Batxilergo Zientifiko-Teknikoa

MATEMATIKA I

3. ebaluazioa:

Funtzioak

Estatistika

Ignazio Zuloaga B.H.I. (Eibar)

FUNTZIOAK (I)

Funtzio batek bi aldagaien menpekotasuna adierazten du:

- Etxebizitzaren *prezioa* etxearen *azaleraren* funtziopean dago.
- Esfera baten *bolumena* bere *erradioaren* menpekoa da.
- ....

Bi aldagai erlazionatzen dira, bat **independentea** (x) eta bestea **dependentea** edo **menpekoa** (y).

Funtzioak **f, g, h...**letrez adierazten dira.

y=f(x) idazkerak "*y*" aldagaia "*x*"-ren menpe dagoela esan nahi du.

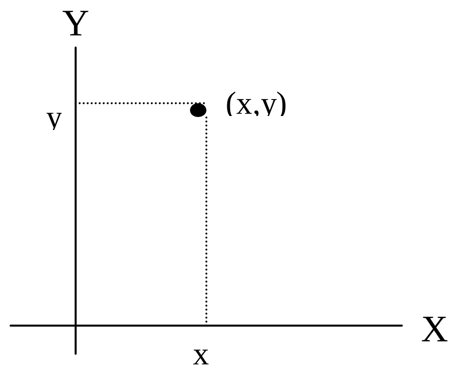
Grafikoa

Funtzioak koordenatu-ardatzetan irudikatzen dira.

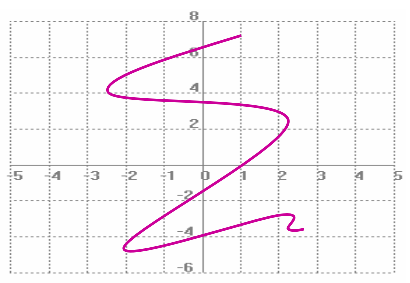
Abzisa-ardatzean *x*-ren balioen multzoa adieraziko dugu, eta ordenatu-ardatzean $y = f(x)$ funtzioaren balioen multzoa.

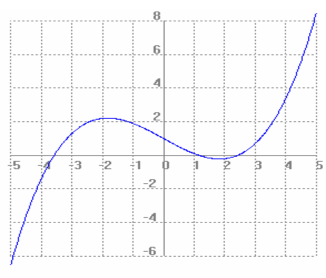
"x"-en balio bakoitzari "y" bakarra dagokio.

(x,y) bikoteak funtzioaren marraren puntuak dira.

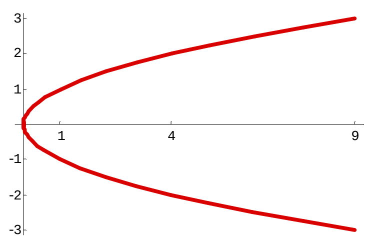


Ezkerrekoa ez da funtzioa , eskuinekoa bai

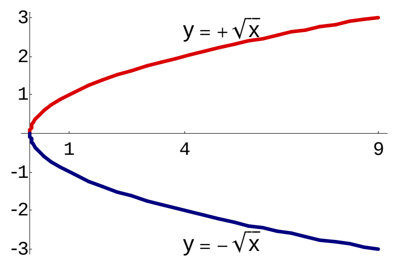




Ez da funtzioa:



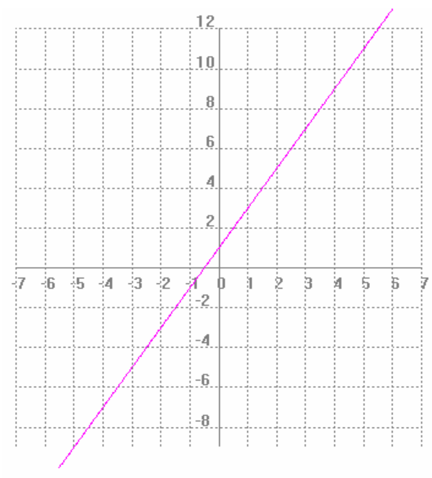
Bi funtzio dira:



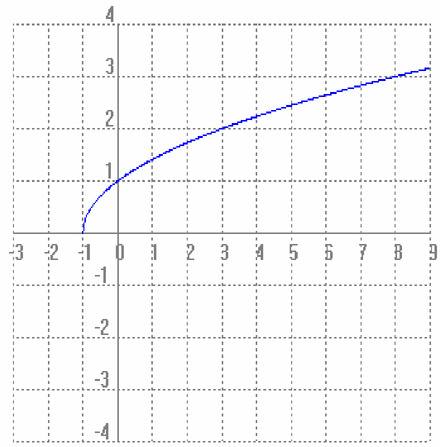
x-k har ditzakeen balioen multzoari funtzioaren **existentzia-eremua** esaten zaio, eta **D(f)** eran adieraziko dugu. Adibidez, $y = \dfrac{3}{1-x}$ funtzioan *x*-k ezin du 1 balioa hartu; beraz, existentzia-eremua $R - \{1\}$ da.

Funtzioak (*y*) hartzen dituen balio guztien multzoari **ibiltartea** esaten zaio. Adibidez, $y = x^2$ funtzioaren ibiltartea $[0\ ,\ \infty)$ da.

y = 2x+1 funtzioaren existentzia-eremua *R* da

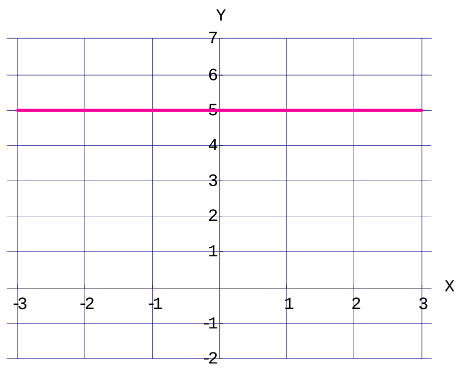


$y = \sqrt{x+1}$ *funtzioaren* eremua $[-1,\infty)$ da.

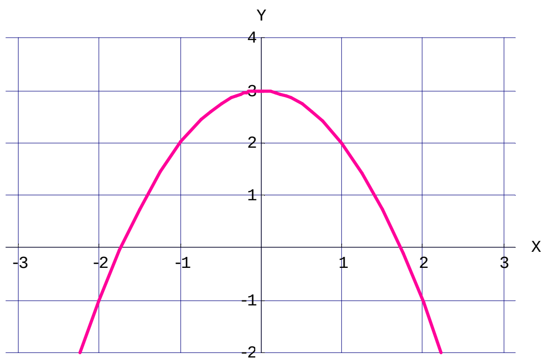


Funtzioen ibiltartea

f(x) = 5 funtzioaren ibiltartea 5 da

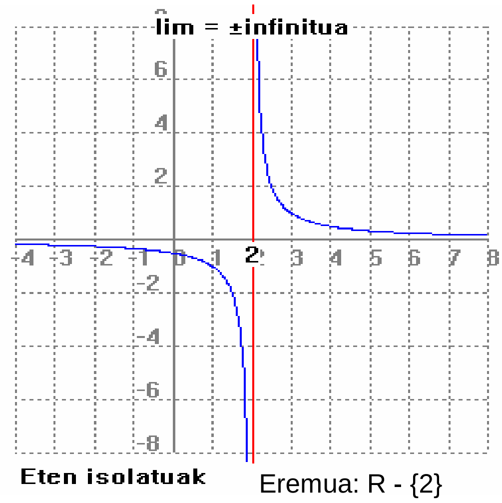


f(x) = -x^2 + 3 funtzioaren ibiltartea $(-\infty\ ,\ 3]$ da



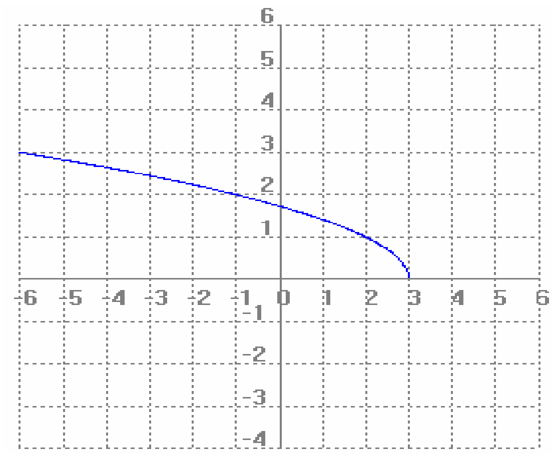
Adibideak.

$$y = \frac{1}{x-2}$$



Eremua: R - {2}
Ibiltartea: R - {0}

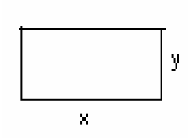
$$y = \sqrt{3-x}$$



Eremua: (- ∞ ,3]
Ibiltartea: [0,∞)

Ariketak.

1. Laukizuzen baten perimetroa 20 cm-koa da. Adieraz ezazu laukizuzenaren azalera x aldearen funtzioan.



2. Aurki itzazu ondoko funtzioen existentzia-eremua:

$y = x^2 - 1$; $y = +\sqrt{x-4}$; $y = \dfrac{1}{x}$

$y = \dfrac{5}{x^2-100}$; $y = \dfrac{x^2-100}{5}$; $y = \dfrac{5}{x^2+100}$; $y = \sqrt{x^2-9}$

$y = \sqrt{9-x^2}$; $y = \sqrt{x^2+2x-3}$; $y = \sqrt{3-2x-x^2}$; $y = \dfrac{x-1}{x^2-6x+5}$

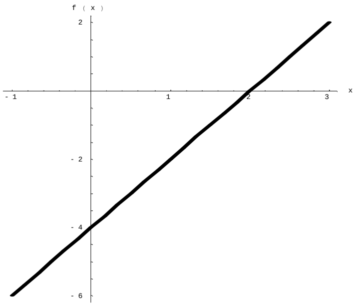
$y = \sqrt{2-x^2}$; $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$; $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$; $y = x^3 - 4x$

1. mailako funtzio polinomikoak: y =ax+b (zuzenak)

a, zuzenaren malda da.
b=0 denean, zuzena (0,0) puntutik pasatzen da.

y=2x-4 funtzioaren grafikoa:

x	y
0	-4
2	0

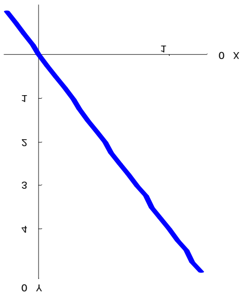


Aski da ondoko bi puntu ezagutzea:

- Non mozten du 0X ardatza? y = 0 eginda x = 2 ateratzen da; beraz, A(2,0) puntuan.
- Eta 0Y ardatza? x = 0 eginda y = -4 ; hau da, B(0,-4) puntuan.

Zuzenaren malda: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-4)}{2 - 0} = 2$

y = 4x

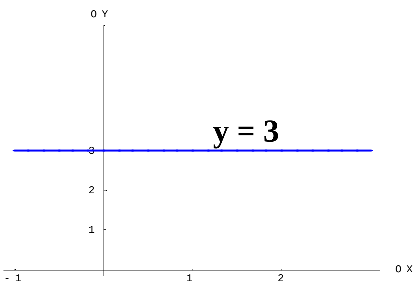


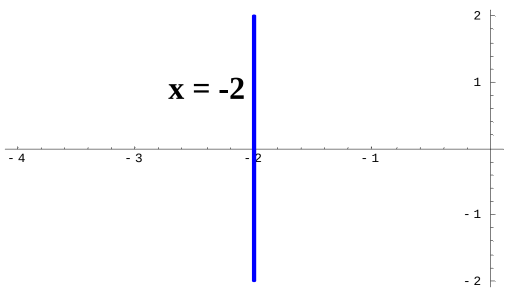
malda = 4 eta b = 0

x	y
0	0
1	4

OX ardatza **y = 0** zuzena da, eta OY ardatza **x = 0** zuzena.

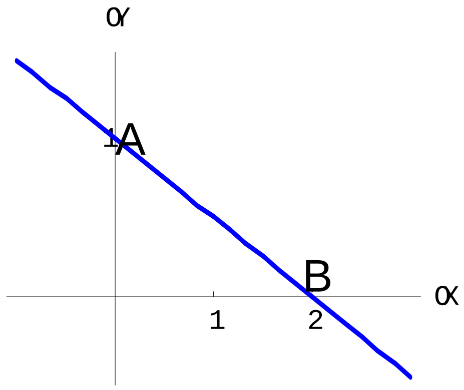
y = k zuzena, horizontala da;   **x= k** , ordea, bertikala.





Ariketa ebatzia:

Zein da irudiko zuzenaren adierazpen analitikoa?



$$\boxed{a = malda = \frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2}}$$

A(0,1) eta B(2,0) puntuetatik pasatzen da.

Bi eratan egingo dugu:

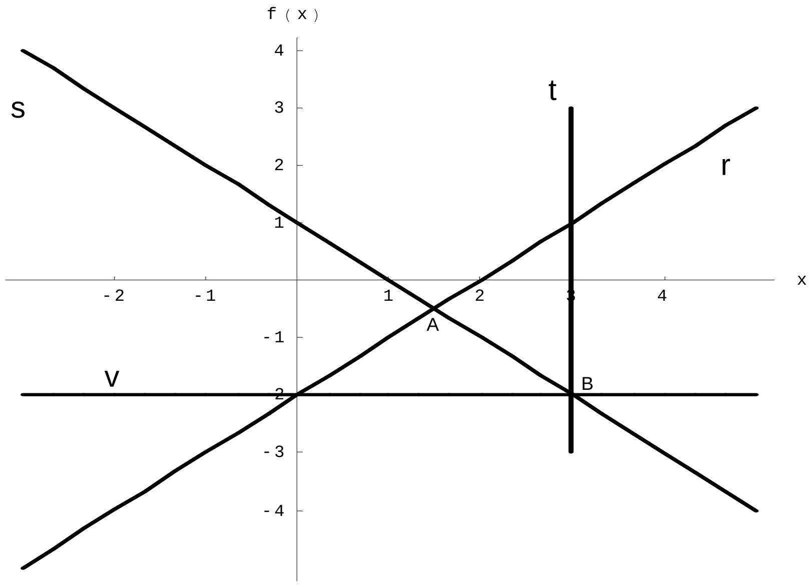
I) y=ax+b forma du.
A(0,1) puntua zuzenean dago; hots, **1=a(0)+b**
Berdin (2,0) puntua: **0=a(2)+b**.
Beraz, b=1 eta a=-1/2.
Zuzenaren ekuazioa: $\boxed{\mathbf{y = -x/2 + 1}}$

II) P(x_1,y_1) puntu bat eta *m* malda ezagutuz, zuzenaren ekuazioa $y - y_1 = m(x - x_1)$ da.

Puntua, A(0,1) da eta m = -1/2 . Beraz,
y -1 = -1/2(x - 0) ; $\boxed{\mathbf{y = -x/2 +1}}$

Ariketa

Zeintzu dira "r" , "s" , "t" eta "v" funtzioak?
Zeintzu dira A eta B puntuak?
Zenbat da "s" zuzenaren malda? . Eta "v"zuzenarena?



Balio absolutuak

y = | x |

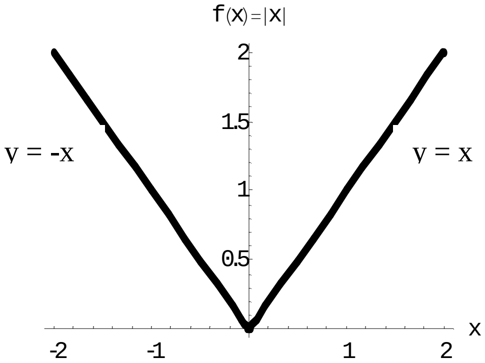
$$y = |x| = \begin{cases} x & ; \ x \geq 0 \\ -x & ; \ x < 0 \end{cases}$$

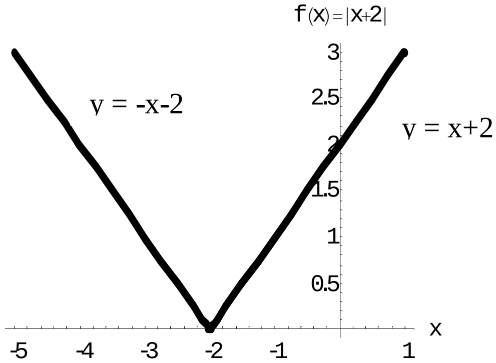
x	y
0	0
-1	1
-2	2
1	1
2	2

y = | x+ 2 |

$$y = |x+2| = \begin{cases} x+2 & ; \ x \geq -2 \\ -(x+2) & ; \ x < -2 \end{cases}$$

x	y
-2	0
-1	1
0	2
-3	1
-4	2

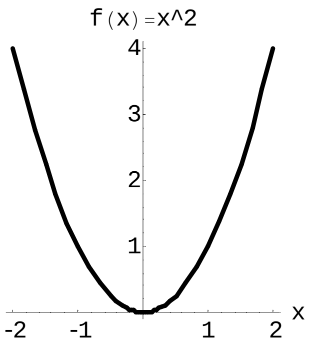


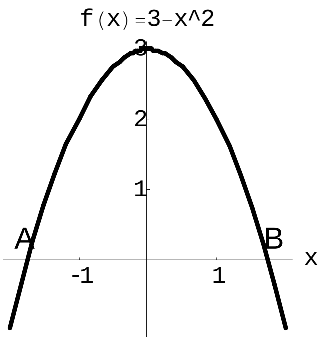


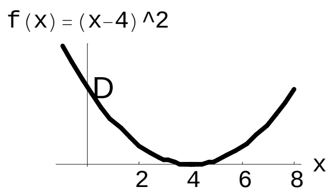
2. mailako funtzio polinomikoak: y = ax^2 + bx + c (parabolak)

Gorputz bat 5 m/seg-ko abiadurarekin pasatzen da jatorritik 10 km-ra dagoen puntu batetik. Une horretan azelerazioa konstantea bada, esaterako 2 m/seg^2-koa, gorputzaren posizioa (*s*) eta denbora (*t*) erlazionatzen duen funtzioa, *s* = *f(t)*, hauxe da: **$s = 10 + 5t + ½ .2t^2$**

$y = x^2$; $y = 3 - x^2$; $y = (x-4)^2$



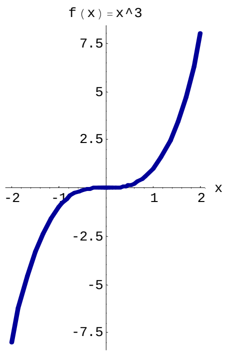




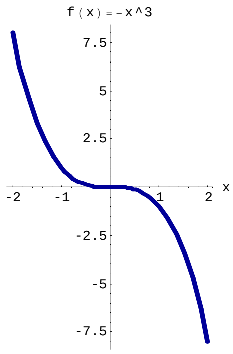
Zeintzu dira A,B eta D puntuak?

3. mailako funtzio polinomikoak

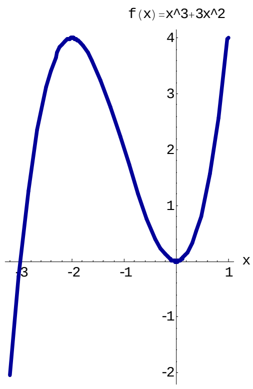
$y = x^3$



$y = -x^3$

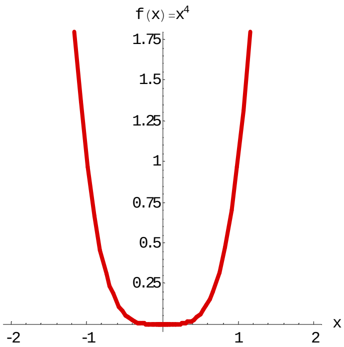


$y = x^3 + 3x^2$

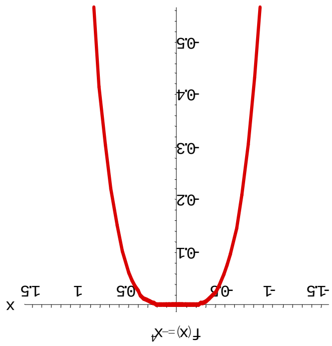


4. mailako funtzio polinomikoak

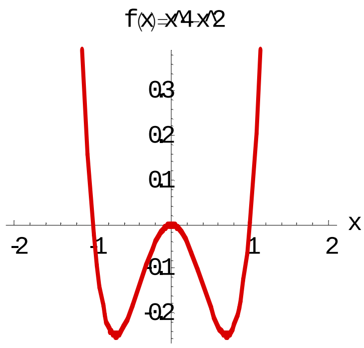
$y = x^4$



$y = -x^4$



$y = x^4 - x^2$

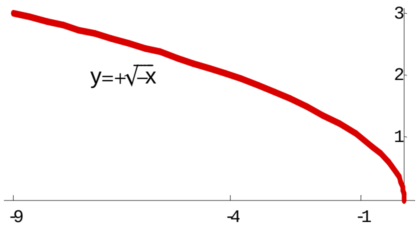


1. mailako funtzio irrazionalak

$y = \sqrt{-x}$

Existentzia-eremua: $\{x \le 0\}$

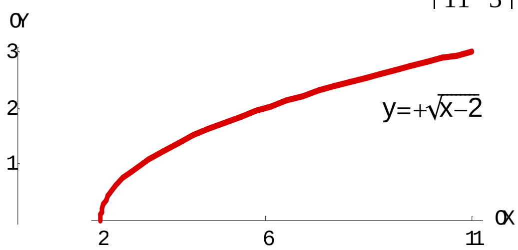
x	y
0	0
-1	1
-4	2



$y = \sqrt{x-2}$

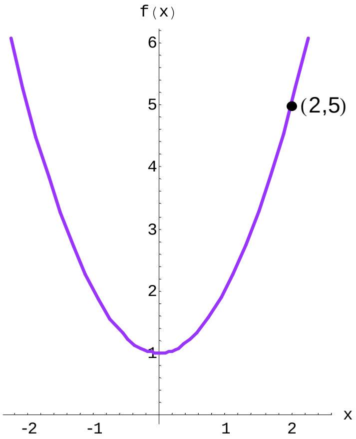
Existentzia-eremua: $\{x \ge 2\}$

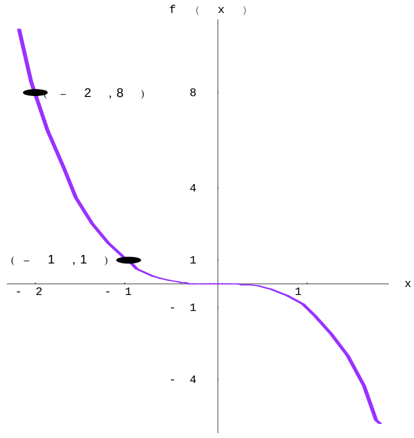
x	y
2	0
6	2
11	3

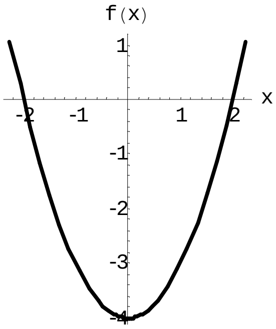


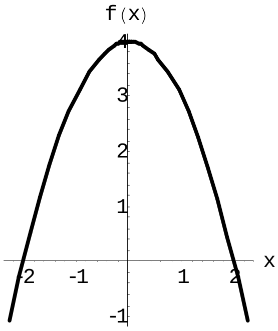
Ariketak

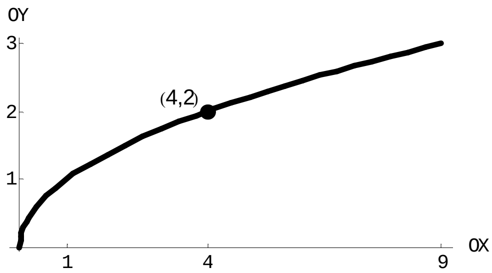
1. Zein da funtzio hauen adierazpen analitikoa?

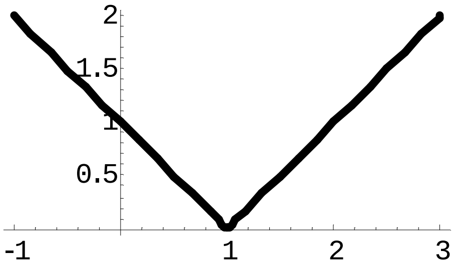


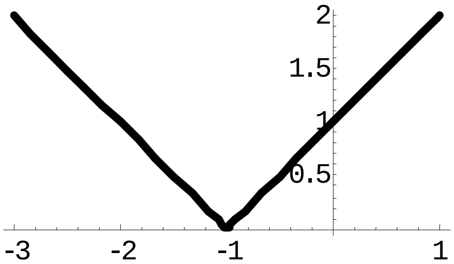












2. Adierazi grafikoki ondoko funtzioak:

$y = 1-x^2$; $y = x^2 + 3$; $y = 1+x^3$

$y = |3-x|$ $y = |x+3|$ $y = \sqrt{1-x}$

Alderantziz proportzionalak diren funtzioak

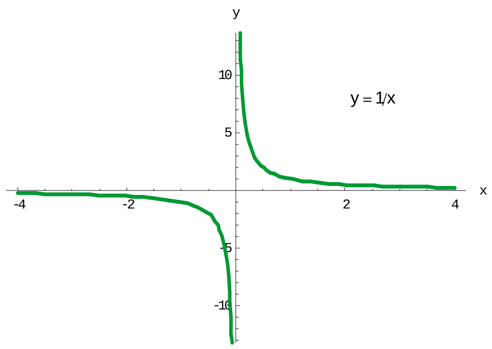
Askotan agertzen dira mota horietako funtzioak. Adibidez, tenperatura konstantean, gas masa baten presioa eta bolumenen arteko erlazioa $P = \frac{k}{B}$ da.

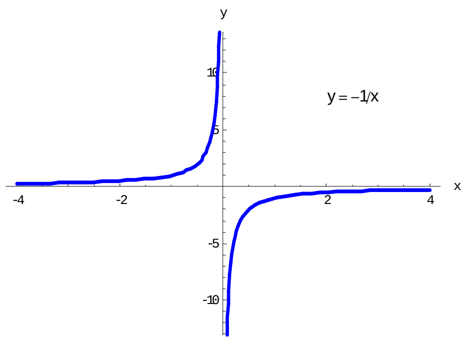
$\boxed{y = \frac{1}{x}}$ **Existentzia-eremua: R – { 0}**

Existentzia-eremua: I = R – { 0} $\boxed{y = -\frac{1}{x}}$

x	0,1	0,01	1	4	-1	-10
y	10	100	1	0,25	-1	-0,1

x	0,1	0,01	1	4	-1	-10
y	10	100	1	0,25	-1	-0,1



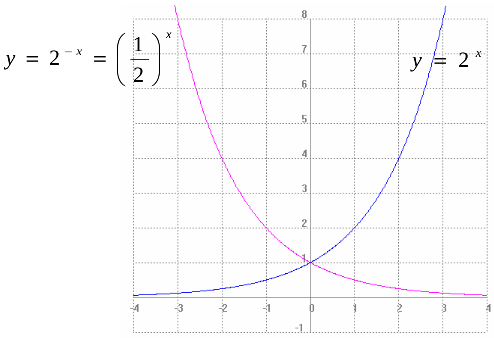


Funtzio esponentzialak: $y=2^x$ eta $(1/2)^x$

Txanpon bat" *n*" aldiz botatzen dugu airera.. Zenbat emaitza posible daude?

Lehenego jaurtiketan : 2
Bigarren " : 2.2 = 4
Hirugarrenean: 2.2.2 = 8
Laugarrenean: 2.2.2.2 = 16

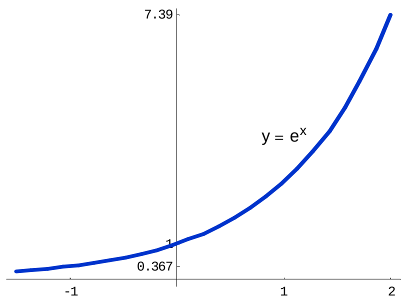
"*n*" jaurtiketa egin ondoren, emaitza guztiak adierazten duen funtzioa $\mathbf{y = 2^n}$ da.
Adieraz ditzagun grafikoki bi funtzio hauek : $\mathbf{y = 2^x}$ eta $\mathbf{y = (1/2)^x}$



Edozein *x*-rentzat (**existentzia-eremua:*R***), funtzioaren balioa , *y*, beti da positiboa.
Ibiltartea: $(0 , \infty)$

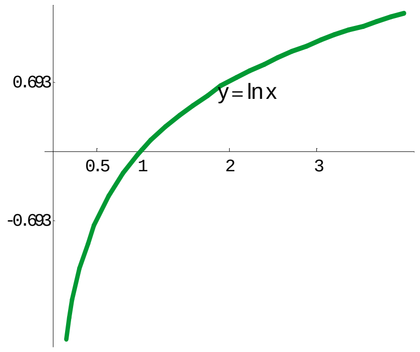
x	2^x	2^{-x}
-5	0,03125	32
-4	0,0625	16
-3	0,125	8
-2	0,25	4
-1	0,5	2
0	1	1
1	2	0,5
2	4	0,25
3	8	0,125
4	16	0,0625
5	32	0,03125

Oinarria "e" zenbakia (2,711828...) duen funtzio esponentziala: $y = e^x$



x	y
0	1
1	e = 2,71...
2	e^2 = 7,389...
-1	1/e = 0,3678...

Oinarria "e" zenbakia (2,711828...) duen funtzio logaritmikoa: y = ln x



x	y
1	0
2	0,693
3	1,099
0,5	-0,693

Existentzia-eremua: {x>0}

Ariketa

Adierazi grafikoki ondoko funtzioak: $y = \frac{2}{x}$ $\quad y = e^{-x}$

Zatika definituriko funtzioak

$$y = \begin{cases} -x-1 & \text{baldin} \quad x \le -3 \\ 3 & \text{baldin} \quad -1 < x < 1 \\ x-2 & \text{baldin} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

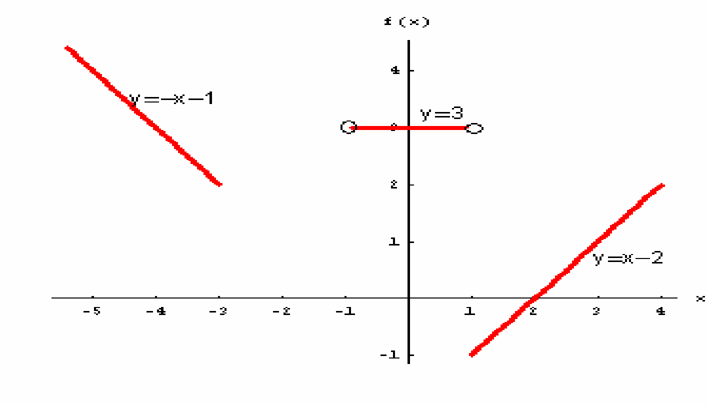
$x \le -3$ denean, $y = -x-1$ zuzena irudikatzen da.

x	y
-3	2
-4	3

-1<x<1 denean, y = 3 zuzen horizontala.

$x \ge 1$ denean, $y = x-2$ zuzena.

x	y
1	-1
2	0

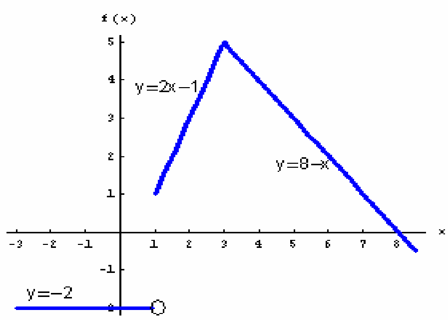


$$y = \begin{cases} -2 & ; \quad x < 1 \\ 2x-1 & ; \quad 1 \le x < 3 \\ 8-x & ; \quad x \ge 3 \end{cases}$$

$x < 1$ denean, $y = -2$ zuzena irudikatzen da.

$1 \le x < 3$ denean, $y = 2x-1$ funtzioa.

y	x
1	1
3	2
4,998	2,999



$x \ge 3$ denean, $y = 8-x$ funtzioa.

x	y
3	5
8	0

Ariketak

1. Adierazi grafikoki ondoko funtzioak:

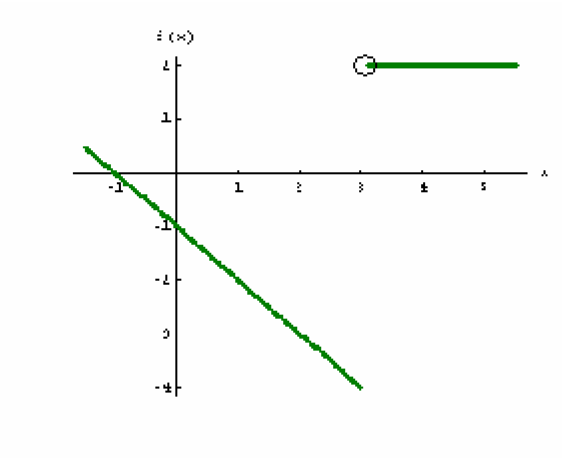
$$y=\begin{cases}-1 & ; \quad x\le 0\\ 2x & ; \quad 0<x<1\\ 2-x & ; \quad x\ge 1\end{cases}$$

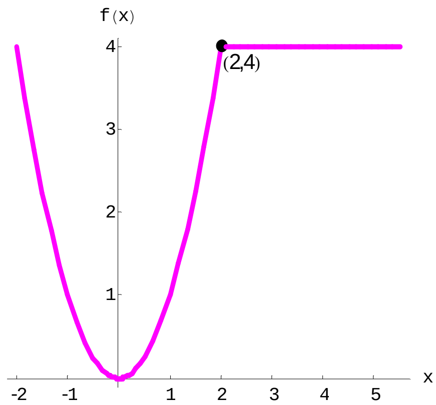
$$y=\begin{cases}2+x & ; \quad -2\le x\le 0\\ 1-x^2 & ; \quad 0<x\le 2\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}1-x & \text{baldin} \quad x\le 0\\ x^2 & \text{baldin} \quad x>0\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}-x & ; \quad x<0\\ 2 & ; \quad 0\le x<2\\ 2x-2 & ; \quad x\ge 2\end{cases}$$

2. Zein da funtzio hauen adierazpen analitikoa?

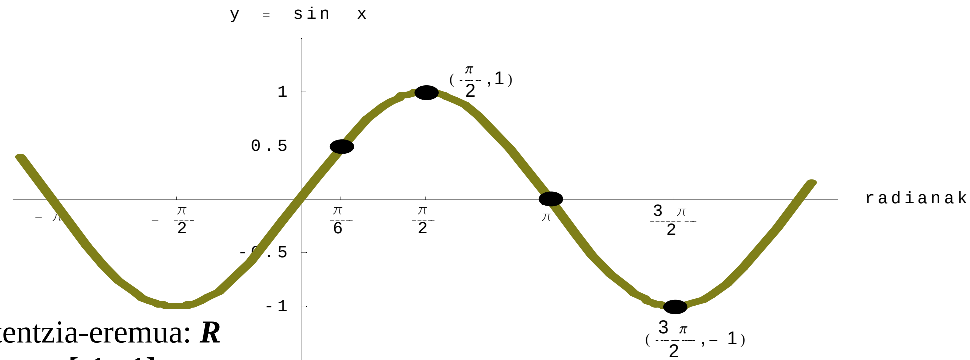




Funtzio trigonometrikoak

y = sin x

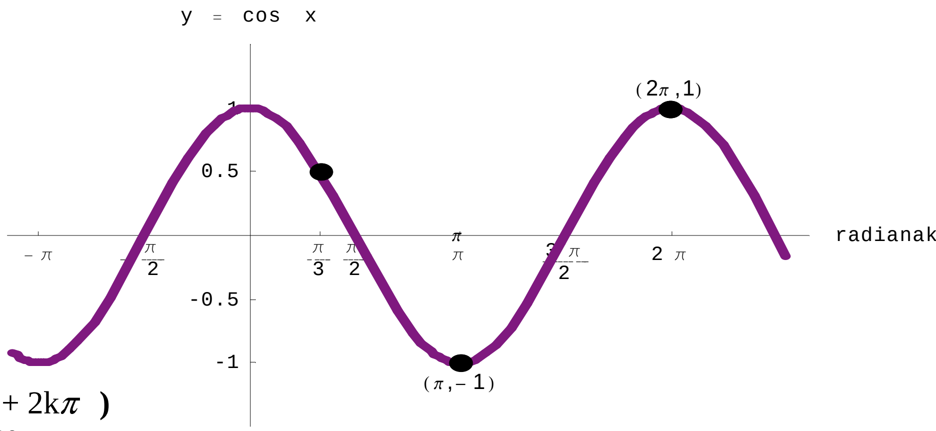
x	y = sin x
-90º	-1
0º	0
30º	0.5
90º	1
180º	0
270º	-1
360º	0



Existentzia-eremua: ***R***
Ibiltartea: **[-1 , 1]**
Funtzio periodikoa : sin x = sin (x + 2k π)
Periodoa = 360º

y = cos x

x	y = cos x
-90º	0
0º	1
60º	0.5
90º	0
180º	-1
270º	0
360º	1

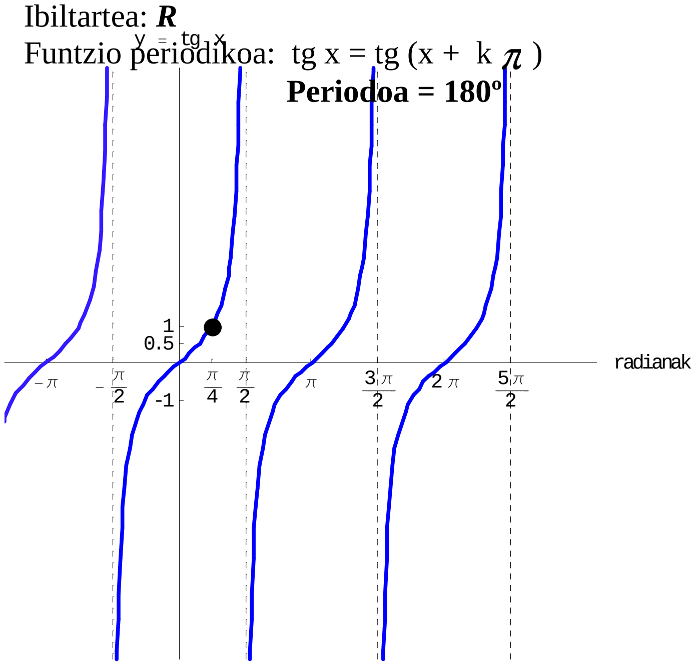


Existentzia-eremua: ***R***
Ibiltartea: **[-1 , 1]**
Funtzio periodikoa : cos x = cos (x + 2kπ)
Periodoa = 360º

y = tg x

x	y = tg x
-90º	$\pm\infty$
-45º	-1
0º	0
45º	1
90º	$\pm\infty$
180º	0
270º	$\pm\infty$
...	...

Existentzia-eremua: ***R – {-90º, 90º, 270º,...}***
Ibiltartea: ***R***
Funtzio periodikoa: tg x = tg (x + k π)
Periodoa = 180º

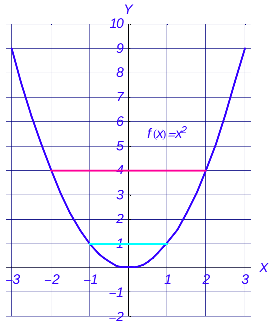


Asintota bertikalak

$x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$,... puntuetan.

Simetriak

➢ Simetria 0Y ardatzari begira



f simetrikoa da **y ardatzari** begira *x* eta –*x*ek irudi berdina dutenean, hots,

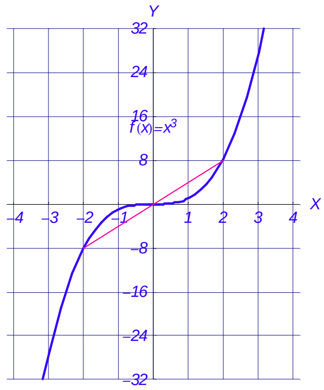
f(x)= f(-x) denean

Adibidez:

- 2 → 4 eta -2 → 4
- 1 → 1 eta -1 → 1

Mota horietako funtzioak **funtzio bikoitiak** direla esaten da.

➢ Simetria (0,0) puntuari begira

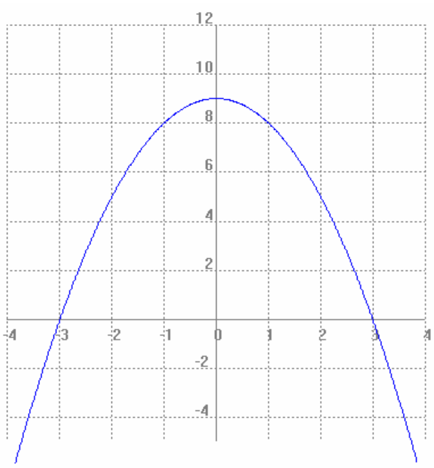


f simetrikoa da (0,0) **puntuari** begira x eta –xek irudi aurkakoa dutenean, hots, **f(x)=- f(-x)** denean

- 2 → 8
- -2 → -8

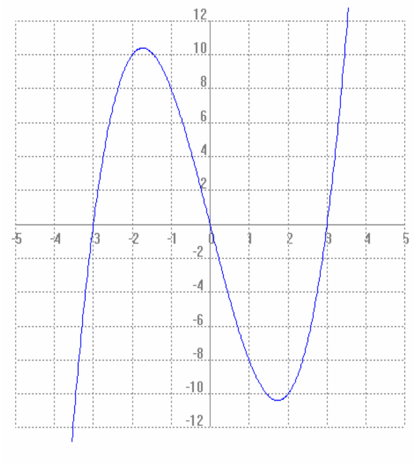
Mota horietako funtzioak **funtzio bakoitiak** direla esaten da.

Ariketak. Simetria, existentzia-eremua, ibiltartea



Aukeratu erantzuna

- Simetria
  - (0,0) puntuari begira
  - Bakoitia
  - Bikoitia
  - Y ardatzari begira
- **Existentzia- eremua**
  - (- ∞, 9]
  - (-∞, ∞)
- **Ibiltartea**
  - (- ∞, 9]
  - (-∞, 0)



Aukeratu erantzuna

- Simetria
  - Bakoitia
  - Bikoitia
  - Y ardatzari begira
  - (0,0) puntuari begira

- **Izate- eremua**
  - (-11, 11]
  - (-∞, ∞)

- **Irudi multzoa**
  - (- 3, 3]
  - (-∞, 0)
  - *R*

Ariketa
Azter ezazu ondoko funtzioen simetriak:

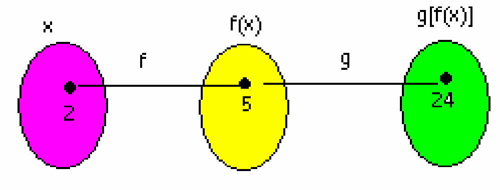
$$a)\ y = x^4 - 3x^2 + 1 \quad ; \quad b)\ y = x^3 - 1$$

$$c)\ y = x^3 - x \quad ; \quad d)\ y = \frac{1}{x} \quad ; \quad e)\ y = \frac{1}{x^2}$$

Funtzioen konposizioa

Har ditzagun $f(x) = x+3$ eta $g(x) = x^2-1$ funtzioak eta zenbaki erreal bat, x = 2 adibidez. Lehenik, 2 balioaren *f* bidezko irudia kalkula dezakegu, eta horrela $f(2) = 5$ lortuko dugu, eta jarraian *g* bidezko irudia; hau da: g(5) = g(f(2)) = 24

$2 \rightarrow f(2) = 5 \rightarrow g(f(2)) = 24$



Oro har, *f* eta *g* funtzioak emanik, *x* balioari **g(f(x))** balioa egokitzen dion funtzioari **f-ren eta g-ren funtzio konposatua** deritzo eta **g o f** eran idazten da.

$$x \rightarrow f(x) \rightarrow g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

Eragiketa honetan *g* funtzio bat , *f(x)* beste funtzio baten emaitzaren gain aritzen da.

Adibidea :

Eman ditzagun $f(x) = \sqrt{x}$ eta $g(x) = x^2 - 1$ funtzioak. Kalkula ditzagun *(g o f)(x)* eta *(f o g)(x)* funtzio konposatuak.

- $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$

- *(f o g)(x)* kasuan, *f* funtzioa *g*-ren emaitzari aplikatu behar zaio:
  $x \rightarrow g(x) \rightarrow f(g(x))$. Hau da, $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x^2-1] = \sqrt{x^2 - 1}$

(f o g) eta (g o f) ez dira berdinak

Ariketak

1. $f(x) = 2x+1$ eta $g(x)= x^2$ izanik , kalkula itzazu *f o g* eta *g o f* funtzio konposatuak . Betetzen al da trukatze propietatea?

2. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ eta $g(x) = x^3$ izanik, kalkula itzazu *(f o g) (2)* eta *(g o f) (2)*

3. Egiazta ezazu $y = (4x^2 - 1)^{10}$ funtzioa funtzio konposatua dela. Horretarako, har itzazu $f(x)=x^{10}$ eta $g(x)=4x^2 -1$ funtzioak eta kalkulatu *(f o g)(x)*.

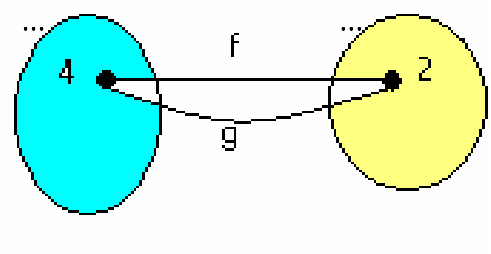
3. Egizu gauza bera $y = \sin 3x$ funtzioarekin. Har itzazu $f(x)=\sin x$ eta $g(x)=3x$ funtzioak eta kalkulatu *(f o g)(x)*.

Alderantzizko funtzioa konposizioarekiko

Funtzio batzuk, beste funtzio ezagun batzuren alderantzizko gisa sortu dira. Esaterako, $f(x)\sqrt{x}$ funtzioa $g(x) = x2$-aren alderantzizkoa da.

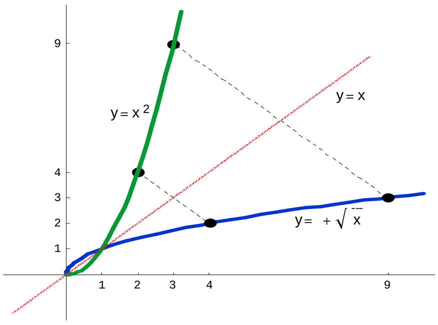
$f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad\qquad$ $g(x) = x^2$

$4 \to 2$ $\qquad$ $2 \to 4$
$9 \to 3$ $\qquad$ $3 \to 9$
$16 \to 4$ $\qquad$ $4 \to 16$
... $\qquad$ ...



Esate baterako, 4 balioaren irudia f bidez 2 balioa bada, orduan g-ren bidez 2 balioari 4 balioa dagokio. $g(x)$ funtzioari ***f*-ren alderantzizko funtzioa** deritzo **(f^{-1})**

Azter ditzagun $f(x)\sqrt{x}$ eta $f^{-1}(x) = x2$ funtzioaren grafikoak



Ikus dezakezunez, bi grafikoak simetrikoak dira 1. eta 3. koadranteen erdikariarekiko; hau da y = x zuzenarekiko.
Horren zergatia ondokoa da: (a , b) puntua f funtzioaren grafikokoa bada, (b , a) puntua f^{-1} funtzioaren grafikokoa da.

Nola kalkulatu funtzio baten alderantzizkoa ?

Adibidez, har dezagun $y = f(x) = 2x + 3$ funtzioa. Alderantzizko funtzioa lortzeko, ondoko prozedura erabiliko dugu:

- x aldagaia bakanduko dugu: $x = \dfrac{y-3}{2}$

- y aldagaiaren ordez x jarriko dugu, eta alderantziz, zeren normalean aldagai independentea x letraz adierazten baita eta aldagai dependentea y letraz:

$$y = \frac{x-3}{2}$$

2. adibidea . Kalkula dezagun $y = x2\text{-}3$ funtzioaren alderantzizkoa.

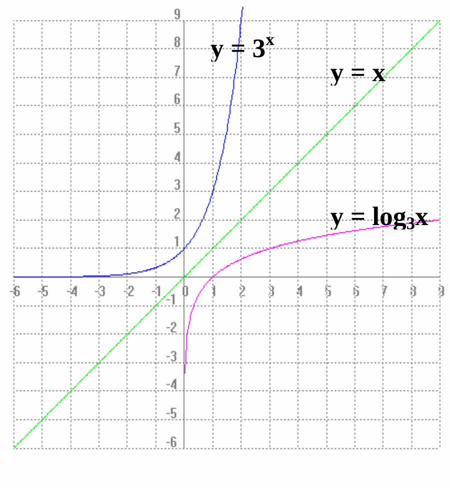
- x aldagaia bakandu: $x = \sqrt{y+3}$
- Aldagaiak trukatu:

$y = \sqrt{x+3}$

$y=\sin x$, $y=\cos x$ eta $y=tg\ x$ funtzioen alderantzizkoak $y=arc\ sin\ x$, $y=arc\ cos\ x$ eta $y=arc\ tg\ x$ dira, hurrenez hurren.
Hori dela eta, $arc\ sin\ 0{,}5 = 30^o$, $arc\ cos(-1) = 180^o$, $arc\ tg\ 1 = 45^o$ …dira.

Funtzio logaritmikoa ($y = ln\ x$) eta esponentziala ($y = e^x$) alderantzizkoak dira.

Funtzio esponentziala eta logaritmikoa: $y = 3^x$ eta $y = \log_3 x$



Bi grafikoak simetrikoak dira y = x zuzenarekiko.

x	3^x
-5	0,00
-4	0,01
-3	0,04
-2	0,11
-1	0,33
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243

x	$\log_3 x$
0,00	-5
0,01	-4
0,04	-3
0,11	-2
0,33	-1
1	0
3	1
9	2
27	3
81	4
243	5

Ez dago zeroren ez eta zenbaki negatiboen logaritmorik.

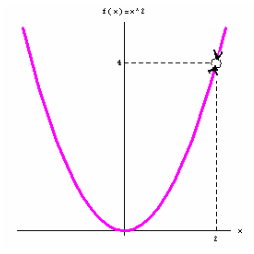
$y = \log_3 x$ funtzioaren existentzia-eremua: $\{x>0\}$

Limiteak

Funtzio baten limitea

1. adibidea. Demagun $f(x) = x^2$ funtzioa.

x aldagaiari 2tik hurbileko balioak emanez, zein zenbakitara hurbiltzen da $f(x)$ funtzioa? Ideia zehazteko bi taula hauek landuko ditugu:



Ezker aldetik (2^-)

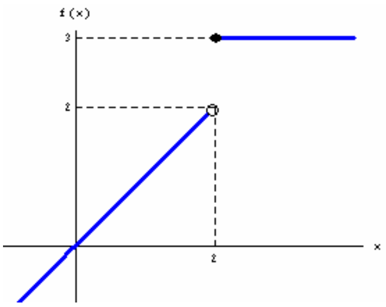
$x \to 2^-$	f(x)
1	1
1,9	3,6
1,99	3,96
1,999	3,996
…	…

Eskuinetik (2^+)

$x \to 2^+$	f(x)
3	9
2,1	4,4
2,01	4,04
2,001	4,004
…	…

x-a 2-ra hurbiltzen denean ezker zein eskuin aldetik, $f(x)$ funtzioa 4 baliora hurbiltzen da. Honela idatziko ditugu: $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

2. adibidea. Azter dezagun $f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x < 2 \\ 3 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$ funtzioa



Orain x 2-ra hurbiltzen denean, zein baliotara hurbiltzen da $f(x)$? Osa ditzagun taulak:

$x \to 2^+$	f(x)
3	3
2,1	3
2,01	3
2,001	3
…	…

$x \to 2^-$	f(x)
1	1
1,9	1,9
1,99	1,99
1,999	1,999
…	…

Kasu honetan, $f(x)$-ren balioak ez dira zenbaki finko batetara hurbiltzen:

- ezker aldetik 2-ra; hau da, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$
- eskuinetik 3-ra; hau da, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$

Albo-limiteak desberdinak direnez, ez du limiterik $x = 2$ puntuan; hots, ez dago $\lim_{x \to 2} f(x)$

Funtzio batek $x = a$ puntu batean limitea izango du baldin albo-limiteak berdinak direnean; hau da: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

$\boxed{\text{Limitea existitzen bada, bakarra da. Ezin ditu bi balio ezberdin hartu}}$

<u>3. adibidea</u>.

Demagun $f(x)=\begin{cases}4 & ; \quad x\leq -1\\ x^2+2 & ; \quad -1<x\leq 2\\ 8-x & ; \quad x>2\end{cases}$ funtziona.

Kalkula ditzagun $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ eta $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$a)$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=4$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=(-1)^2+2=3$ $\Rightarrow$ Ez dago $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

$b)$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2^2+2=6$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=8-2=6$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=6$

Limite infinituak puntu batean. Limiteak infinituan.

<u>1.adibidea.</u>

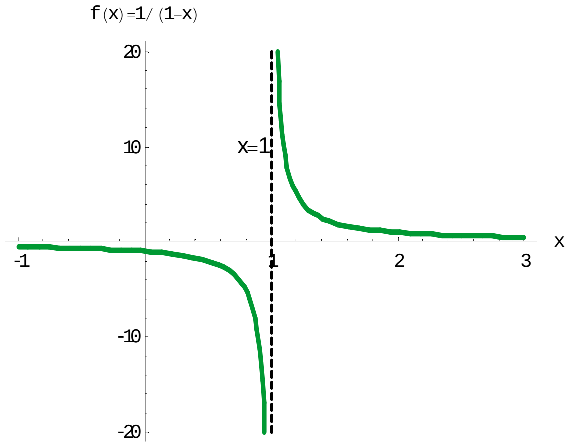
Saia gaitezen $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ funtzioaren limitea kalkulatzen $x_0 = 1$ abzisako puntuan.

Kontura zaitez ezen puntu horretan anulatu egiten dela frakzioaren izendatzailea.

Osa ditzagun $x_0 = 1$ puntuaren alboetako bi taulak:

$x\to 1^-$	0,9	0,99	0,999	...
f(x)	-10	-100	-1000	...

$x\to 1^+$	1,1	1,01	1,001	...
f(x)	10	100	1000	...



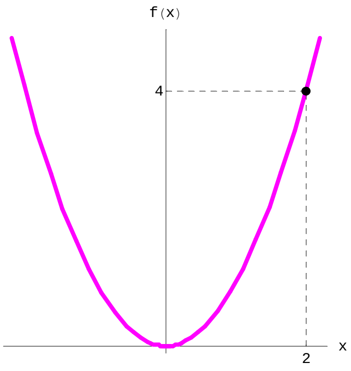
x-a *1*-era hurbiltzen denean ezker aldetik *f(x)* funtzioak $-\infty$ rantz jotzen du; ordea, eskuin aldetik $+\infty$ -rantz. Honela idatziko dugu:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ eta $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

$\Rightarrow$ Ez dago $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Kasu honetan *f(x)* kurbak **asintota bertikal bat du $x_0 = 1$ abzisako puntuan**

<u>2. adibidea</u>. Eman dezagun $f(x) = x^2$ funtzioa.

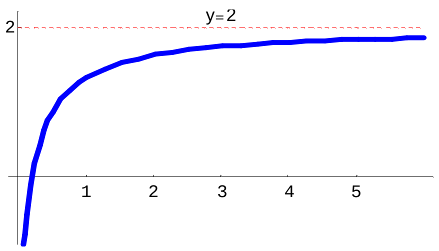


x-ren balioak zenbat eta handiagoak izan, *f*-ren balioak hainbat eta handiagoak egiten dira, eta ez dira hurbiltzen inolako zenbaki errealetara. Limitea plus infinitu dela esango dugu, eta honelaxe adieraziko dugu:

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

Kasu honetan, *x*-ak minus infinitura jotzen badu gauza bera gertatzen da: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$

<u>3. adibidea</u>.

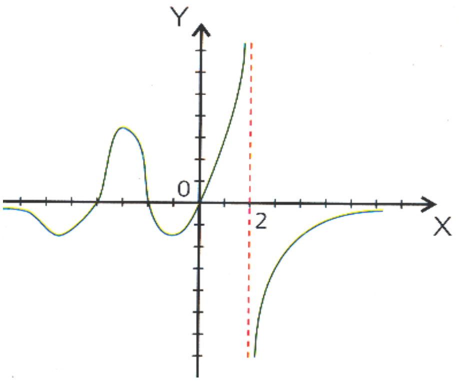


Alboko grafikoan ikusten dugunez, *x*-ren balioak zenbat eta handiagoak izan *f*-ren balioak hainbat eta hurbilago daude *2*-tik. Honela adieraziko dugu:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

Kasu honetan *f(x)* kurbak **asintota horizontala du y_0 = 2 ordenatu-puntuan**

<u>4. adibidea</u>.



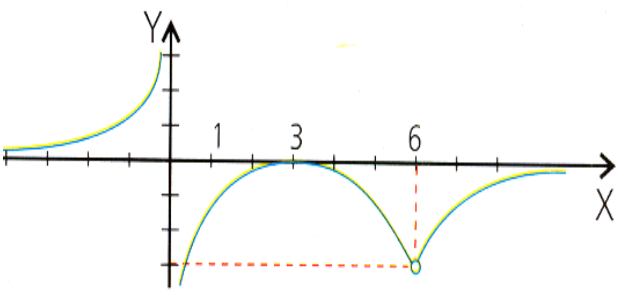
Grafiko horretan, ohar zaitez limite hauetaz:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

Funtzio horrek asintota horizontala dauka (y=0 zuzena) eta asintota bertikal bat ere (x=2 zuzena).

Ariketa. Demagun ondoko grafikoa. Kalkula itzazu:



$\lim_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim_{x \to 0} f(x)$

$\lim_{x \to 6} f(x)$

$\lim_{x \to 3} f(x)$

Limiteen kalkulua

$\lim_{x \to -2} (x^2 + 2) = 2^2 + 2 = 6$; $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x + 2}{x + 2} = \frac{2^2 - 2 + 2}{2 + 2} = \frac{4}{4} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{5 - x} = \frac{0}{5} = 0$; $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2}{5} = \frac{(\infty)^2 - 2}{5} = +\infty$

Batzuetan, *x* ordezkatu eta gero, honelako emaitzak agertzen dira:

$\frac{k}{0}$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; 1^∞ ; 0^0 edo $0.\infty$

Horiek dira INDETERMINAZIO kasuak. Soluzioa aurkitzeko, nori bere bidea jarraitu behar zaio

a) $\frac{k}{0}$.

Kasu horretan, limitearen balioa $+\infty$ edo $-\infty$ da.

Adibidez, $f(x)=\frac{4}{x-3}$ funtzioan:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{4}{x-3}=\frac{4}{-0{,}00000...}=\frac{+}{-}=-\infty \quad \text{eta} \quad \lim_{x\to 3^+}\frac{4}{x-3}=\frac{4}{+0{,}00000...}=\frac{+}{+}=+\infty$$

Asintota bertikala izango du x=3 abzisako puntuan.

Ariketa. Zenbat da $\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{2-x}$ eta $\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{2-x}$?

b) $\frac{0}{0}$ indeterminazioa.

1. adibidea. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ kasuan $\frac{0}{0}$ ateratzen da

Indeterminazio horri soluzioa aurkitzeko, faktoreetan deskonposatu behar dira zenbakitzailea eta izendatzailea, eta ondoren sinplifikatu.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1).(x^2+x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=1^2+1+1=3$$

2. adibidea. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x-6}$

Berriro ere $\frac{0}{0}$. Sinplifika dezagun eta lortu bere soluzioa:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x-6}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3).(x-3)}{2(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{2}=\frac{3+3}{2}=3$$

3. adibidea. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-7x^2+6x}{1-x}$

x=1 eginda $\frac{0}{0}$ ateratzen da.

Zenbakitzailea faktoreetan deskonposatzeko Ruffiniren metodoa erabili daiteke:

	1	-7	6	0
1		1	-6	0
	1	-6	0	0

$x^3-7x^2+6x=(x-1).(x^2-6x)$. Beraz:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-7x^2+6x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-6x)}{-(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-6x}{-1}=\frac{1^2-6.1}{-1}=5$$

Ariketa. Kalkula itzazu:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-10x+25}{5-x} \quad ; \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10} \quad ; \quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^3-7x^2+16x-12}$$

c) $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ indeterminazioa. Baldin funtzioa $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a\,x^m+...}{b\,x^n+...}$ bada, hiru kasu hauek gerta daitezke:

- **m > n** izatea. Orduan, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$. Adibidez,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+1}{2x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+2x-x^3}{5x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{5x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{5}=-\infty$$

- **m < n** izatea. Kasu honetan limitearen balioa 0 da. Esate baterako,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{5x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{5x}=\frac{2}{\infty}=0$$

- **m = n** izatea. Orduan, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{a}{b}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x+1}{5x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{5x^3}=\frac{4}{5}$$

Ariketa. Kalkula itzazu:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-5x^3}{7x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-5x^3}{7x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-5x^3}{7x^3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x^3}{7x^3}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x^3}{7x^2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x^3}{7x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x}{x+1}\right)^{2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{5x+1}\right)^{2x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+3}{9x^2}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x+3}{x^2}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+7x^2}}{2x+\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}5^{1-x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}5^{1-x}$

ARIKETAK

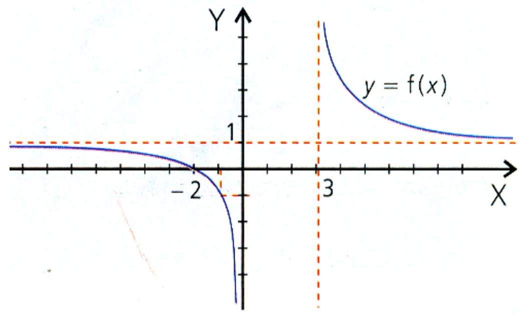
1. $f(x)=\begin{cases} 3-x & ; \quad x<1 \\ 2 & ; \quad 1\le x\le 3 \\ x+1 & ; \quad x>3 \end{cases}$ funtzioa emanda, kalkula itzazu $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ eta $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

2. Demagun f(x) funtzioaren grafikoa.

Kalkulatu:

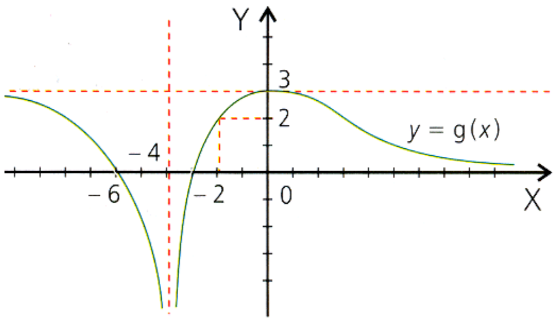
$\lim\limits_{x\to -2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $f(3)$



Zein zuzen du asintotatzat?

3. Demagun g(x) funtzioaren grafikoa.
Kalkula itzazu:



$\lim\limits_{x\to -6} g(x)$; $\lim\limits_{x\to -4^-} g(x)$

$\lim\limits_{x\to -4^+} g(x)$; $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$; $g(0)$

$g(-4)$; $g(-6)$

4. Kalkula itzazu:

$\lim\limits_{x\to\infty}(1-x+2x^3)$; $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x-2x^3)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{1-x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{1+x}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{x^2-4x+4}$; $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2}{3-x}$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{4-x^2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-1}{1+x^2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}5^{-2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x}{4x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+4x^3}{7+x^2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x^3-3x^2+3x-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)^{x+2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{5x^2}{1+2x^2}}$

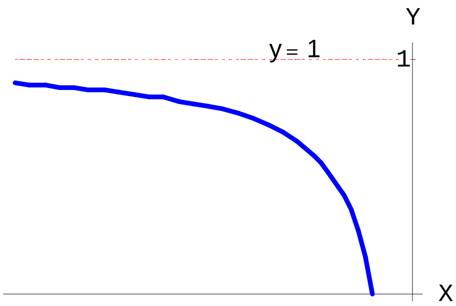
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}-\dfrac{3x^2+1}{3x}\right)$; $\lim\limits_{x\to -\infty}2^x$; $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{4x^2}{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{x-1}\right)^{2-x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{5x^2+1}}$

Adar infinituak. Asintotak

Adar infinitu bat zuzen batera hurbiltzen denean, zuzenari kurbaren **asintota** esaten zaio.

Asintota horizontalak

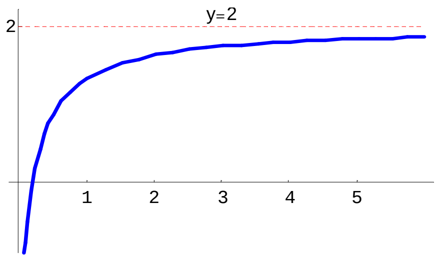
Behatu ondoko funtzioen adierazpen grafikoa:



Grafikoa *y = 1* zuzenera hurbiltzen da *x* aldagaia $-\infty$ rantz doanean. Hau da,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

y = 1 zuzena *f* funtzioaren asintota horizontala dela esaten da.



Grafikoa *y = 2* zuzenera hurbiltzen da *x* aldagaia $+\infty$ rantz doanean. Hau da,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

y = 2 zuzena *f* funtzioaren asintota horizontala dela esaten da.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ betetzen da.

f funtzioak infinituan dituen limieetako bat *L* bada,
y = L zuzena *f* funtzioaren asintota horizontala da.

Futzio arrazionalen kasuan, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, asintota horizontalak lortzeko, nahikoa da frakzioko zenbakitzaileko eta izendatzaileko polinomioen mailak aztertzea.

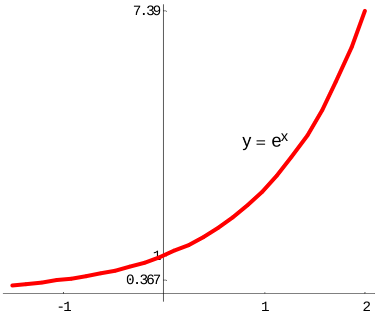
Hain zuzen, *P(x)*-ren maila *Q(x)*-ren maila baino txikiagoa bada, edo biak maila berekoak badira, infinituko limitea zenbaki erreala da, *L*. Beraz, *f(x)* funtzioak asintota horizontal bat izango du ***y = L*** ekuaziokoa.

Adibidea. Lortu $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-2}$ eta $g(x) = \dfrac{3x}{x^2-2}$ funtzioen asintota horizontalak.

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$. Beraz, **y = 3 zuzena** *f*-ren asintota horizontala da, alde bietatik.

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Beraz, **y = 0 zuzena** (OX ardatza) *f*-ren asintota horizontala da, alde bietatik.

Funtzio esponentzialen kasuan ere agertzen dira asintota horizontalak. Ikus ditzagun bi adibide:

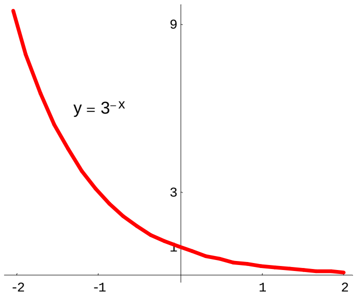


I) Demagun $y = e^x$ funtzioa.

x aldagaia $-\infty$ -rantz doanean, funtzioaren balioa *0*-rantz hurbiltzen da. Izan ere,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

y = 0 zuzena (OX ardatza) da *f*-ren asintota horizontala, eta, kasu honetan, hurbilketa ezker aldetik soilik egiten da.



II) Demagun $y = 3^{-x}$ funtzioa.

x aldagaia $+\infty$ -rantz doanean, funtzioaren balioa *0*-rantz hurbiltzen da. Izan ere,

$$\lim_{x\to+\infty} 3^{-x} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

y = 0 zuzena (OX ardatza) da *f*-ren asintota horizontala, eta hurbilketa eskuin aldetik soilik egiten da.

Funtzio esponentzialetan, berretzailea $-\infty$ egiten den kasuetan, OX ardatza du asintota horizontaltzat.

Ariketa

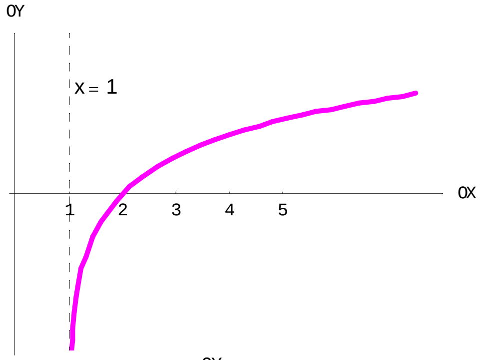
Lor itzazu ondoko funtzioen asintota horizontalak:

$a)\ y = \dfrac{1-3x^2}{4x^2}$; $b)\ y = \dfrac{2}{x}$; $c)\ y = \dfrac{x^3-1}{x^3-5x+6}$

$d)\ y = \dfrac{x^4-2x^2}{x^2+1}$; $e)\ y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x}$

Asintota bertikalak

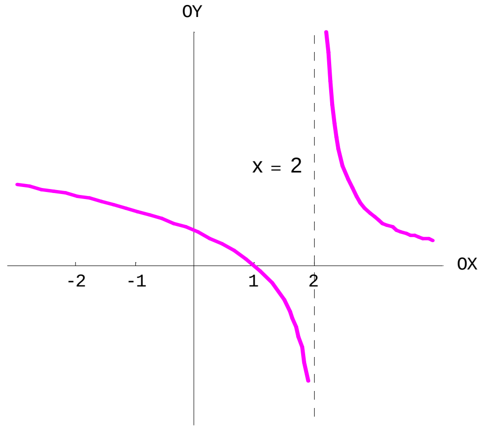
Behatu ondoko funtzioen adierazpen grafikoa:



Funtzioak $-\infty$ ra jotzen du *x* aldagaiak *1*erantz hurbiltzean eskuinetik. Hau da:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

***x*= *1* zuzena** *f* funtzioaren asintota bertikala dela esaten da.



Ezkerreko grafikoan, funtzioak $-\infty$ -rantz jotzen du *x* aldagaiak *2*rantz hurbiltzean ezkerretik, eta $+\infty$ -rantz *x* aldagaia *2*rantz hurbiltzean eskuinetik. Hau da:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \text{eta} \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

***x* = *2* zuzena** *f* funtzioaren asintota bertikala dela esaten da.

Funtzio batek asintota bertikala izango du x = a puntuan, baldin eta $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ bada.

Futzio arrazionalen kasuan, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$,asintota bertikala edukiko dute Q(x) izendatzailea 0 egiten duten *x*-ren balioetan, baldin x-ren balio horiek P(x) zenbakitzailea ere anulatzen ez badute.

Adibidea. *Lortu* $f(x) = \dfrac{5}{3-x}$, $g(x) = \dfrac{5}{x^2-4}$ *eta* $h(x) = \dfrac{x-1}{(x-1)(x-3)}$ *funtzioen asintota bertikalak.*

I) x – 3 = 0 ; x = 3 . $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

Beraz, ***x* = *3* zuzena** *f*-ren asintota bertikala da.

II) x^2-4 = 0 ; x = +2 eta x = -2

Beraz, ***x* = *-2* eta *x* = *2* zuzenak** dira *g*-ren asintota bertikalak

III) (x-1)(x-3) = 0 ; x=1 eta x=3

- **x=1 puntuan** zenbakitzailea ere anulatzen da; beraz, **ez du asintota bertikalik**.

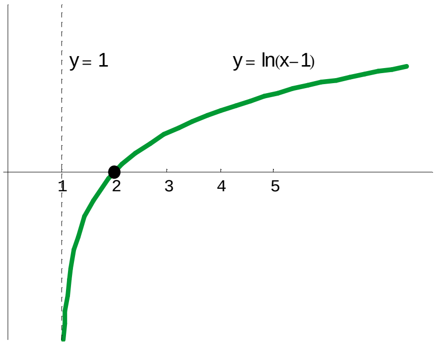
$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{2}$$

- **x=3** puntuan badu asintota bertikala.

$$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-3)} = \frac{2}{0} = \infty$$

Funtzio logaritmikoetan ere agertzen dira asintota bertikalak. Ikus ditzagun bi adibide:

I) Demagun *y = ln (x-1)* funtzioa.

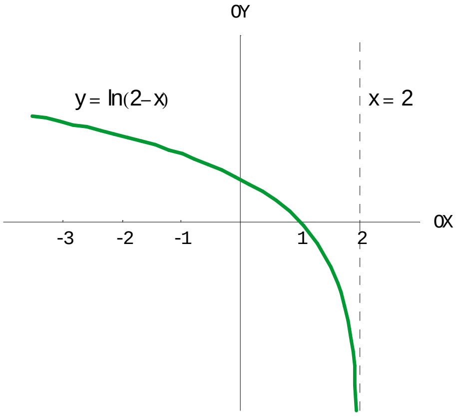


Existentzia eremua: $(1\,,\infty)$

$\ln 0 = -\infty$ denez, *x* aldagaia *1*rantz hurbiltzean eskuinetik, funtzioak $-\infty$-rantz jotzen du; hau da: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$.

Horregatik, ***x = 1*** zuzena *f* funtzioaren asintota bertikala da.

II) Demagun *y = ln (2-x)* funtzioa.



Existentzia eremua: $(-\infty\,, 2)$

$\ln 0 = -\infty$ denez, *x* aldagaia *2*rantz hurbiltzean ezkerretik, funtzioak $-\infty$-rantz jotzen du; hau da: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$.

Horregatik, ***x = 2*** zuzena *f* funtzioaren asintota bertikala da.

```
Ariketa
Lor itzazu ondoko funtzioen asintota bertikalak:
```

$a)\ y = x^3 - 2x^2 \quad ; \quad b)\ y = \dfrac{2}{x} \quad ; \quad c)\ y = \dfrac{x-1}{x^2-5x+6} \quad ; \quad d)\ y = \ln x$

Oharrak:

- Funtzio polinomikoek ez dute asintotarik
- Funtzio batek infinitu asintota bertikal eduki ditzake. Adibidez, *y = tg x* funtzioak
- Funtzio batek gehienez asintota horizontal bat eduki dezake; batzutan alde batetik, eta beste batzuetan bi aldeetatik $(+\infty$ - rantz eta $-\infty$ - rantz).

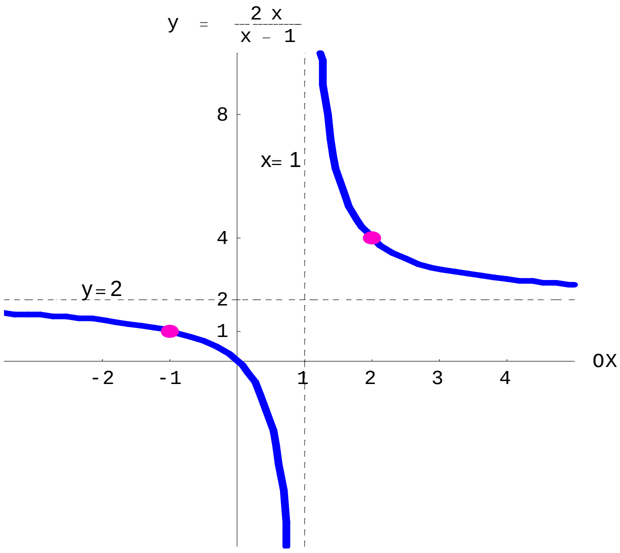
```
Ariketa
Lor itzazu ondoko funtzioen asintota bertikalak eta
horizontalak:
```

$a)\ y = \dfrac{x^2-1}{3} \quad ; \quad b)\ y = -\dfrac{1}{x} \quad ; \quad c)\ y = \dfrac{1}{x^2-9} \quad ; \quad d)\ y = \dfrac{2x}{x-4}$

$e)\ \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} \quad ; \quad f)\ y = \dfrac{1}{1+x^2} \quad ; \quad g)\ y = \ln(x-7) \quad ; \quad h)\ y = 4^x$

Ariketa ebatzia

Demagun $y = \dfrac{2x}{x-1}$ *funtzioa. Aurkitu existentzia-eremua eta asintota bertikalak eta horizontalak. Ondoren, adierazi grafikoki.*



Existentzia-eremua: R – {1}

Asintota bertikala: x = 1 zuzena.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

Asintota horizontala: y = 2 zuzena.

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 2$$

x	y
0	0
-1	1
2	4

Ariketa

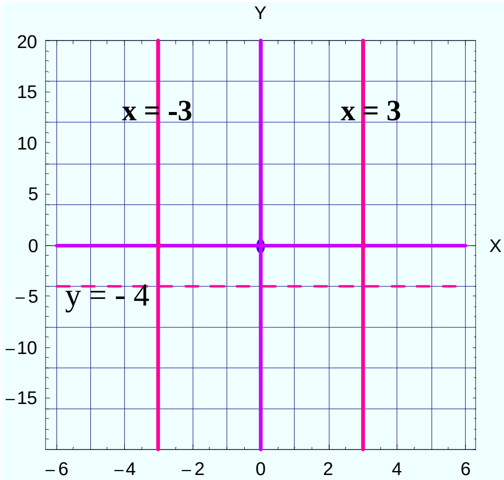
Egizu gauza bera (existentzia-eremua, asintotak eta grafikoa) ondoko funtzioekin:

$$y = -\frac{2}{x} \quad ; \quad y = \frac{x}{x-2} \quad ; \quad y = 4^x \quad ; \quad y = \ln(3-x)$$

Ariketa ebatzia

Demangun $f(x) = \dfrac{4x^2}{9 - x^2}$ *funtzioa.*

Asintotak kalkulatuko ditugu, eta, funtzioaren grafikoa eginda, kurbak eta asintoten arteko hurbilketa ikusiko dugu.



Asint. bertikalak: $x^2 - 9 = 0$; $x = 3$ eta $x = -3$

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \frac{4x^2}{9 - x^2} = \lim_{x \to 3} f(x) = \frac{4x^2}{9 - x^2} = \infty$$

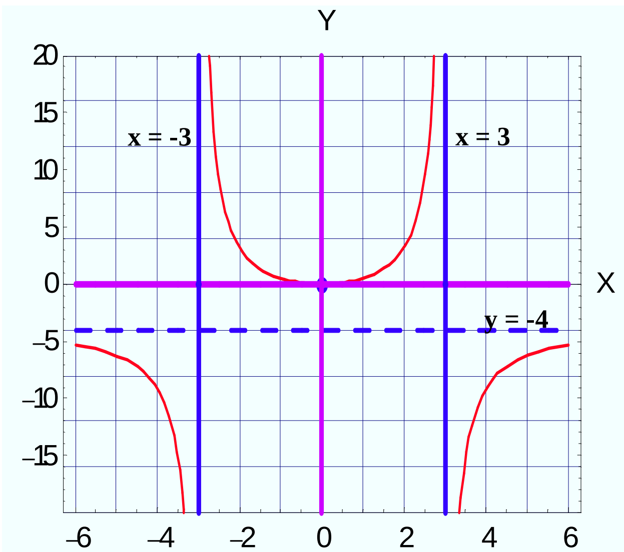
Beraz, **x = -3** eta **x = 3** zuzenak, *f* funtzioaren asintota bertikalak dira.

Asint. horizontalak. Zenbakitzaileak eta izendatzaileak maila bera dute. Beraz:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{4x^2}{9 - x^2} = \lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{4x^2}{9 - x^2} = -4$$

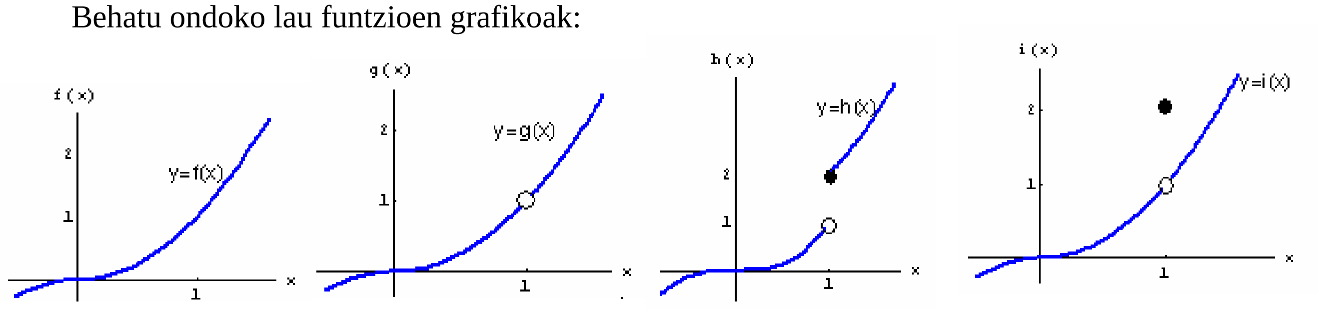
y = -4 **zuzena asintota horizontala da.**

Hona hemen funtzioaren grafikoa:



Jarraitutasuna

Behatu ondoko lau funtzioen grafikoak:



f(x) funtzioaren grafikoa lapitza paperetik jaso gabe marraz daiteke. **Funtzio jarraitua** dela esango dugu.
Ordea, *g, h* eta *i* funtzioak ezin daitezke marraztu lapitza paperetik jaso gabe. Guztiek dute etena $x = 1$ puntuan. Horregatik diogu **funtzio etenak** direla $x = 1$ puntuan.

Ikus dezagun zein den etenaren arrazoia kasu bakoitzean:

- ***g*** funtzioa ez da existitzen $x = 1$puntuan; hau da, **ez dago *g(1)* baliorik**.
- ***h*** funtzioa eten egiten da $x = 1$ puntuan, ezkeraldeko eta eskuinaldeko limiteak besberdinak direlako; hots, **ez da existitzen** $\lim_{x\to 1} h(x)$
- ***i*** funtzioa eten egiten da $x = 1$ puntuan, zeren $\lim_{x\to 1} i(x)$ **existitzen den arren, horren balioa ez da *i(1)* balioaren berdina.**

Definizioa. *f* funtzioa jarraitua da $x = a$ puntuan, baldin hiru baldintza hauek betetzen badira:

- *f(a)* existitzen da.
- $\lim_{x\to a} f(x)$ existitzen da eta finitua da.
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ da.

1. adibidea

Aztertu ondoko funtzioaren jarraitutasuna:

$$y = \begin{cases} 3 & ; \quad x < 2 \\ x - 2 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Azter dezagun x = 2 puntua:

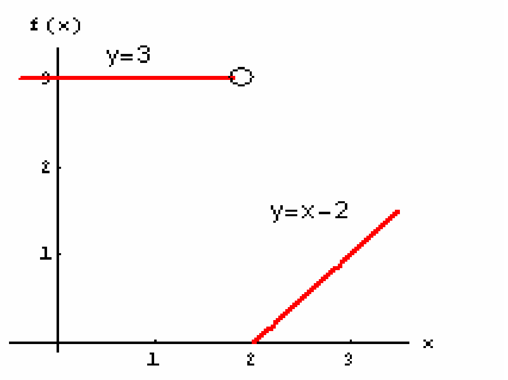
f(2) = 2-2 = 0

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$

$\lim_{x\to 2+} f(x) = 2 - 2 = 0$

$\lim_{x\to 2} f(x)$ ez da existitzen .

Beraz, etena da x = 2 puntuan.



2. adibidea

Aztertu ondoko funtzioaren jarraitutasuna: $y = \begin{cases} 1+x^2 & ; \quad x \le -1 \\ 1 & ; \quad -1 < x < 0 \\ x+1 & ; \quad x \ge 0 \end{cases}$

- Azter dezagun x = -1 puntuan:

  f(-1) = 1+ (-1)^2 = 2

  $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1 + (-1)^2 = 2$

  $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$

  $\lim_{x \to -1} f(x)$ ez da existitzen . Beraz,

  etena da x = -1 puntuan.

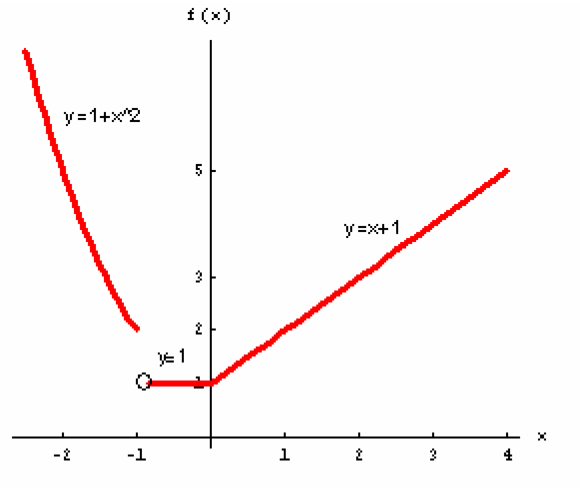
- Azter dezagun x = 0 puntuan:

  f(0) = 0 + 1 = 1

  $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

  $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + 1 = 1$

  $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ denez **jarraia da x=0 puntuan**.



3. adibidea

Aztertu ondoko funtzioaren jarraitasuna: $y = \dfrac{2}{x-3}$

f(3) ez da existitzen, x = 3 puntua ez baita *f*-ren existentzia-eremukoa. Beraz, ez da jarraitua x = 3an.
Zein motatako etena duen determinatzeko, x = 3 puntuko albo-limiteak kalkulatu behar ditugu.

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2}{x-3} = -\infty \qquad ; \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{2}{x-3} = +\infty$$

Kasu honetan, *f* funtzioak **asintota bertikala du** eta jauzi infinituko etena du **x = 3 puntuan**.

4. adibidea

Aurkitu k-ren balioa, $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & ; \quad x \ne 1 \\ k & ; \quad x = 1 \end{cases}$ *funtzioa jarraitua izan dadin x = 1 puntuan.*

f(1) = k

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

f(1) = $\lim_{x \to 1} f(x)$ bete behar denez, **k = 2** izan beharko du

ARIKETAK (limiteak, asintotak, jarraitutasuna)

1. Kalkulatu ondoko limiteak:

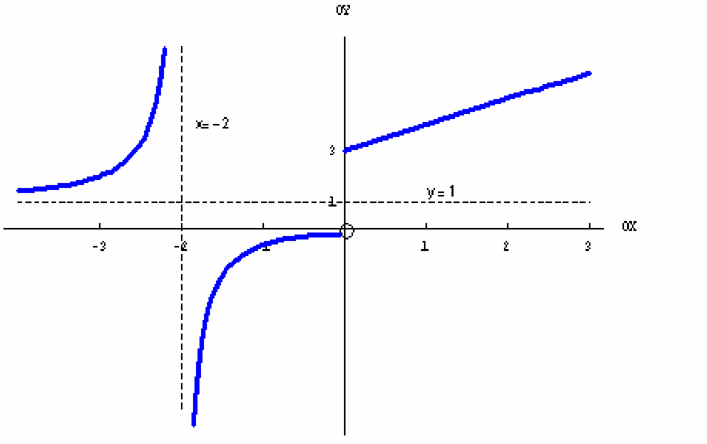
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x} \quad ; \quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x+5} \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1-6x^4}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} e^{1+2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2-3x} \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-1}{2x^2}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2}{1+3x^2}} \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2}{1+3x}}$$

2. Eman dezagun f(x)-ren grafikoa.

Lortu itzazu ondoko limiteak:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x)$$
$$\lim_{x\to -2} f(x) \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \qquad \lim_{x\to 0} f(x)$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)$$



3. Aurkitu ondoko funtzioen asintota bertikalak eta horizontalak:

$$y=\frac{5x}{x-4} \quad ; \quad y=\frac{x+1}{x^2-3} \quad ; \quad y=\frac{x}{x^2+3} \quad ; \quad y=e^{\frac{x}{2}} \quad ; \quad y=\ln(x+1)$$

4. Egizu ondoko funtzioen adierazpen grafikoa; horretarako, aurkitu, gutxienez, existentzia-eremua eta asintota bertikalak eta horizontalak.

$$y=\frac{3}{x} \quad ; \quad y=\frac{1}{3-x} \quad ; \quad y=\frac{2x}{x-3} \quad ; \quad y=3^{-x} \quad ; \quad y=\ln(x+2)$$

5. Azter ezazu ondoko futzioen jarraitutasuna:

$$y=\frac{5x}{x-4} \quad ; \quad y=\frac{x+2}{x^2+x-2} \quad ; \quad y=\sqrt{x-1} \quad ; \quad y=e^{\frac{x}{2}}$$

$$y=\begin{cases} x^2 & ; \quad x\le 1 \\ 3-x & ; \quad x>1 \end{cases} \qquad y=\begin{cases} 2x-3 & ; \quad x<1 \\ x+1 & ; \quad 1\le x\le 3 \\ 4 & ; \quad x>3 \end{cases} \qquad y=|x-2|$$

6. Lor ezazu *a* eta *b* parametroek izan behar duten balioa, ondoko funtzioa jarraitua izan dadin R multzoan.

$$y=\begin{cases} x-1 & ; \quad x<2 \\ ax+1 & ; \quad 2\le x\le 5 \\ x+b & ; \quad x>5 \end{cases}$$

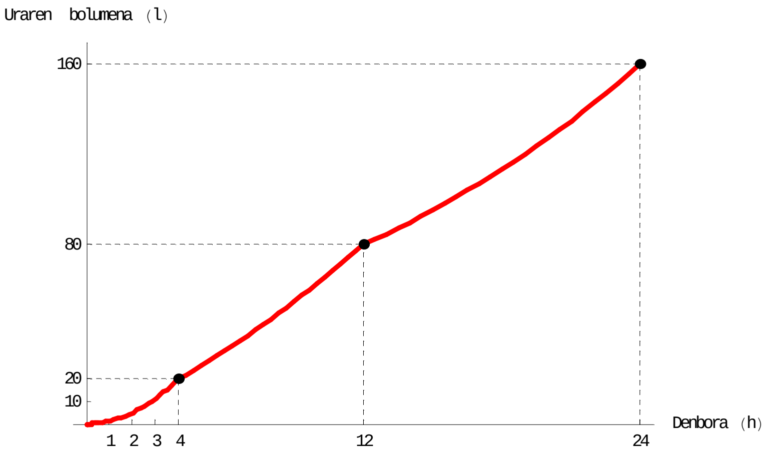
7. Lor ezazu *k* parametroak izan behar duen balioa, $x_0 = 1$ puntuan ondoko funtzioa jarraitua izan dadin:

$$y=\begin{cases} 2 & \text{baldin} \quad x=1 \\ \dfrac{x+k}{x^2+1} & \text{baldin} \quad x\ne 1 \end{cases}$$

DERIBATUA (I)

Funtzio baten batez besteko aldaketa-tasa

f funtzioaren grafikoak behatoki meteorologiko batean egunean zehar bilduriko ur-kantitatea adierazten du.



Bi aldiune jakinen artean, t_1 eta t_2, bilduriko ur-kantitatea lortzeko, nahikoa da $f(t_2) – f(t_1)$ kalkulatzea. Esate baterako:

Denbora-tartea	*Ur-kantitatea(litroak)*
0 h-tik 4 h-ra	f(4) – f(0) = 20 –0 = 20
4 h-tik 12 h-ra	f(12) – f(4) 80 – 20 = 60

Orain, euri gehien zein denbora-tartetan egin duen jakiteko, tarte bakoitzean denbora-unitateko zenbat ur erori den jakin behar dugu. Horretarako, ondoko zatidurak ebaluatu behar ditugu:

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{20-0}{4-0}=\frac{20}{4}=5\ l/h$$

$$\frac{f(12)-f(4)}{12-4}=\frac{80-20}{12-4}=\frac{60}{8}=7{,}5\ l/h$$

Ikus dezakegunez, 4 h eta 12 h bitartean intentsitate handiagoaz egin du euria.

Mota horretako zatidurak edozein *f* funtzioaren kasuan defini daitezke. Horrelakoetan, funtzioaren *batez besteko aldaketa-tasa* kalkulatu dela esaten da, *x* aldagaiaren bi baliok mugaturiko tartean.

a eta *b* bitartean ($a < b$ izanik) *f* funtzioak duen **batez besteko aldaketa-tasa**, **BBAT [a,b],** ondoko balioa da:

$$BBAT\ [a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

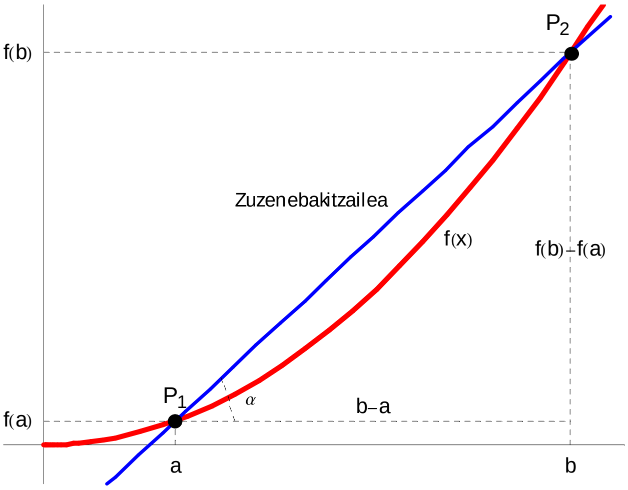
Honela, f(x) = 2x – 5 funtzioaren BBATa [2,3] tartean zera da:

$$BBBAT\ [2,3]=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{1-(-1)}{3-2}=\frac{2}{1}=2$$

> Batzuetan, *f* funtzioaren BBATa era honetan adierazten da:
>
> $$\frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ edo } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Interpretazio geometrikoa

Kontsidera dezagun irudiko grafikoan adierazitako *f* funtzioa, eta $P_1 = (a , f(a))$ eta $P_2 = (b , f(b))$ puntuak.



Funtzioaren batez besteko aldaketa-tasa *a*-ren eta *b*-ren artean hauxe da:

$$BBAT\,[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Zatidura horren balioa α angeluaren tangente trigonometrikoaren balioaren berdina da eta, hori, aldi berean, P_1 eta P_2 puntuetatik pasatzen den zuzenaren (kurbarekiko ebakitzailea) maldaren berdina da. Beraz, hauxe esan dezakegu.

f funtzioak *[a , b]* tartean duen **batez besteko aldaketa-tasa** grafikoaren *(a , f(a))* eta *(b , f(b))* puntuetatik pasatzen den **zuzen ebakitzailearen malda**ren berdina da.

BBATaren interpretazio fisikoa

Higikari batek denboraren arabera duen posizioaren funtzioa kontsideratuz gero, tarte bateko batez besteko aldaketa-tasak higikari horrek tarte horretan duen *batez besteko abiadura* adieraziko du.

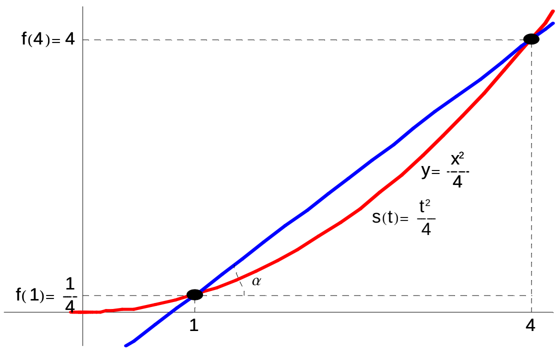
Adibidea.*Demagun higikari baten posizioa denboraren funtzioan era honetan adierazten dela: $f(t) = t^2 + 3t$. Kalkulatu t = 1 s eta t = 5 s bitarteko batez besteko abiadura, v_m.*

$$v_m = BBAT\,[1\,,5] = \frac{f(5) - f(1)}{5-1} = \frac{40-4}{5-1} = \frac{36}{4} = 9\ m/s$$

1. adibidea

Demagun $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ *funtzioa. Kalkulatu:*

- *Batez besteko aldaketa-tasa [1 , 4] tartean.*
- *x = 1 eta x = 4 abzisa puntuetatik pasatzen den zuzen ebakitzailearen malda.*
- *Aurreko zuzen ebakitzaileak OX ardatzarekin eratzen duen angeluaren tangentea.*



- *Higikari baten posizioa denboraren funtzioan* $s(t) = \dfrac{t^2}{4}$ *eran adierazten bada, zenbat da batez besteko abiadura 1 h eta 4 h bitartean?*

4 galderak modu berean kalkulatzen dira, eta balio bera dute; hau da:

$$BBAT\,[1\,,4] = \frac{f(4) - f(1)}{4-1} = \frac{\frac{4^2}{4} - \frac{1^2}{4}}{4-1} = \frac{\frac{15}{4}}{3} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

Funtzioen deribatua puntu batean

Kontsidera dezagun $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ funtzioa, eta kalkula ditzagun *[1 , b]* motako tarteetako BBATak, *b* delakoa *1* baliotik gero eta hurbilago egonik. Horrela eginda, funtzioak *x= 1* puntuan duen aldaketa-moduari buruzko informazio gero eta zehatzagoa lortuko dugu.

$$BBAT\ \ [1\ ,\ 1{,}5]=\frac{f(1{,}5)-f(1)}{1{,}5-1}=\frac{\frac{(1{,}5)^2}{4}-\frac{1^2}{4}}{1{,}5-1}=0{,}625$$

$$BBAT\ \ [1\ ,\ 1{,}1]=\frac{f(1{,}1)-f(1)}{1{,}1-1}=\frac{\frac{(1{,}1)^2}{4}-\frac{1^2}{4}}{1{,}5-1}=0{,}525$$

$$BBAT\ \ [1\ ,\ 1{,}01]=\frac{f(1{,}01)-f(1)}{1{,}01-1}=\ 0{,}5025$$

Ikus dezakegunez, BBAT horiek gero eta hurbilago daude *0,5* baliotik. Hain justu, balio hori BBAT horien limitea da *[1 , b]* tarteetan *b* balioa *1* baliorantz doanean. Limite horri honelaxe deritzo: *f* funtzioaren **aldiuneko aldaketa-tasa** *x = 1* balioko duen abzisa puntuan.

Puntu bateko alduiuneko aldaketa-tasak garrantzi handia du funtzioen azterketan eta matematikoki funtzioak puntu horretan duen *deribatua* deritzo.

***x = a* balioko abzisako puntuan** *f* funtzioak duen
deribatua ondoko limitea da (baldin existitzen bada):

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Limite hori existitzen bada, ***f'(a)*** eran adierazten da.

Kontura zaitezkeenez, *h = b-a* eginez, *b = a+h* dugu. Gainera, *b* balioa *a*-rantz joaten denean *h = b-a* balioa zerorantz joaten da. Beraz, era honetan idatz dezakegu aurreko adierazpena:

$$f\,'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Gehikuntzen notazioa erabiliz, era honetan adieraz dezakegu *f'(x)*:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Limite hori $\dfrac{df}{dx}$ moduan ere adierazten da. Hots:

$$f\,'(x)=\frac{df}{dx}$$

Horrelakoetan, f'(x) delakoa diferentzial *f*-ren eta diferentzial *x*-ren arteko zatidura dela esaten da.

2. adibidea.

Kalkulatu $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ *funtzioaren deribatua x = 1 abzisa puntuan.*

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(1+h)^2}{4}-\frac{1^2}{4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+2h+h^2)-1}{4h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{4h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{4h}=\lim_{h\to 0}\frac{2+h}{4}=\frac{2}{4}=0{,}5$$

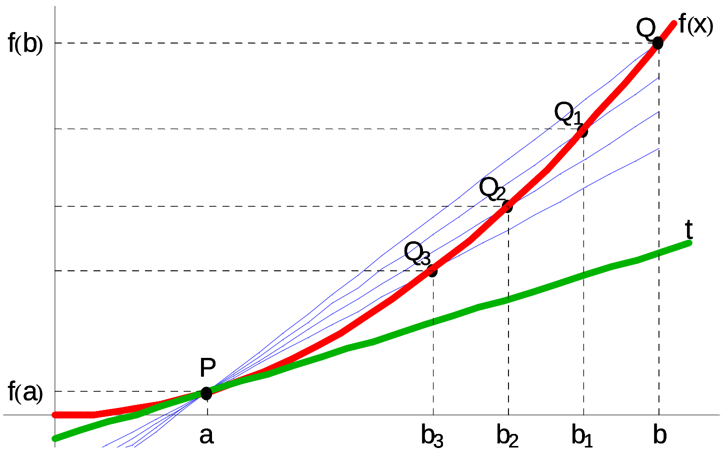
3. adibidea.

Kalkulatu $f(x)=x^2+1$ *funtzioaren deribatua x = 2 abzisa puntuan.*

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(2+h)^2+1\right]-(2^2+1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(4+4h+h^2+1)-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$

Interpretazio geometrikoa

Ikusi dugunez, *[a,b]* tartean *f* funtzioak duen batez besteko aldaketa-tasa funtzioaren grafikoaren *P=(a , f(a))* eta *Q=(b , f(b))* puntuetatik pasatzen den zuzen ebakitzailearen malda da.



Abzisak *a* baliotik gero eta hurbilago dauden b_1, b_2, b_3... balioak hartzean, horiei dagozkien PQ_1, PQ_2, PQ_3... zuzen ebakitzaileak hainbat eta hurbilago daude $x=a$ puntutik pasatzen den ***t*** zuzen tangentearekin edo zuzen ukitzailearekin.

Zuzen ukitzaile horren malda PQ_n zuzen ebakitzaileen malden limitea izango da, alegia, *[a , b_n]* tarteetan *f* funtzioak dituen BBATen limitea. Hain zuzen ere, limite hori lehenago *f'(x)* modura definituriko berbera da.

Beraz, honako hau baiezta dezakegu:

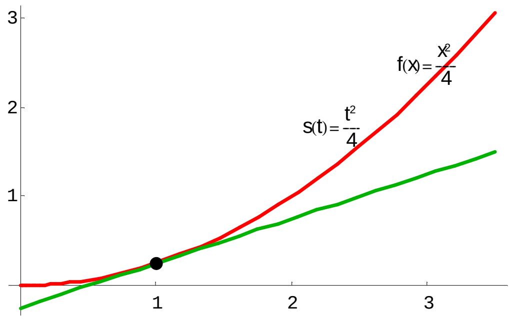
> *f* funtzioak *x = a* abzisako puntuan duen **deribatua** funtzioaren grafikoko *(a , f(a))* puntuko **zuzen ukitzailearen malda** da.

> **Deribatuaren interpretazio fisikoa**
>
> Higikari batek denboraren arabera duen posizioaren funtzioa kontsideratuz gero, ***t*** aldiuneko deribatuak higikariaren ***aldiuneko abiadura*** adierazten digu.

4. adibidea

Demagun $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ *funtzioa. Kalkulatu:*

- *Aldiuneko aldaketa-tasa x = 1balioko abzisa puntuan.*
- *x = 1 abzisa puntutik pasatzen den zuzen ukitzailearen malda.*
- *f-ren deribatua x = 1 abzisa puntuan.*
- *Higikari baten posizioa denboraren funtzioan* $s(t)=\dfrac{t^2}{4}$ *eran adierazten bada, zenbat da aldiuneko abiadura t = 1 seg. denean?*



4 galderak modu berean kalkulatzen dira, eta balio bera dute; hau da: $f'(1)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0{,}5$

Zuzen ukitzailearen ekuazioa

Gogoan duzunez, ondokoa da zuzen baten puntu-malda motako ekuazioa:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

non (x_0 , y_0) delakoa zuzeneko puntu bat den eta m delakoa, zuzenaren malda.

f'(a) delakoak $x = a$ abzisa puntuan *f*-ren grafikoaren zuzen ukitzaileak duen malda adierazten duenez,

(a , f(a)) puntuan *f*-ren zuzen ukitzailearen ekuazioa ***y – f(a) = f'(a) (x –a)*** da.

5. adibidea

Lortu $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ *funtzioaren grafikoak x = 1 abzisako puntuan duen zuzen ukitzailearen ekuazioa.*

x = 1 bada, $f(1)=\dfrac{1}{4}$ da. Beraz, zuzena (1 , ¼) puntutik pasatzen da

Malda, *f'(1)*, lehenago kalkulatu dugu, aurreko 2. adibidean: *m = f'(1) = 0,5*

Balio horiek $y - y_0 = m(x - x_0)$ ekuazioan ordezkatuz:

$$y-\frac{1}{4}=0{,}5(x-1) \quad \text{edo} \quad 2x - 4y - 1 = 0$$

Ariketak

1. Kalkula ezazu ondoko funtzioen deribatua abzisako puntu hauetan:

   a) $f(x) = x^2$, x = -1 puntuan ; *b)* $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $x=1$ puntuan.

2. Lor ezazu $g(x)=\dfrac{1}{x}$ .funtzioaren grafikoak x = 1 abzisako puntuan duen zuzen ukitzailearen ekuazioa.

Funtzio deribatua

Ikusi dugunez, $x = a$ abzisako puntuan *f* funtzioak duen deribatuaren emaitza zenbaki erreala da.

Beraz, *f'* funtzio bat kontsidera dezakegu, *x* abzisako puntu bakoitzari *f* funtzioak puntu horretan duen deribatuaren balioa egokitzen diona.

$$x \to f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Horrela definituriko funtzioari *f*-ren funtzio deribatua deritzo edo, labur esanda, deribatua.

6. adibidea

Kalkulatu $f(x) = x^2$ *funtzioaren deribatua*

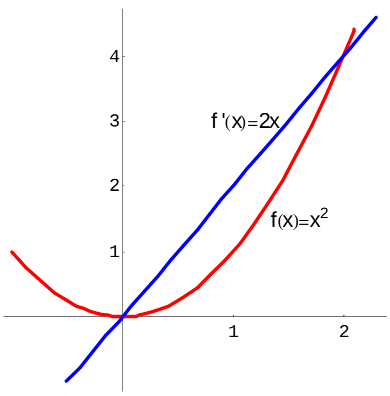
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2hx + h^2) - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$$

x	***f'(x)* = 2x**
x = 0	*f'(0)* = 2 . 0 = 0
x = -1	*f'(-1)* = 2 . (-1) = -2
x = 2	*f'(2)* = 2 . 2 = 4

Puntu batean kalkulatu nahi izanez gero, nahikoa da funtzio deribatuan *x*-ren balioa ordezkatzea.

Hona hemen $f(x) = x^2$ eta $f'(x) = 2x$ funtzio deribatuaren grafikoak



Funtzio batzuen deribatuak. Formulak

Aurreko orrialdean, $y = x^2$–aren deribatua kalkulatu dugu eta emaitza $y' = 2x$ izan da.

- Era berean,

  $f(x) = x^3$ funtzioa deribatuta, emaitza $f'(x) = 3x^2$ da.
  $f(x) = x^4$ “ “ , “ $f'(x) = 4x^3$ “
  $f(x) = x^5$ “ “ , “ $f'(x) = 5x^4$ “
  ....

$f(x) = x^n$ “ “ , “ $f'(x) = nx^{n-1}$ “ “

  Adibidez, $f(x) = x^{100}$ funtzioaren deribatua $f'(x) = 100x^{99}$ da.

  $$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \text{ bada, } f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ da.}$$

  $$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \text{ bada, } f'(x) = -3.x^{-3-1} = \frac{-3}{x^4} \text{ da.}$$

- $f(x) = x$ funtzioaren deribatua $f'(x) = 1$ da. Egizu ariketa gisa

- Funtzio konstantearen ($y = k$) deribatua 0 da; esaterako, $f(x) = 5$ bada $f'(x) = 0$ da. Arrazona ezazu.

- $f(x) = \sin x$ funtzioari deribatuaren definizioa aplikatuta, emaitza $f'(x) = \cos x$ ateratzen da.
  Eta $f(x) = \cos x$ funtzioa deribatuta, emaitza $f'(x) = -\sin x$ ateratzen da.

Taula txiki honetan adierazten ditugu azken emaitza horiek:

Funtzioa	Funtzio deribatua
f(x) = k; hau da, zbki erreal bat	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$

Eragiketak

Dakizunez, edozein bi funtzio emanik, *f* eta *g*, horien arteko batuketa, kenketa, biderketa, zatiketa eta konposizioa egin ditzakegu

- Konstante baten eta funtzio baten arteko biderkaduraren deribatua

  $$y = k.g(x) \Rightarrow y' = k.g'(x)$$

  Adibideak.

  a) $f(x) = 4x^5$ funtzioaren deribatua $f'(x) = 4.(5x^4) = 20x^4$ da.

  b) $f(x) = 7x^{10}$ “ “ $f'(x) = 7.(10x^9) = 70x^9$ da.

- Batura funtzioaren deribatua

$$y = f(x) \pm g(x) \;\Rightarrow\; y' = f'(x) \pm g'(x)$$

Adibideak.

a) $y = 4x^5 + 7x^{10}$ funtzioaren deribatua $y' = 20x^4 + 70x^9$ da.

b) $y = x^6 - 3x^2 + 5x - 8 + 4\cos x$ bada, $y' = 6x^5 - 6x + 5 - 0 + 4.(-\sin x)$ da.

- Biderkadura funtzioaren deribatua

$$y = f(x).g(x) \;\Rightarrow\; y' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

Adibideak.

a) $f(x) = x.\sin x$ funtzioaren deribatua $f'(x) = 1.\sin x + x.\cos x$ da.

b) $y = 5x^6.\cos x$ funtzioaren deribatua $f'(x) = 30x^5.\cos x + 5x^6.(-\sin x)$ da.

- Zatidura funtzioaren deribatua

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \;\Rightarrow\; y' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Adibideak.

a) $y = \dfrac{3x^2}{\sin x} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{6x.\sin x - 3x^2.\cos x}{[\sin x]^2}$

b) $y = \dfrac{2-3x}{\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{(0-3).\sqrt{x} - (2-3x).\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

c) $y = \dfrac{3}{x^4}$. Deribatua bi eratan kalkula daiteke:

I) Berretura modura adierazita,

$$y = 3.x^{-4} \Rightarrow y' = 3.(-4x^{-4-1}) = \frac{-12}{x^5}$$

II) Zatiduraren formula aplikatuta,

$$y = \frac{3}{x^4} \Rightarrow y' = \frac{0.x^4 - 3.(4x^3)}{x^8} = \frac{-12}{x^5}$$

Ariketak

(Ondoko ariketak egiteko ez erabili lehenengo orrialdeetan azaldutako deribatuaren definizioaren formula, prozesu hori luzea eta astuna baita. Aplikatu zuzenean formulak)

1. Kalkulatu ondoko funtzioen deribatuak:

$y = 3x^3 - 2x + 4$; $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $y = \sqrt[3]{x^2}$; $y = \dfrac{1-x}{4-x^2}$

$y = \dfrac{x}{2}$; $y = 4.\sqrt[5]{x^4}$; $y = \dfrac{2}{\sqrt[7]{x^5}}$; $y = (5x^6 - 3x^2).(7x^4 - x)$

$y = x^3.\cos x$; $y = \dfrac{2x^3 + 5x - 3}{2\sin x}$; $y = \dfrac{x.\sin x}{1-2x}$; $y = (1-3x^2).\sqrt{x}.\cos x$

2.-Eman dezagun $y = x^3$ funtzioa.

a) Lortu batez besteko aldaketa-tasaren balioa [1,2] tartean. Zein da bere esangura geometrikoa?

b) Lortu aldiuneko aldaketa-tasa x = 1 puntuan. Zein da bere esangura geometrikoa?

c) Demagun higikari baten posizioa denboraren arabera $s(t)=t^3$ modura adierazten dela. Zein abiadura du higikariak t =1 s aldiunean? Eta,zein da batez besteko abiadura[1,2]tartean?

d) Lortu x = 1 eta x = 2 abzisa-puntuetatik pasatzen den zuzen ebakitzailearen ekuazioa

e) Lortu x = 1 puntutik pasatzen den zuzen ukitzailearen malda. Idatz ezazu zuzen horren ekuazioa.

3. Zein da $f(x) = x^3 - x - 2$ ekuazioko kurbak x = -2 abzisako puntuan duen zuzen ukitzailearen malda? Idatz ezazu zuzen horren ekuazioa

4. Higikari baten posizioa denboraren funtzioan $s(t) = 3t^2-18t+1$ modura adierazten da. Zein abiadura izan du higikariak t = 5 s aldiunean?

5. Determina ezazu $f(x) = x^3-12x$ ekuazioko kurbaren zein puntutan den zuzen ukitzailea abzisa-ardatzaren paraleloa.

6. Kalkula ezazu ondoko funtzioen grafikoei aipaturiko puntuetan zuzen ukitzaileen ekuazioak.

a) $y = \dfrac{1}{x}$, x = 2 abzisako puntuan

b) $y = x^3+2x+10$, x = -1 abzisako puntuan

7. Kalkula ezazu $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzailea x = 1 abzisako puntuan.

Zein puntutako zuzen ukitzailea da abzisa-ardatzaren paraleloa?

- **Funtzio konposatuaren deribatua: katearen erregela**

$$y = (f \circ g)(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'[g(x)] \,.\, g'(x)$$

Adibideak

I) $y = \sin x^2$ funtzioa funtzio konposatu bat da, $f(x) = \sin x$ eta $g(x) = x^2$ direlarik. Izan ere, $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2) = \sin x^2$

Bere deribatua: **y'** $= f'[g(x)] \,.\, g'(x) = \cos[g(x)].g'(x) =$ **$\cos x^2 \,.\, 2x$**

II) Kalkula dezagun $y = (4x^2-1)^{10}$ funtzioaren deribatua.

Funtzio konposatua da. Izan ere, $f(x) = x^{10}$ eta $g(x) = (4x^2-1)$ hartuta,
$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(4x^2-1) = (4x^2-1)^{10}$

Katearen erregela: **y'** $= f'[g(x)] \,.\, g'(x) = 4[g(x)]^9.g'(x) =$ **$4(4x^2 - 1)^9 \,.(8x-0)$**

Orokorrean, funtzioa konposatua denean **u** letraz adieraziko dugu

Laburbilduta, funtzio bakunetan eta funtzio konposatuetan, deribatuaren formulak ondoko hauek dira:

Funtzio bakuna	Funtzio konposatua
$y = x^n \quad \rightarrow \quad y' = n\,.\,x^{n-1}$	$y = u^n \quad \Rightarrow \quad y' = n.u^{n-1}.u'$
$y = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = \sin x \;\rightarrow\; y' = \cos x$	$y = \sin u \;\rightarrow\; y' = u'.\cos u$
$y = \cos x \;\rightarrow\; y' = -\sin x$	$y = \cos u \;\rightarrow\; y' = -u'.\sin u$
..........–	

Adibideak

$$y = (5x^2+3x-1)^4 \quad \rightarrow \quad y' = 4(5x^2+3x-1)^3\,(10x+3)$$

$$y = (6x^4+5)^2 \quad \rightarrow \quad y' = 2(6x^4+5).24x$$

$$y = \cos(1+4x) \quad \rightarrow \quad y' = -4.\sin(1+4x)$$

$$y = \sqrt{1-3x} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{0-3}{2\sqrt{1-3x}}$$

Ariketa

Deribatu ondoko funtzioak

$y = \sin\dfrac{2}{x}$; $y = \sin\dfrac{x}{2}$; $y = (1+x+x^2)^2$; $y = \sqrt{(1+x+x^2)}$

$y = \dfrac{(4x^2-1)^5}{1-2x}$; $y = x^2.\cos(7x^2+1)$; $y = \cos^2 x$; $y = \sin x^2.\sin^2 x$

Funtzio bakunak		**Funtzio konposatuak**	
f(x) = k	f ’(x) = 0	Notazioa errazteko, *u* delakoak *x*-ren funtzio bat adierazten du	
f(x) = x	f ’(x) = 1		
f(x) = x^n	f ’(x) = nx^{n-1}	f(x) = u^n	f ’(x) = $nu^{n-1}u'$
f(x) = $\sqrt{x}$	f ’(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	f(x) = $\sqrt{u}$	f ’(x) = $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
f(x) = $\sqrt[n]{x}$	f ’(x) = $\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	f(x) = $\sqrt[n]{u}$	f ’(x) = $\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
f(x) = ln x	f ’(x) = $\frac{1}{x}$	f(x) = ln u	f ’(x) = $\frac{u'}{u}$
f(x) = $\log_a x$	f ’(x) = $\frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$	f(x) = $\log_a u$	f ’(x) = $\frac{u'}{u}\frac{1}{\ln a}$
f(x) = e^x	f ’(x) = e^x	f(x) = e^u	f ’(x) = $e^u u'$
f(x) = a^x	f ’(x) = a^x . ln a	f(x) = a^u	f ’(x) = $a^u u' \ln a$
f(x) = sin x	f ’(x) = cos x	f(x) = sin u	f ’(x) = $u'\cos u$
f(x) = cos x	f ’(x) = -sin x	f(x) = cos u	f ’(x) = $-u'\sin u$
f(x) = tg x	f ’(x) = $\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$	f(x) = tg u	f ’(x) = $\frac{u'}{\cos^2 u}=u'\sec^2 u$
f(x) = cotg x	f ’(x) = $\frac{-1}{\sin^2 x}=-\cos ec^2 x$	f(x) = cotg u	f ’(x) = $\frac{-u'}{\sin^2 u}=-u'\cos ec^2 u$
f(x) = sec x	f ’(x) = tg x . sec x	f(x) = sec u	f ’(x) = $u' tg\, u . \sec u$
f(x) = cosec x	f ’(x) = - cotg x . cosec x	f(x) = cosec u	f ’(x) = $-u'\cot g\ u . \cos ec\, u$
f(x) = arc sin x	f ’(x) = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	f(x) = arc sin u	f ’(x) = $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
f(x) = arc cos x	f ’(x) = $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	f(x) = arc cos u	f ’(x) = $\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
f(x) = arc tg x	f ’(x) = $\frac{1}{1+x^2}$	f(x) = arc tg u	f ’(x) = $\frac{u'}{1+u^2}$
f(x) = arc cotg x	f ’(x) = $\frac{-1}{1+x^2}$	f(x) = arc cotg u	f ’(x) = $\frac{-u'}{1+u^2}$

Ariketa

Deribatu ondoko funtzioak

$y=\dfrac{7x}{(2-3x)^2}$; $y=\ln\sqrt{x}$; $y=\sqrt{\ln x}$; $y=4\sqrt[3]{2x+1}$

$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{1-\sin x}$; $y=ax^3+bx^2+cx+d$; $y=\cos ax+\sin ax$; $y=e^{\frac{x}{2}}$

$y=\log(5x^2-1)^3$; $y=5\ln(3-x^2)$; $y=3\log_2(x^3-1)$; $y=tg\,(x^2-1)$

$y=\cos(\ln 2x)$; $y=\ln(\cos 2x)$; $y=3^{tg\,2x}$; $y=\sin x\,.\,tg\,x$

$y=\dfrac{x.5^x}{\ln x}$; $y=arc\,tg\,e^{2x}$; $y=\dfrac{arc\sin(1-x^2)}{3}$; $y=(1-x^2).arc\cos x$

$y=\dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x}$; $y=\sqrt[5]{1-\sin^2 x}$; $y=\dfrac{\sqrt{3x}}{\cos^2 x}$; $y=\cos x^2.\cos^2 x$

$y=x^6.6^x.\ln 6x$; $y=\dfrac{x\cos x}{e^{-x}}$

Deribazio logaritmikoa

Oinarria eta berretzaile modura funtzio bat duten funtzioen deribatuak kalkulatzeko erabiltzen da metodo hau.

Adibidea. Demagun **$y = x^x$** funtzioa.

Hiru pausu:

I) Logaritmo nepertarrak hartuko ditugu berdintzaren bi ataletan eta logaritmoen propietateak aplikatuko ditugu:

$$\text{Ln } y = \ln x^x = x\,.\,\ln x$$

II) Deribatu egingo ditugu berdintzaren bi atalak:

$$\frac{y'}{y}=1.\ln x + x.\frac{1}{x}=\ln x+1$$

III) Bakandu egingo dugu y' eta ordezkatu egingo dugu y bere adierazpenaz:

$$y'=y.(\ln x+1)=x^x.(\ln x+1)$$

Ariketa. Deriba itzazu ondoko funtzioak:

$y=(2x)^{x+2}$; $y=x^{\sin x}$; $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$

DERIBATUA (Ariketak)

1. Konparatu $f(x) = x^3$ eta $g(x) = 3^x$ funtzioen batez besteko aldaketa-tasak [1,2] tartean eta esan bietatik zein hazten den gehiago tarte horretan. Egizu grafikoak.

2. Deribatuaren definizioa erabilita, lortu ezazu $f(x) = x^2 + 1$ funtzioaren deribatua

3. Marraztu *R* multzoan deribagarria den funtzio baten grafikoa, non grafikoaren puntu guztietako deribatua positiboa den.

4. Lor ezazu $f(x) = x.\ln x$ ekuazioko kurbaren zuzen ukitzailearen ekuazioa x = 1 abzisako puntuan.

5. $y= x^2 + 4x +1$ funtzioa emanda, aurkitu ukitzaile den zuzenaren ekuazioa, malda 2 duela jakinda.

6. Bilatu $f(x) = x^2 - 5x + 6$ funtzioaren grafikoaren zein puntutan duen zuzen ukitzailea lehenengo eta hirugarren koadranteen erdikariaren paraleloa, eta lortu ukitzaile horren ekuazioa.

7. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ funtzioa emanda, egiazta ezazu $x=\frac{\pi}{4}$ abzisako puntuko deribatua nulua dela. Nolakoa da puntu horretako zuzen ukitzailea abzisa-ardatzarekiko?

8. Froga ezazu $f(x) = tg\, x$ funtzioaren deribatua $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ dela. Horretarako, deriba ezazu $\frac{\sin x}{\cos x}$ zatidura.

9. Kalkula itzazu ondoko funtzioen deribatuak:

$y=\ln(\sin x^2)$; $y=\cos^2 x^3$; $y=\sqrt{\sin x}$; $y = e^{x^2}.\sin 3x$; $y = arc\,tg\frac{x}{3}$

$y = \frac{\log x}{x}$; $y = \sin x.\cot g\, x$; $y = \frac{a}{2}x + b$; $y = e^{-x}.\log_2 x$; $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin 5x}$

$y = \sin^2 x + \cos^2 x$; $y = \sqrt{tg\, x^2}$; $y = \frac{\sqrt[3]{1+2x}}{5x}$; $y = \ln(\ln x)$; $y = x^2.e^{-x}.\ln x$

$y = arctg(tg\, x)$; $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$; $y = \ln\frac{x+1}{x}$; $y = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x}}$; $y = \frac{arc\sin x^2}{3}$

10. Erabili deribazio logaritmikoa honako funtzioak deribatzeko:

$y = x^{3x}$; $y = x^{tg\, x}$; $y = \sqrt[x]{x}$; $y = x^{e^x}$; $y = (2x+1)^x$

ESTATISTIKA

Gizartean eragin handia duen matematikaren adar bat da ESTATISTIKA; datu-kantitate handiak nola bildu, antolatu eta analizatu aztertzen du, ondorioak ateratzeko asmoz. Hasiera batean, erroldak egiteko sortu izan arren, gaur egun eremu askotan erabiltzen da, esaterako, biologian, nekazaritzan, psikologian, ea.

Oinarrizko kontzeptuak

Pentsa dezagun ikastetxe bateko ikasleen altuerak neurtu nahi ditugula, edo ikasleek gustokoen duen ikasgaia jakin nahi dugula.

Populazioa. Aztertu nahi den elementuen multzoa. Gure kasuan ikastetxeko ikasle guztiak.

Indibiduoa. Populazioaren elementu bakoitza.

Lagina. Populazioaren edozein zati; adibidez, 100 ikasle.

Ezaugarriak. Aztertu nahi den propietatea; adibidez, “ikasleen altuera”, “gustuko duen asignatura”...

Bi motako ezaugarriak bereiz ditzakegu:

- *Kuantitatiboak*, zenbakizko balioak hartzen dituenean. Izan daitezke:
  - **Diskretuak**, balio konkretu batzuk soilik har ditzakeenean (seme-alaba kopurua, hileko egunak...)
  - **Jarraiak.** Edozein balio har dezake (altuerak, pisua...). Kasu honetan, balioak tartekatzea komeni da.
- *Kualitatiboak*. Balio ez-numerikoak ditu. Adibidez, asignatura gustokoena, mutila ala neska...

TAULAK

➢ Hona hemen 40 ikasleen notak:

7	3	6	7	3	4	2	2	10	1
6	8	5	9	1	9	3	6	6	8
6	3	5	5	8	5	7	3	6	5
7	3	6	1	9	8	2	4	5	4

Aldagaia **diskretua** da.

Nota bakoitzari *(x_i)* bere **maiztasun absolutua** *(f_i)* erantsiko diogu:

x_i	f_i
1	3
2	3
3	6
4	3
5	6
6	7
7	4
8	4
9	3
10	1
	40

Gehienetan komeni da maiztasun erlatiboa (f_r) ere adieraztea:

f_r-ren balioa ehunetan zein batekotan ematen da (biak batera ez)

x_i	f_i	f_{r_i}	f_{r_i} (%)
1	3	0,075	7,5
2	3	0,075	7,5
3	6	0,15	15
4	3	0,075	7,5
5	6	0,15	15
6	7	0,175	17,5
7	4	0,1	10
8	4	0,1	10
9	3	0,075	7,5
10	1	0,025	2,5
	40	**1**	**100**

Maiztasun metatua.

Balio bakoitzeraino dauden aurreko balioen arteko batura da maiztasun metatua **(f_a):**

x_i	f_i	f_{r_i} (%)	f_a	f_a(%)
1	3	7,5	3	7,5
2	3	7,5	6	15
3	6	15	12	
4	3	7,5	15	
5	6	15	21	
6	7	17,5	28	
7	4	10	32	
8	4	10	36	
9	3	7,5	39	
10	1	2,5	40	100
	40	**100**		

➢ **Datuak taldeka adierazita**

34 pertsonen altuerak zentimetrotan:

172	170	180	167	168	175	166	170	176	178
191	184	185	184	170	175	163	181	174	185
172	174	175	176	185	181	173	173	180	182
165	168	168	174						

Datuak antolatu. Pausuak:

- Hartu balio handiena (B_{max}) eta txikiena (B_{min}): $R = B_{max} - B_{min} = 191 - 163 = 28$
- Zehaztu tarte kopurua (ez larregi ez gutxiegi) eta zabalera:

$$\text{Tarte kopurua} \cong \sqrt{\text{datu kopurua}} = \sqrt{34} \approx 6$$

$$\text{Tartearen tamaina} \cong \frac{28}{6} \approx 5$$

Datu guztiak sartu behar dira taulan eta datu bat ezin da bi tarte ezberdinetan egon. Horregatik, balio bat tarte batekoa edo bestekoa den ziurtatzeko, bi motako tarteak eraiki daitezke:

x_i	f_i
162,5 – 167,5	4
167,5 – 172,5	8
172,5 – 177, 5	10
177,5 182,5	6
182,5 –187,5	5
187,5 – 192,5	1
	34

x_i	f_i
[163 , 168)	4
[168 , 173)	8
[173 , 178)	10
[178 , 183)	6
[183 , 188)	5
[188 , 193)	1
	34

Bitarte bakoitzak bere erdiko puntua hartzen du ordezkaritzat (c_i). *Klase-marka* deitzen zaio: 165’5, 170’5, 175’5, 180’5...

ARIKETAK

1. Ondoko koadroan 50 familien seme-alaba kopurua adierazten da:

2	1	0	3	0	1	1	2	2	0
1	1	3	2	2	4	1	0	5	2
3	2	1	0	1	2	2	1	1	0
4	2	2	3	3	1	0	1	2	2
5	4	3	2	2	3	2	1	0	1

Bildu datuak taula batean

Adierazi maiztasun absolutuak eta metatuak.

2. 40 lagunen pisuak honako hauek dira:

62	64	60	56	55	70	48	46	62	76
40	44	48	50	68	48	60	69	78	46
76	72	65	49	50	52	54	65	68	62
43	64	60	60	54	75	70	55	58	60

Bildu datuak taula batean

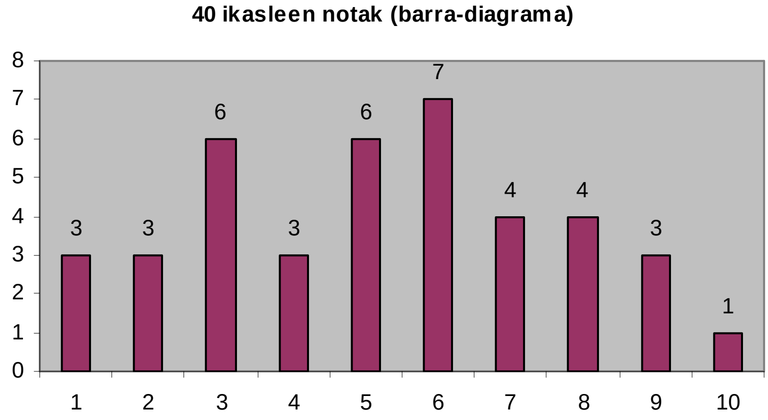
Adierazi maiztasun absolutuak eta metatuak.

GRAFIKOAK

Aldagaia diskretua denean

40 ikasleen notak. Barra-diagrama

x_i	f_i
1	3
2	3
3	6
4	3
5	6
6	7
7	4
8	4
9	3
10	1
	40

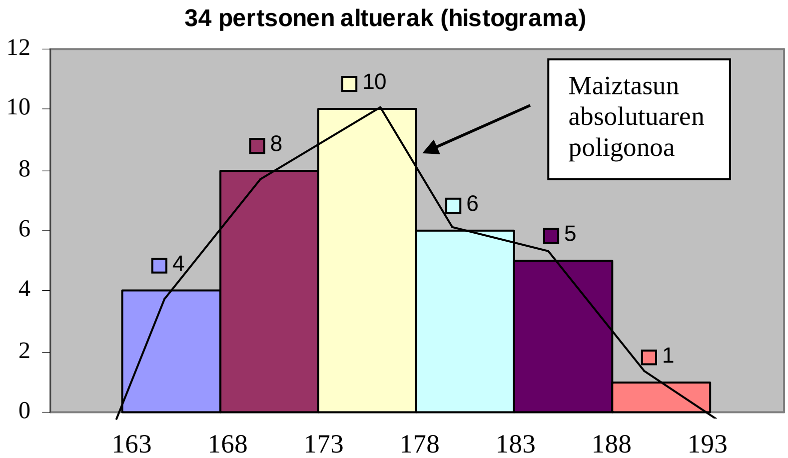


Datuak tartekatuta taulatzen direnean (Histograma)

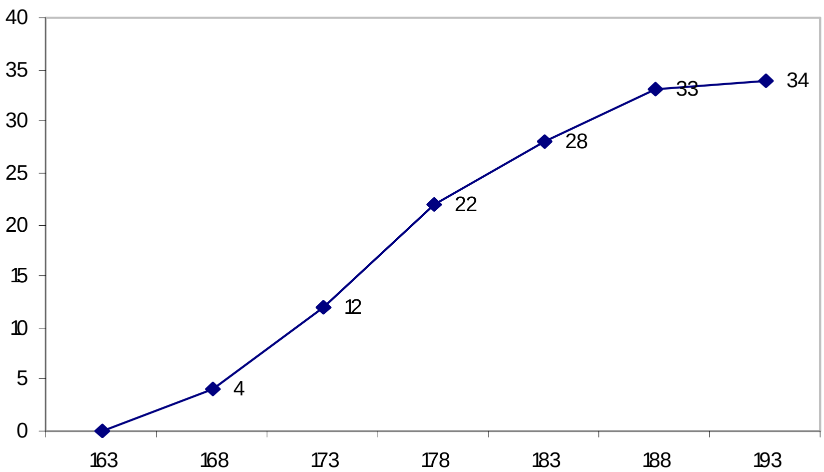
•

34 pertsonen altuerak

x_i	f_i	f_a	fa(%)
[163 , 168)	4	4	12%
[168 , 173)	8	12	35%
[173 , 178)	10	22	65%
[178 , 183)	6	28	82%
[183 , 188)	5	33	97%
[188 ,193)	1	34	100%
	34		



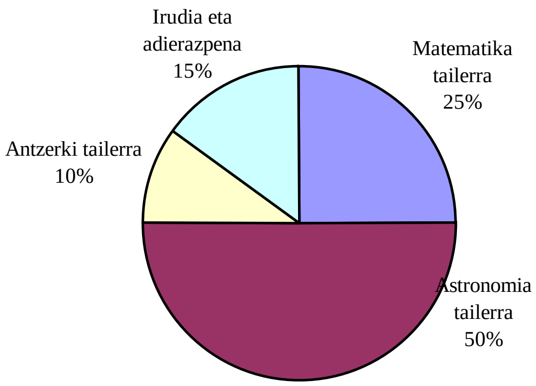
Maiztasun metatuaren poligonoa



Sektore-diagramak

Ikastetxe bateko D.B.H-ko 100 ikasleek gustukoen duten asignaturen taula :

Asignatura gustukoena	**f_i**
Matematika tailerra	25
Astronomia tailerra	50
Antzerki tailerra	10
Irudia eta adierazpena	15



ARIKETAK

1. Egizu 49. orrialdeko 50 seme-alaben taularen grafikoa
2. Egizu 49. orrialdeko 40 lagunen pisuen grafikoa
3. Batxilergoko lehen mailan matrikulatutako ikasleek lau aukera hautatu dituzte:

Aukerak	A	B	C	D
Ikasle kopurua	72	54	42	30

Egizu:

a) Barra-diagrama

b) Sektore-diagrama

4. Institutu batean matrikulatutako lehen mailako 100 ikasleei 100 galderen test bat banandu zaie, eta hona hemen ateratako puntuazioak:

Puntuazioak	[20 , 30)	[30 , 40)	[40 , 50)	[50 , 60)	[60 , 70)	[70 , 80)	[80 , 90)	[90 , 100)
Ikasle kopurua	8	8	12	20	18	14	12	8

a) Egizu maiztasun taula

b) Adierazi grafikoki banaketa

PARAMETRO ESTATISTIKOAK

Orain arte, tauletan eta grafikoetan bildu ditugu datuak. Bai batean zein bestean, datu gehiegi erabiltzen da, eta ez da modu egokiena ondorio azkarrak ateratzeko.

Parametro estatistikoen helburua da zenbaki gutxirekin banaketaren informazio orokorra eta zorrotza ematea.

Bi motako parametroak aztertuko ditugu:

- Erdialdeko informazioa ematen diguten parametroak: *batezbesteko aritmetikoa, moda, mediana...*
- Datuak elkarrengandik zenbatean dauden sakabanatuta adierazten diguten parametroak: *batezbesteko desbidazioa, bariantza, desbidazio estandarra...*

<u>Erdialdeko informazioa ematen diguten parametroak:</u>

➢ Batezbeste aritmetikoa

1. *<u>adibidea.</u>*

1 , 3 , 5 , 6 , 8 zenbakien batezbeste aritmetikoa: $\bar{x} = \dfrac{1+3+5+6+8}{5} = 4{,}6$

2. *<u>adibidea.</u>*

$\mathbf{x_i}$	2	4	6	8	9
$\mathbf{f_i}$	3	2	5	1	10

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{2.3+4.2+6.5+8.1+9.10}{21} = 6{,}76$$

3. *<u>adibidea.</u>*

37 ikasleko gela batean, test bat egin dute, eta taula honeta jasotzen dira emaitzak:

Puntuazioa	[22,28)	[28,34)	[34,40)	[40,46)	[46,52)	[52,58)	[58,64)	[64,70)
Ikasle kopurua	1	1	2	7	12	9	3	2

$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{f_i}$	$\mathbf{c_i}$	$\mathbf{f_i.c_i}$
[22,28)	1	25	25
[28,34)	1	31	31
[34,40)	2	37	74
[40,46)	7	43	301
[46,52)	12	49	588
[52,58)	9	55	495
[58,64)	3	61	183
[64,70)	2	67	134
	37		1831

c_i : klase-marka

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1} c_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1831}{37} = 49{,}5$$

- **Moda.** Gehien errepikatzen den aldagaiaren balioa da.

1. adibidea.

32 lagunek erabiltzen dituzten zapata-zenbakiak:

Zapata-zenbakia (x_i)	37	38	39	**40**	41	42	43	44
Lagun kopurua (f_i)	3	2	4	7	4	5	4	3

Lagun kopururik handienak erabiltzen duen zapata zenbakia 40 da. **Moda = 40**

2. adibidea

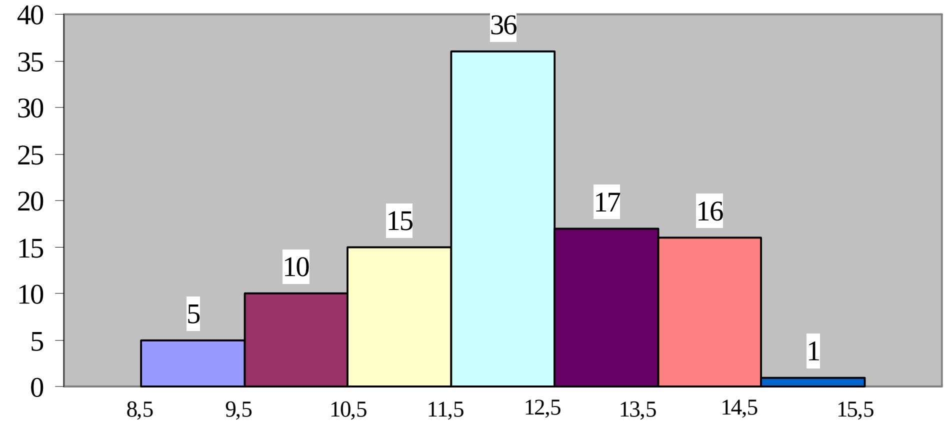
2 , 3 , 4 , 4 , 4 , 5 , 6 , 6 , 8 , 8 , 8 , 9   (**Modabikoa: 4 eta 8**)

3. adibidea.

Umeak zenbatgarren hilabetean hasten diren oinez zehazteko, pediatra batek bere kontsultako 100 umeri buruzko datu hauek bildu ditu:

Hilabeteak	[8,5-9,5)	[9,5-10,5)	[10,5-11,5)	[11,5-12,5)	[12,5-13,5)	[13,5-14,5)	[14,5-15,5)
Ume-kopurua	5	10	15	36	17	16	1

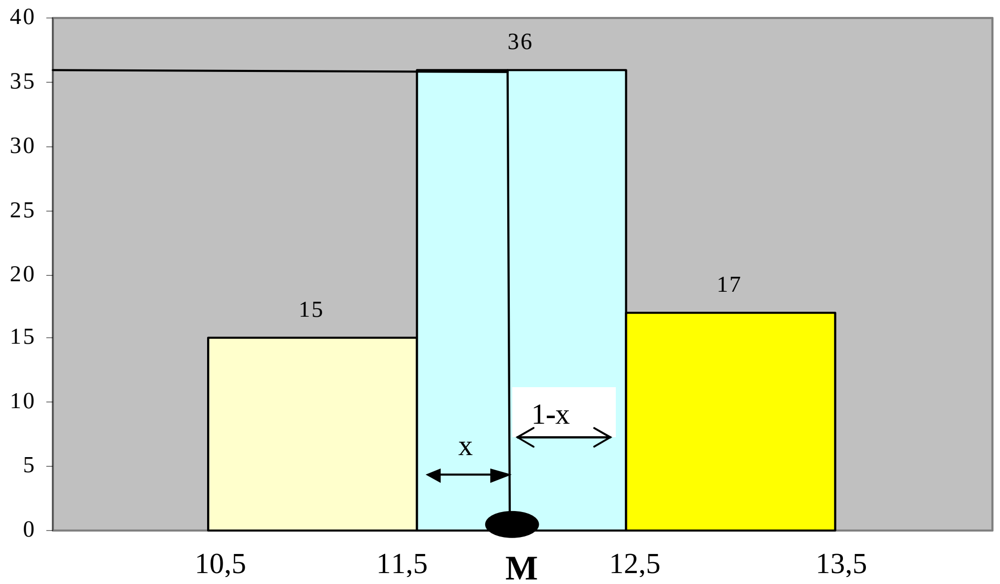
Kopururik handiena [11,5 – 12,5) tartean dago; beraz, moda tarte horretakoa da.



Zein da zehazki bere balioa?

Histograman, kontuan hartzen ditugu [10,5 – 11,5) , [11,5 – 12,5) eta [12,5 – 13,5) tarteak.

Ondoko erlazio matematikoa betetzen da:



$$\frac{x}{36-15}=\frac{1-x}{36-17}$$

$$19x = 21-21x \rightarrow$$

$$x = 0{,}525$$

$$\text{Moda (M)} = 11{,}5 + 0{,}525 = $$
$$= 12{,}025$$

➢ Mediana

Datu guztiak txikienetik handienera ordenatzean, erdiko lekuan kokatzen den balioari **mediana** deitzen diogu. Balio horretatik behera, populazioaren erdia egongo da (%50) eta berarengandik gora beste erdia.

Koartilak. Populazioaren laurdena (%25) behe aldetik eta hiru laurdena (%75) banatzen duen balioari *behe-koartila* (**Q_1**) deritzo. Eta, alderantziz, behetik %75 eta goitik %25, *goi-koartila* (**Q_3**)

Populazioa 10 zatitan banatzen bada, **dezilak** lortzen dira. Esaterako, 4. dezilak (D_4) populazioaren %40a behe aldetik izango du eta %60a goitik

Era berean, 100 zatitan bananduz, **zentilak** (edo **perzentilak**) lortzen dira.

Mediana nola kalkulatu.

- **Aldagaia diskretua denean**

1. adibidea

x_i	f_i	f_a
1	2	2
2	1	3
3	2	5
4	2	7
5	6	13

Datu kopurua (13) bakoitia da.

Erdia: $\frac{13}{2} = 6{,}5$

f_a = 6,5 balioa 5 eta 7ren artean dago. Bietatik handienari, 7ri, dagokion x_i balioa hartzen da medianatzat; hau da, 4. Beraz, **Me = 4** .

Datuak ordenatuz, erdiko balioa da mediana:

1 1 2 3 3 **4** 5 5 5 5 5 5

<------50%------>¡<-----50%--------->

2. adibidea.

x_i	f_i	f_a
1	3	3
2	1	4
3	2	6
4	3	9
5	3	12

$\frac{12}{2} = 6$

f_a = 6 balioa x_i = 3-ri dagokio. Mediana $= \frac{3 + \text{hurrengokoa}(4)}{2} = 3{,}5$

Datuak ordenatuz:

1 1 1 2 3 3 4 4 4 5 5 5

<---------------------> <---------------------->

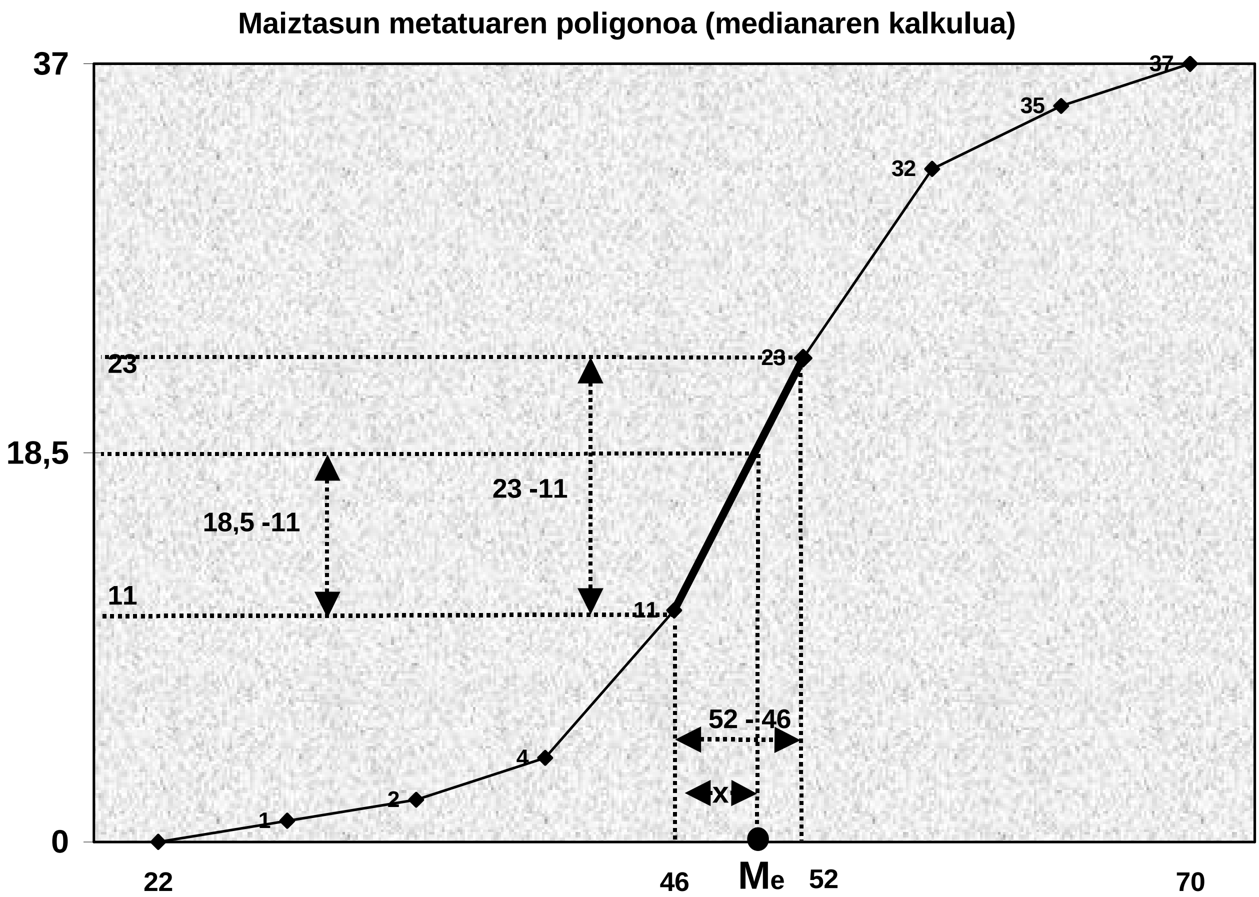
M_e = 3,5

- **Aldagaia tartekatuta dagoenenan.**

Adibidea

37 ikasleko gelan egindako test-ean jasotako emaitzak:

x_i	f_i	f_a	f_a (%)
[22 , 28)	1	1	2,70%
[28 , 34)	1	2	5,41%
[34 , 40)	2	4	10,81%
[40 , 46)	7	11	29,73%
[46 , 52)	12	23	62,16%
[52 , 58)	9	32	86,49%
[58 , 64)	3	35	94,59%
[64 , 70)	2	37	100,00%
	37		



Populazioaren erdia: $\frac{37}{2} = 18{,}5$. Zein da 18,5-i dagokion puntuazioa?; hori da mediana.

f_a zutabean 18,5 balioa 11 eta 23ren artean dago, eta x_i zutabean [46 , 52) tarteari dagokio; beraz, mediana tarte horretako balio bat da. Kalkulatzeko, interpolazio metodoa erabiliko dugu:

$$\left.\begin{array}{lcl} 23-11 & \rightarrow & 52-46 \\ 18{,}5-11 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{lcl} 12 & \rightarrow & 6 \\ 7{,}5 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 3{,}75$$

Mediana = 46 + 3,75 = **49,75**

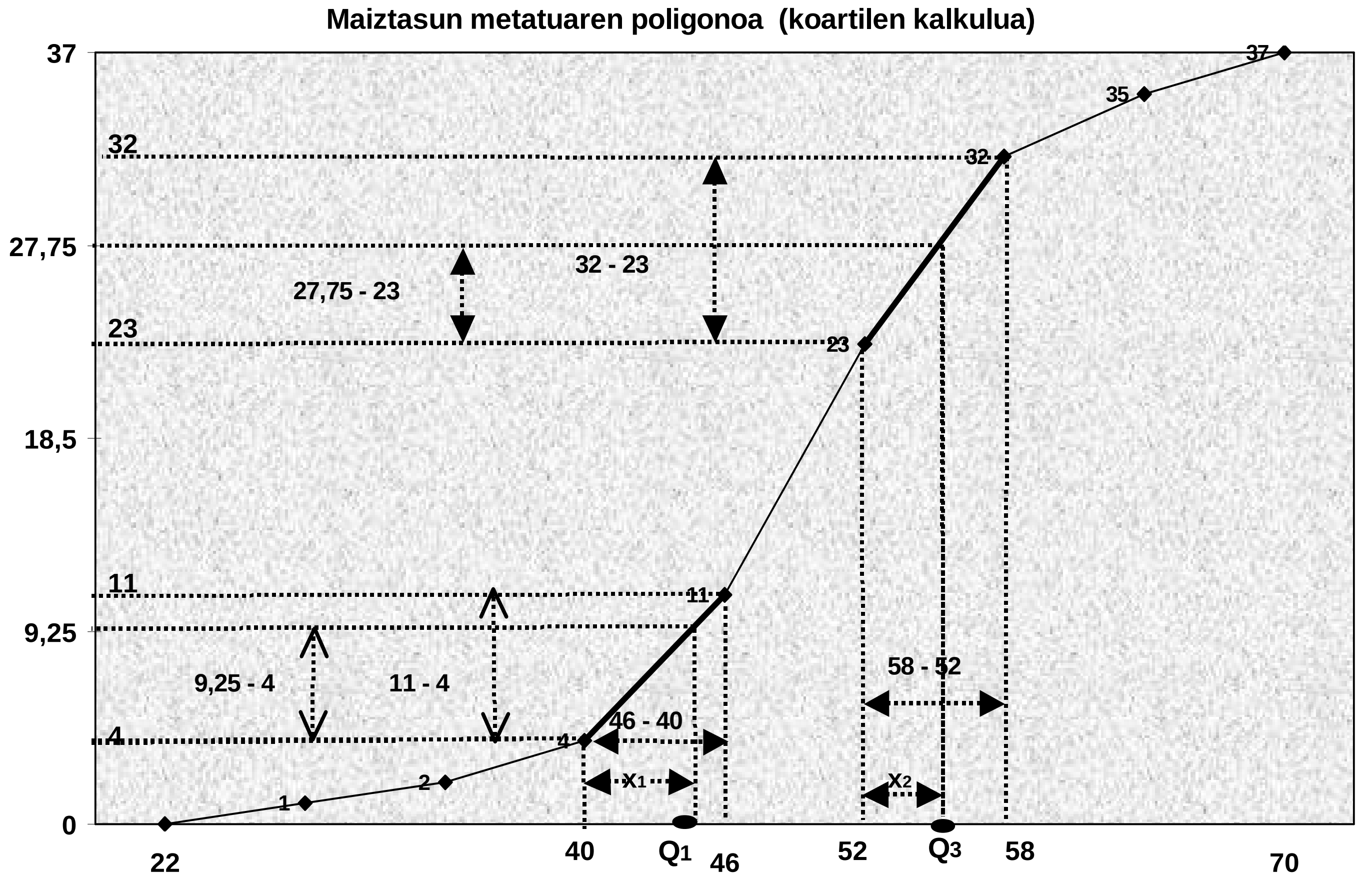
➢ Koartilak eta zentilak kalkulatzen

Adibidea

Demagun 37 ikasleekin egindako test-aren emaitzak:

x_i	f_i	f_a	f_a (%)
[22 , 28)	1	1	2,70%
[28 , 34)	1	2	5,41%
[34 , 40)	2	4	10,81%
[40 , 46)	7	11	29,73%
[46 , 52)	12	23	62,16%
[52 , 58)	9	32	86,49%
[58 , 64)	3	35	94,59%
[64 , 70)	2	37	100,00%

Kallkula ditzagun lehen koartila (Q_1), hirugarren koartila (Q_3) eta 15. perzentila (P_{15})



Lehen koartila (Q_1):

Populazioaren laurdena: $\frac{37}{4} = 9{,}25$. balio hura, f_a zutabean 4 eta 11 artean dago eta x_i zutabean [40 , 46) tartean. Tarte horretako balio bat da Q_1; kalkula dezagun, interpolazio metodoa erabilita:

$$\left.\begin{array}{ccc} 11-4 & \rightarrow & 46-40 \\ 9{,}25-4 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc} 7 & \rightarrow & 6 \\ 5{,}25 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 4{,}5$$

$Q_1 = 40 + 4{,}5 =$ **44,5**

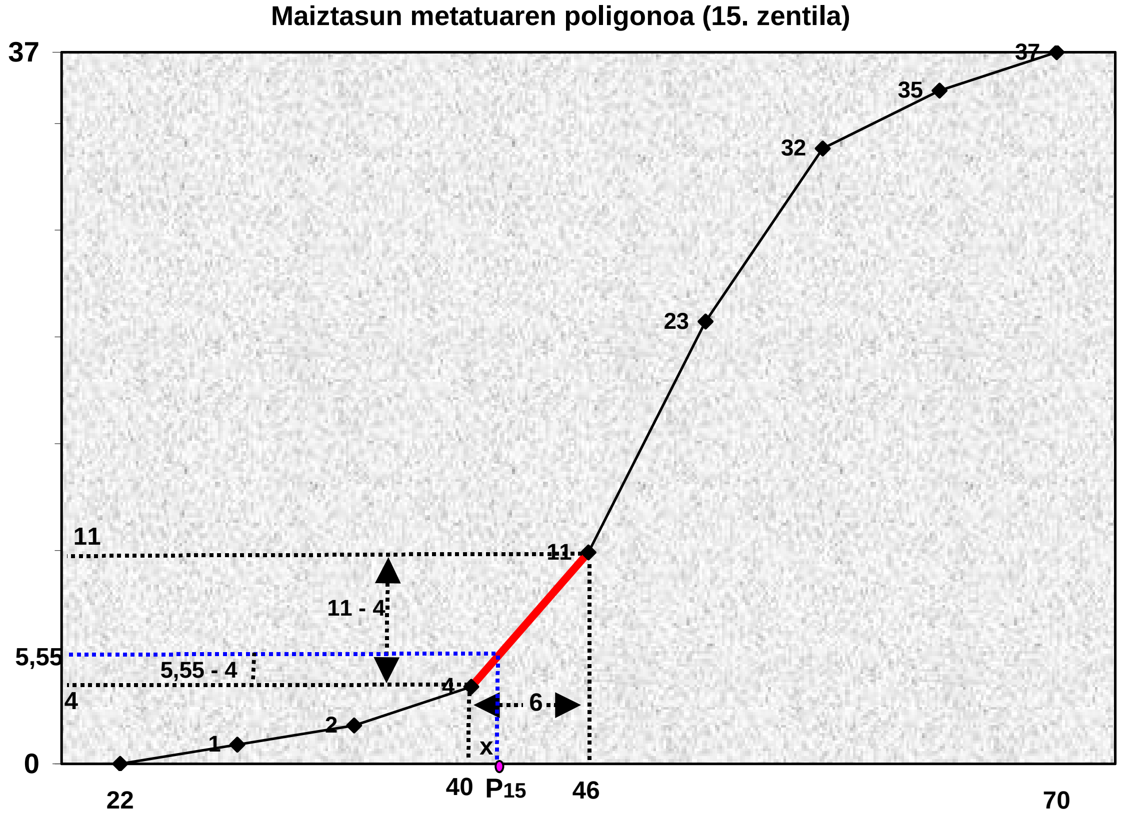
Era berean, hirugarren koartila (Q_3):

$37.\frac{3}{4}=27{,}75$. Balio horri dagokion x_i da Q_3:

$$\left.\begin{array}{lll} 32-23 & \rightarrow & 58-52 \\ 27{,}75-23 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{lll} 9 & \rightarrow & 6 \\ 4{,}75 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 3{,}16$$

Q_3 = 52 + 3,16 = **55,16**

15. perzentila (P_{15}):



$$37.\frac{15}{100}=5{,}55$$

$$\left.\begin{array}{lll} 11-4 & \rightarrow & 46-40 \\ 5{,}55-4 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{lll} 7 & \rightarrow & 6 \\ 1{,}54 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x=1{,}32$$

P_{15} = 40+1,32 = **41,32**

ARIKETAK

1. Dentista batek bere kontsulta doazen 200 bezeroen txantxar kopurua idatzi du. Hona hemen informazioa:

Txantxar kopurua	f_i	$(f_a)_r$
0	50	0,25
1	40	0,2
2	x	z
3	44	0,22
4	y	0,05

a) Kalkulatu *x*, *y* eta *z*.

b) Aurkitu batezbestekoa eta moda.

2. Ondoko balioei buruz, kalkulatu moda, mediana eta batezbestekoa:

3,4,6,4,5,8,8,4,3,5,6,6,8,4,2,5,5,4,2,8

3. Hona 32 ikasleren informatikako notak:

Notak (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ikasle kopurua (f_i)	2	3	2	5	3	8	4	3	1	1

Kalkulatu mediana, Q_1 , Q_3 , D_2 eta P_{17}

(Soluzioak: $M_e = 6$; $Q_1 = 4$; $Q_3 = 7$, $D_2 = 3$ eta $P_{17} = 3$)

4. 36 ikasleren altuerak neurtu dituzte.

Altuera (metroak)	[1,50 – 1,57)	[1,57 – 1,64)	[1,64 – 1,71)	[1,71 – 1,78)	[1,78 – 1,85)	[1,85 – 1,92)
Ikasle kopurua (f_i)	1	4	11	10	8	2

Kalkulatu Me (mediana), Q1 , Q3 , D6 eta P92

5. Populazio baten adinen banaketa aztertu eta honako emaitzak atera dituzte:

Adina (urteak)	[0 , 20]	[20 , 40]	[40 , 60]	[60 , 80]
Indibiduo kopurua	15		15	16

Ikusten duzunez [20 , 40] tarteari dagokion balioa ez da agertzen

a)Zein litzateke datu horren balioa adinen batezbestekoa 35 urte balitz?

b)Zein litzateke datu horren balioa adinen mediana 35 urte balitz?