arkatz, boligrafo eta errotuladore bakoitzaren prezio zehatza kalkulatu ahal izateko?. Erantzuna baiezkoa bada, kalkulatu prezioak; ezezkoa bada, argudiatu zergatia eta, soluzio gisa, aurkitu gutxienez bi modu desberdin.

3. $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ x - my = 5 \end{cases}$ sisteman :

a) Zeintzu "m"-rentzat da x=0?
b) Zeintzu "m"-rentzat da sistema bateraezina ?

4. Sistemaren matrizeen heinak kalkulatu gabe , aurki itzazu arrazonatuki "a" parametroaren bi balio, ondoko sistema bateraezina izan dadin :

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ -2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y = 2 \\ 5x + ay = 3 \end{cases}$$

5. Erabili Gauss-en metodoa ondoko sistemaren bateragarritasuna aztertzeko “a” eta “b” parametroen arabera.

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ 4x - y = 1 \\ x + 2y = b \end{cases}$$

ARIKETAK

1. Ebatzi ondoko sistemak:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + y + t = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$

2. Eztabaidatu eta ebatzi sistema hauek parametroaren arabera:

a) $\begin{cases} kx + 3y = 2 \\ 3x + 2y = k \\ 2x + ky = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx + z + t = 1 \\ my + z - t = 1 \\ my + 2z - 2t = 2 \\ mz - t = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + az = 0 \\ -2y + z = -2 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = 2a \\ x + 2y = 3a \\ x - 2y = 4a \end{cases}$

3. Eztabaida ezazu ondoko sistema *a* parametroaren arabera

$$\begin{cases} x + y + az = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + ay - 3z = 0 \end{cases}$$

Ebatzi, posible bada, a = 1 denean eta a = 2 denean.

4. Eztabaidatu ondoko sistema “a” eta “b” parametroen arabera. (Ez da derrigorrezkoa ebazpena egitea).

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{cases}$$

5. Froga ezazu, ondoko sistema bateragarri determinatua dela edozein “a” , “b” eta “c”-rentzat. Aurkitu soluzioa a=2, b=2 eta c=0 kasurako.

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ x + z = b \\ x - z = c \end{cases}$$

6. Aztertu ondoko sistemen bateragarritasuna “a” eta “b” parametroen arabera.

a) $\begin{cases} -x + 2y = a \\ 2x - 4y = b \\ -3x + 6y = 6 \end{cases}$

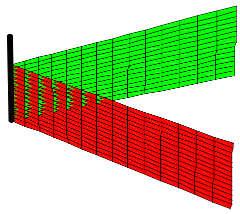
b) $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ 2x + by = 0 \end{cases}$

Hiru ezezaguneko ekuazio-sistemen esangura geometrikoa

I) Hiru ezezagun dituen ekuazio lineal bat. Geometrikoki plano bat adierazten du
Adib. 2x+3y+z = 1 (π planoa)

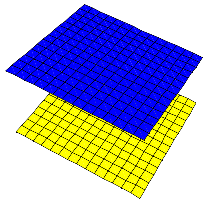
II) Bi ekuaziodun sistemak. Kasuak:

a) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 & (\pi_1) \\ x+y+z=5 & (\pi_2) \end{cases}$



Sistema, bateragarria indeterminatua da.(∞ soluzio)
Heina (A)= Heina (Z)=2 eta inkognita kopurua 3 da.
Bi planoek, elkar zuzen bat mozten dute

b) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 & (\pi_1) \\ 4x+6y+2z=7 & (\pi_2) \end{cases}$ sistema, bateraezina

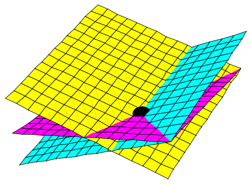


Ez du soluziorik. Heina (A)=1 eta Heina (Z)=2
Bi planoak paraleloak dira

c) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 4x+6y+2z=2 \end{cases}$ Bi planoak, bat dira : Heina (A)=Heina(Z)=1

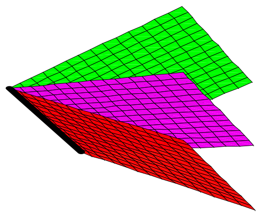
III) Hiru ekuaziodun sistemak. Kasuak:

a) $\begin{cases} \pi_1 : 2x+y-z=11 \\ \pi_2 : x-3y=-20 \\ \pi_3 : 4x+2y+5z=8 \end{cases}$ Sistema bateragarria determinatua



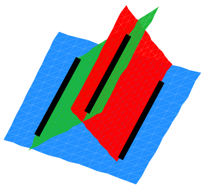
Heina (A)=Heina(Z)=3
Soluzio zehatza : x=1 , y=7 eta z=-2
Hiru planoek P(1,7,-2) puntua dute amankomunean

b) $\begin{cases} \pi_1 : x+y-z=-2 \\ \pi_2 : 2x-y+3z=-5 \\ \pi_3 : 3x+2z=-7 \end{cases}$ Sistema bateragarria indeterminatua



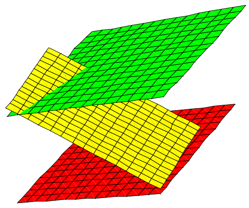
Heina (A)=Heina(Z)=2 eta 3 ezezagun
Hiru planoek zuzen bat dute amankomunean

c) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x = 17 \end{cases}$ Sistema bateraezina



Heina(A)=2 eta Heina(Z)=3
Hiru planoek amankomunean ez dute ezer, baina binaka hartuta, zuzenak mozten dituzte (r_1 , r_2 *eta* r_3)

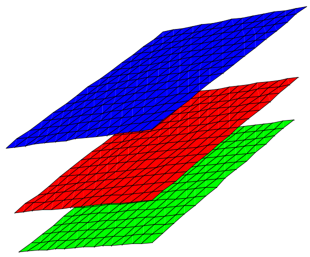
d) $\begin{cases} \pi_1 : \; 2x + y - z = -6 \\ \pi_2 : \; 4x + 2y - 2z = -1 \\ \pi_3 : \; 3x - y + z = -5 \end{cases}$ Sistema bateraezina



Heina(A)=2 eta Heina(Z)=3
Hiru planoek amankomunean ez dute ezer
Binaka hartuta:

- π_1 eta π_2 paraleloak dira
- π_3 planoak, beste biak mozten ditu, r_1 eta r_2 zuzenak emanik

e) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ 4x - 2y + 6z = -5 \\ -2x + y - 3z = -7 \end{cases}$ Sistema bateraezina



Heina(A)=1 eta Heina(Z)=2
Hiru planoak paraleloak dira

f) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ 4x - 2y + 6z = -2 \\ -2x + y - 3z = 1 \end{cases}$ Sistema bateragarria indeterminatua

Heina(A)=Heina(Z)=1
Hiru planoak bat dira