ZIENTIFIKO-TEKNIKOA
Matematika I

2. ebaluazioa

- Zenbaki konplexuak
- Geometria planoan
- Konbinatoria
- Probabilitatea

Ignacio Zuloaga BHI (Eibar)

ZENBAKI KONPLEXUAK

Zenbaki konplexuen multzoa

Orain arte, etengabe zabaldu behar izan ditugu zenbaki-multzoak, azkenean zenbaki errealen multzora iritsi arte.

Gogoratu
Zenbaki-multzo nagusiak sinbolo hauen bidez adierazten dira:

N: Zenbaki **arruntak** (edo **naturalak**)

Z: Zenbaki **osoak**

Q: Zenbaki **arrazionalak**

I: Zenbaki **irrazionalak**

R: Zenbaki **errealak**

Zenbaki errealen multzoa, **R**, ere zabaldu egin beharko ote dugu? Hain zuzen, $x^2 + 1 = 0$ ekuazioak ez du soluziorik zenbaki errealen multzoan, zeren ez baitago zenbaki errealik karratua egitean *-1* ematen duenik.
Oro har, $\sqrt{-k}$ motako adierazpenek ez dute zentzurik *R* multzoak.

Adierazpen mota horiei balioa eman ahal izateko, zenbakien eremua berriro zabaldu izan behar dugu.
Hain zuzen, era honetan idatz dezakegu $\sqrt{-k}$ balioa:

$$\sqrt{-k} = \sqrt{k.(-1)} = \sqrt{k}\,.\,\sqrt{-1} \qquad k > 0 \text{ izanik}$$

Hortaz, problema hori ebatzita geratuko da, $\sqrt{-1}$ balioko zenbakia definituz gero. Zenbaki hori ***i*** letraz adierazi ohi da eta **unitate irudikaria** deritzo.

$$i = \sqrt{-1}$$

Esaterako, eragiketa baten ondorioz $x^2 = -9$ aterako balitz, horren emaitza hauxe litzateke:
$x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}\,.\,\sqrt{-1} = \pm 3i$

i zenbakia barruan duten adierazpenei *zenbaki konplexuak* deritze. Esaterako,

$3i,\ 2+5i,\ 7-\frac{i}{2}$... zenbakiak **z** letraz adierazten dira.

Zenbaki konplexuen multzoa **C** letraz adierazten da.

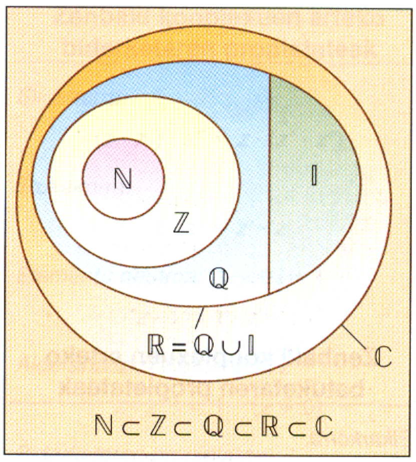
a + bi adierazpena, non *a* eta *b* zenbaki errealak diren, zenbaki konplexuen **forma binomikoa** da: **a** delakoa parte erreala da, eta **b** delakoa, parte irudikaria.

1 + 4i zenbaki konplexuaren parte erreala eta parte irudikaria hauek dira: *a=1* eta *b=4*

0 + 3i zenbakiaren parte erreala *0* da eta irudikaria *3*. Horregatik, *3i* idatziko dugu, huts-hutsean. Horiei, **zenbaki irudikariak** deritze.

Bestalde, *4 + 0i* zenbaki konplexuaren parte irudikaria *0* da. Kasu horretan *4* idatziko dugu, huts-hutsean. Era horretako zenbakiek **zenbaki erreal**ekin identifikatzen dira.

Horregatik har dezakegu zenbaki errealen multzoa, *R*, zenbaki konplexuen multzoaren, C, azpimultzotzat (ikus irudia)



- Bi zenbaki konplexu elkarren berdinak dira, baldin eta soilik baldin beren parte errealak eta irudikariak elkarren berdinak badira.

$$a + bi = a' + b'i \quad \Leftrightarrow \quad a = a' \quad \text{eta} \quad \mathrm{b} = \mathrm{b}'$$

3 + xi = y – 4i erlazioa bete ahal izateko, zein balio izan behar dute *x* eta *y*-k?

x = -4 eta y = 3

- *z = a + bi* zenbaki konplexuaren **aurkakoa** *-z = -a – bi* zenbakia da. Adibidez, *2 + 3i* eta *–2 – 3i*
- *z = a + bi* zenbaki konplexuaren **konjokatua** $\bar{z}$ *= a – bi* zenbakia da. Adibidez, *2 + 3i* eta *2 – 3i*

Soluziotzat zenbaki konplexuak dituzten ekuazioak

Dakizunez, zenbaki errealak soilik kontsideratuz gero, ekuazio batzuek ez dute soluziorik.

Bigarren mailako ekuazioak

Adibidez, kontsidera dezagun $x^2 + 6x + 58 = 0$ ekuazioa.

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{-196}}{2}$$

ez dago inolako zenbaki errealik $\sqrt{-196}$ balio duenik. Dena den, zenbaki konplexuekin soluzioak eman ahal dira.

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{-196}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{196\,.\,(-1)}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{196}\,.\,\sqrt{-1}}{2} = \frac{-6 \pm 14i}{2}$$

Soluzioak: $x_1 = -3 + 7i$ eta $x_2 = -3 - 7i$

Ariketa.

Kalkulatu bigarren mailako ekuazio hauen soluzioak:
a) $x^2 - 4x + 13 = 0$; b) $x^2 - x + 5 = 0$

Zenbaki konplexuen arteko eragiketak

Batuketa, kenketa eta biderketa zenbaki errealen arauei jarraituz eta $i^2 = -1$ dela kontuan hartuta egin behar dira.

Adibidez

(3 + 2i) + (5 + 6i) = (3 + 5) + (2 + 6)i = 8 + 8i

(3 + 2i) - (5 - 6i) = (3 - 5) + (2 – (-6i)) = -2 + 8i

(3 + 4i) . (2 – 5i) = 3 . (2 – 5i) + 4i . (2 – 5i) = 6 – 15i + 8i – 20i^2 =
= 6 – 15i + 8i – 20 (-1) =
= (6 + 20) + (-15 + 8)i =
= 26 – 7i

Ariketa. Kalkula itzazu

a) (3 – 2i) + (2 +4i)

b) –3 – (2 – 4i) + (2 – 7i)

c) (5 – i) . (3 + 2i)

d) (2 + i) . (2 – i)

Bi **zenbaki konplexu konjokaturen**, *a + bi* eta *a – bi*, arteko **biderkadura zenbaki erreala** da:
$(a + bi) \,.\, (a - bi) = a^2 + b^2$

Zatiketa.

Zenbaki konplexuen zatiketa egiteko, zenbakitzailea eta izendatzailea biderkatu egin behar dira izendatzailearen konjokatuaz.

$$\frac{-3+i}{2+3i} = \frac{(-3+i)\,.\,(2-3i)}{(2+3i)\,.\,(2-3i)} = \frac{-6+9i+2i-3i^2}{4-6i+6i-9i^2}.= \frac{-6+9i+2i-3(-1)}{4-9(-1)} = \frac{-3+11i}{13} = \frac{-3}{13}+\frac{11}{13}i$$

Ariketak.

1. Kalkula itzazu

$a)\ \frac{2-i}{1-5i}$; $b)\ \frac{4+3i}{i}$; $c)\ \frac{3i}{2-4i}$; $d)\ \frac{5-i}{2i}$

2. Kalkula ezazu z = -1+2i zenbaki konplexuaren alderantzizkoa.

i-ren berreturak

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \,.\, i = (-1) \,.\, i = -i$
$i^4 = i^2 \,.\, i^2 = (-1) \,.\, (-1) = 1$
$i^5 = i^4 \,.\, i = 1 \,.\, i = i$
$i^6 = i^4 \,.\, i^2 = 1 \,.\, (-1) = -1$
$i^7 = i^4 \,.\, i^3 = 1 \,.\, (-i) = -i$
...

Hegalean *i*-ren lehenengo zazpi berreturak nola kalkulatzen diren ikus dezakezu, kontuan izanik ezen, definizioz, $i^2 = -1$ dela.

Ikus dezakezunez, berretura horien balioak **1, i, -1** eta **–i** dira, eta *lautik laura* errepikatzen dira.

Esate baterako, zein ote da i^{51} berreturaren balioa?

$i^{51} = i^4 \,.\, i^4 \,.\, i^4$ ... (12 aldiz) . i^3 =

= 1 . 1 . 1... (12 aldiz) . $i^3 = i^3 = -i$

Kontuan izan 3 zenbakia 51ren eta 4en arteko zatiketaren hondarra dela

2. adibidea *Kalkulatu i^{38} eta i^{40}*

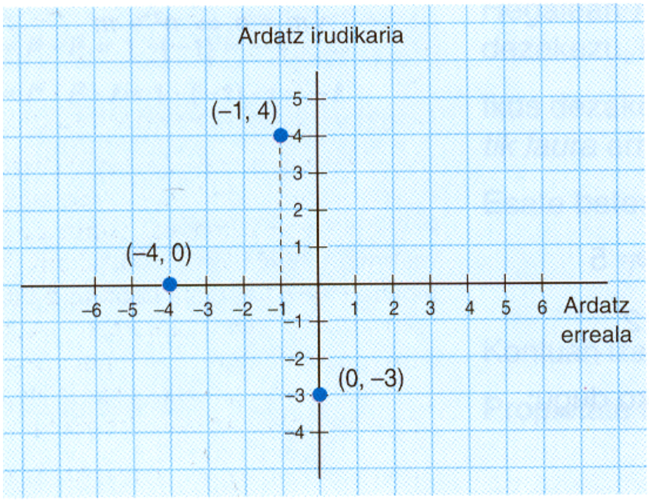
a) 38 eta 4-ren zatiketaren hondarra 2 da. Beraz: $i^{38} = i^2 = -1$

b) 40 eta 4-ren zatiketaren hondarra 0 da. Beraz: $i^{40} = i^0 = 1$

Ariketa. Kalkula itzazu i^{76} , i^{175} ,$(2i)^{10}$, (1-2i).(2+i).3i

Zenbaki konplexuen adierazpide grafikoa

Dakizunez, zenbaki errealak zuzenaren gaineko puntuen bidez adieraz daitezke. Era berean, zenbaki konplexuak planoaren gaineko puntuen bidez adieraziko ditugu.



Horretarako, koordenatu cartesiarren sistema bat erabiliko dugu.

- *z = -4* zenbakiaren adierazpena abzisa-ardatzaren gaineko (-4 , 0) puntua da.

Zenbaki errealak abzisa-ardatzean adieraziko ditugu. Abzisa-ardatzari **ardatz erreala** deritzo.

- *z = -3i* zenbakiaren adierazpena ordenatu-ardatzaren gaineko (0, -3) puntua da.

Zenbaki irudikariak ordenatu-ardatzean adieraziko ditugu. Ordenatu-ardatzari **ardatz irudikaria** deritzo.

- *z = -1 + 4i* zenbakiaren adierazpena planoko (-1 , 4) puntua da.

z = a + bi zenbakiaren adierazpena den planoko puntuari zenbaki horren **afixua** deritzo.

```
Ariketak.
```

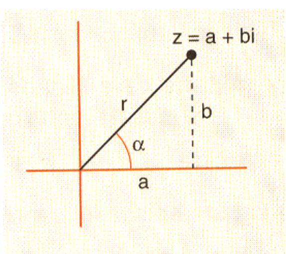
```
1. Adieraz ezazu era grafikoan z = 4+3i zenbaki konplexuaren
afixua, baita zenbaki horren aurkakoarena eta konjukatuarena ere.
```

```
2. Kontsidera ditzagun ondoko afixuak:
```
$P_1=(-3,2)$; $P_2=(2,-4)$; $P_3=(3,0)$; $P_4=(0,1)$; $P_5=(0,-5)$; $P_6=(0,0)$

a) Adieraz itzazu planoan

b) Idatz itzazu dagozkien zenbaki konplexuak era binomikoan.

Zenbaki konplexuak forma polarrean



Alboko irudian *z = a + bi* zenbaki konplexuaren adierazpen grafikoa dago.

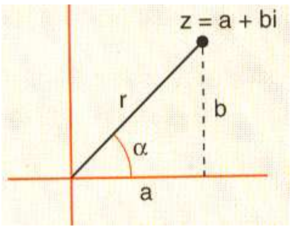
r distantziari zenbaki konplexuaren **modulua** deritzo eta era honetan adierazten da: $|z| = r$

α angeluari zenbaki konplexuaren **argumentua** deritzo eta era honetan adierazten da: $\arg(z) = \alpha$.

Hortaz, honelaxe idatziko dugu: $z = r_\alpha$

Idazteko forma horri zenbaki konplexuaren **forma polarra** deritzo.

Forma binomikotik forma polarrera bihurtzea.



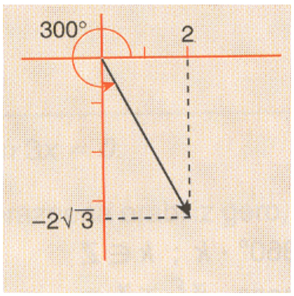
Alboko irudian *z* = *a* + *bi* zenbakiaren adierazpen grafikoa dago. Ikus daitekeenez:

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ eta $tg\,\alpha=\dfrac{b}{a}$

Adibidea. Idatzi forma polarrean $z=2-2\sqrt{3}\,i$ *zenbakia*

Ebazpena:

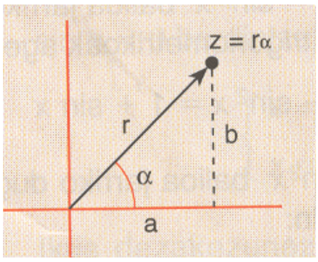
$r=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=4$



$tg\,\alpha=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}\;\Rightarrow\;\alpha=120^{\circ}$ eta $\alpha=300^{\circ}$. Bietatik zein den jakiteko, zenbakiaren afixua zein koadrantetan dagoen ikusi behar da. Kasu honetan laugarren koadrantean; beraz, argumentua 300º da.

Zenbakia $z=4_{300^{\circ}}$ da

Forma polarretik forma binomikora bihurtzea.



Alboko irudian $z=r_{\alpha}$ zenbakiaren adierazpen grafikoa dago. Ikus daitekeenez:

$a=r\cos\alpha$ eta $b=r\sin\alpha$

Beraz, *z* = *a* + *bi* zenbakia modu honetan adierazi ahal dugu:
$z=r\cos\alpha+(r\sin\alpha)i=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

Adierazpen horri zenbaki konplexuaren **forma trigonometrikoa** deritzo.

Adibidea. Pasatu forma binomikora $6_{45^{\circ}}$ *zenbaki konplexua*

Ebazpena:

Lehenik, *a* eta *b* kalkulatuko ditugu:

$a=6.\cos 45^{\circ}=6.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$; $b=6.\sin 45^{\circ}=6.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

Beraz, $z=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i$

Ariketak

1. Idatz itzazu forma polarrean ondoko zenbaki konplexuak:
   $a)\ 2-\sqrt{3}\,i$; $b)\ -1+i$; $c)\ 5i$; *d)* -4

2. Idatz itzazu forma binomikoan ondoko zenbaki konplexuak:
   $a)\ 4_{125^{\circ}}$; $b)\ 3_{290^{\circ}}$; $c)\ 6_{135^{\circ}}$; $d)\ 2_{210^{\circ}}$; $e)\ 5_{180^{\circ}}$

Forma polarrean dauden zenbaki konplexuen arteko eragiketak

Biderketa

Forma polarrean dauden bi zenbaki konplexuen biderkadura beste zenbaki konplexu bat da, zeinaren modulua bi zenbakien moduluen arteko biderkadura den eta zeinaren argumentua argumentuen arteko batura den.

$$r_\alpha \,.\, r'_\beta = (r\,.\,r')_{\alpha+\beta}$$

Adibidez, $r_\alpha = 6_{30°}$ eta $r'_\beta = 4_{60°}$ badira, $6_{30°}\,.\,4_{60°} = (6\,.\,4)_{30°+60°} = 24_{90°}$ da.

Zatiketa

Forma polarrean dauden bi zenbaki konplexuen zatidura beste zenbaki konplexu bat da, zeinaren modulua bi zenbakien moduluen arteko zatidura den eta zeinaren argumentua argumentuen arteko kendura den.

$$\frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta} \quad ; \quad r' \neq 0°$$

Adibidez, $r_\alpha = 9_{60°}$ eta $r'_\beta = 3_{20°}$ badira, $\frac{9_{60°}}{3_{20°}} = \left(\frac{9}{3}\right)_{60°-20°} = 3_{40°}$ da.

Berreketa

Formula: $(r_\alpha)^n = r^n_{n\alpha}$

Esate baterako, $r_\alpha = 8_{25°}$ bada r^3_α hauxe izango da: $(8_{25°})^3 = 8^3_{3\,.\,25°} = 512_{75°}$

Zenbaki konplexuak forma trigonometrikoan idazten baditugu, honako hau lortuko dugu:

$$[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

Berdintza horri **De Moivre-ren formula** deritzo eta oso baliagarria da trigonometrian.

Ariketak

1. Baldin $z_1 = 3_{30°}$ eta $z_2 = 6_{210°}$ badira, lor itzazu ondoko eragiketen emaitzak:

   $a)\ z_1\,.\,z_2 \qquad b)\ \frac{z_1}{z_2} \qquad c)\ \frac{z_2}{z_1}$

2. Kalkula ezazu $\frac{2_{10°}\,.\,1_{40°}\,.\,8_{70°}}{4_{30°}}$

3. Kalkula itzazu:

   $a)\ (5_{30°})^2 \ ; \quad b)\ (3_{75°})^3 \ ; \quad c)\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 \ ; \quad d)\ \left(-1 + i\sqrt{3}\right)^4 \ ; \quad e)\ (-1 - i)^5$

Geometria planoan

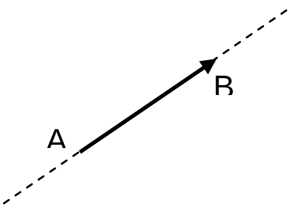
1. Planoko bektoreak

Magnitude fisiko batzuk —tenperatura, masa, energia...— guztiz determinatuta geratzen dira *eskalar* batez, zenbaki batez. *Magnitude eskalarrak* direla esaten da.

Ordea, beste magnitude fisiko batzuk —higikari baten posizioa eta abiadura, indarra...— erabat determinatzeko, magnitudearen modulua, norabidea eta noranzkoa adierazi behar dira. Magnitude horiek *magnitude bektorialak* direla esaten da.

Magnitude bektorialak bektore bidez adieraziko dira.

1.1 Bektore finkoak

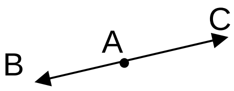


A eta B puntuek segmentu bat osatzen dute,eta A jatorritzat eta B muturtzat hartuta bektore finko bat. Eta honela adieraziko dugu: $\overrightarrow{AB}$
Bektorea definitzeko beharrezkoa da hiru ezaugarri hauek zehaztea:

Modulua AB segmentuaren luzera da, eta $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ eran adierazten da.

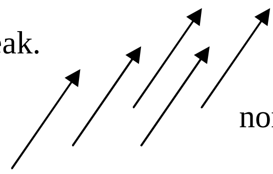
Norabidea A eta B puntuetatik pasatzen den zuzena da.

Noranzkoa A-tik B-ra joatean definitzen dena (grafikoki segmentuaren geziak adierazten duena).



Norabide bakoitzean elkarren aurkako bi noranzko daude: $\overrightarrow{AB}$ eta $\overrightarrow{AC}$.

Bektore ekipolenteak
Behatu ondoko bektoreak.

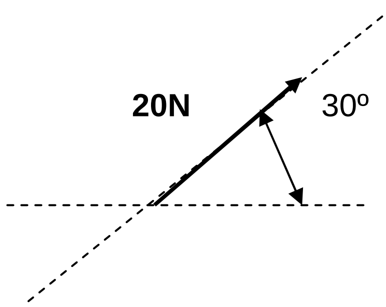


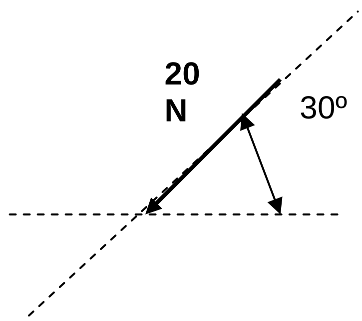
Ekipolenteak dira. Zergatik? Modulu bera, norabide bera eta noranzko bera dituztelako.

Beraz, modulu, norabide eta noranzko bera dituzten bektoreak bektore ekipolenteak direla esango dugu.

Adibidez:
Indarra ezaugarri fisikoa magnitude bektoriala da.
• **Modulua** unitate-kopuru batez ematen da: 20 N (20 newton).
• **Norabidea** akzio-lerroaz.
• **Noranzkoa** gezi baten puntaz.

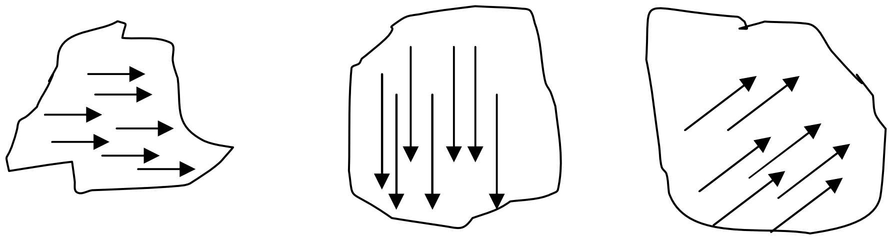
Irudiko bi indarrek modulu bera eta akzio-lerro bera dute, baina noranzkoa aurkakoa. Partikulan kontrako efektuak eragingo dituzte.





1.2 Bektore askeak

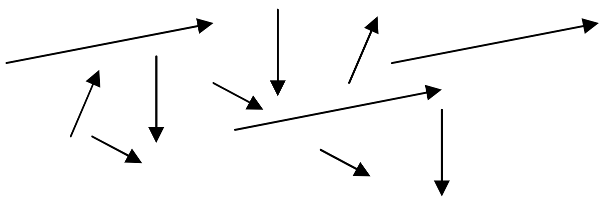
Modulu, norabide eta noranzko bera dituzten bektoreek multzo bat osatzen dute; ekipolenteak diren bektoreen multzoa.Honela, planoko bektore finko guztiak bektore-multzoka sailka ditzakegu.



Multzo horietako bakoitza *bektore aske* bat da, eta bertan dagoen bektore finkoetako bakoitza *ordezkari* bat.

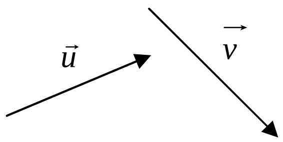
Bektore askeak letra xehez $(\vec{u}\ ,\vec{v},\ \vec{w},...)$ adierazten dira, eta planoko bektore askeen multzoa **V$_2$** ikurraz.

```
1.1 Ariketa.-
    Bil itzazu ondoko irudiko bektoreak bektore ekipolenteen
    multzoetan. Zenbat bektore aske daude?
```

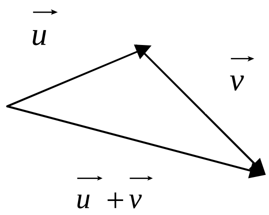


1.3 Bektore askeen arteko eragiketak

- **Batuketa**



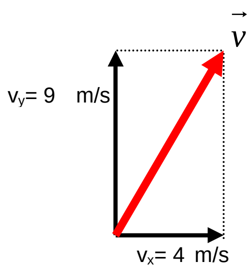
$\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektore askeak emanda, $\vec{u}+\vec{v}$, bien arteko batura honela definitzen da:
Jatorria $\vec{u}$ -ren ordezkariarena eta muturra $\vec{v}$ -ren ordezkariarena dituen bektorea. Horixe da $\vec{u}+\vec{v}$.



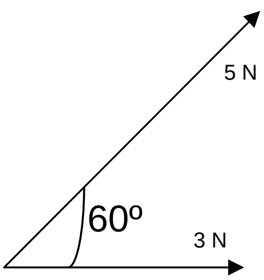
Fisikako bi adibide

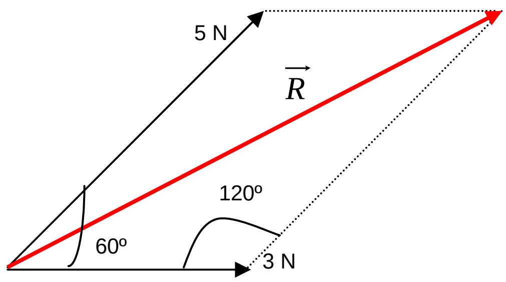
- Txalupaz ibai bat zeharkatzean, korrontearen abiadura 4m/s-koa da, eta gure txalupak korrontearekiko perpendikularki 9 m/s-ko abiadura du. Zein da txalupak duen abiadura?

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad \left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4^2 + 9^2} = 9{,}8\,\text{m/s}$$



- Gorputz batean bi indar aplikatzen dira. Lehenengo indarra 3 N-ekoa da, bigarrena 5 N-ekoa, eta bien arteko angelua 60ºkoa da. Kalkula ezazu indar erresultantearen modulua.





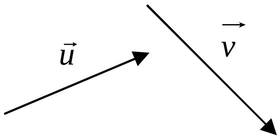
$$\left|\boldsymbol{R}\right|^2 = 3^2 + 5^2 - 2.3.5.\cos\ 120^\circ =$$

$$= 9 + 25 - 30.(-\frac{1}{2}) = 49 \quad \Rightarrow$$

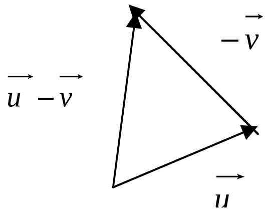
$$\left|\boldsymbol{R}\right| = 7\ N$$

- **Kenketa**

$\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektore askeak emanda, bien arteko kendura lortzeko, $\vec{u}-\vec{v}$ bektorea, nahikoa da $\vec{v}$ ren aurkakoa ($-\vec{v}$) $\vec{u}$ bektorearekin batzea, alboko irudian adierazten den bezala.



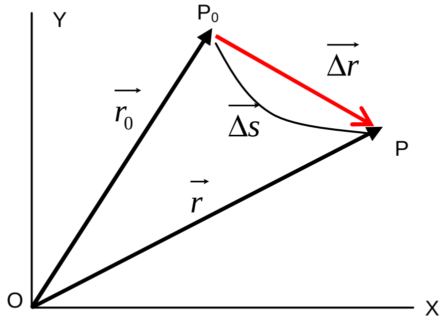
Zeren eta $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$ baita.



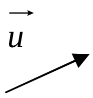
Fisikako adibide bat:

Bi punturen arteko **desplazamendu-bektorea**, $\Delta \boldsymbol{r}$, jatorria P_0 puntuan duen eta muturra P puntuan duen bektorea da, eta puntu horien, P eta P_0, posizio-bektoreen kenketa eginda lortzen da.

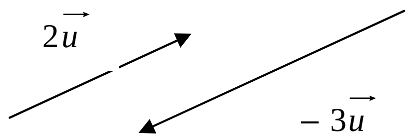
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\Delta r} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Delta r = r - r_0}$$



- ***k*** **zenbaki erreal baten bidezko biderketa**



$\vec{u}$ bektorea emanda, hona hemen $2\vec{u}$ eta $-3\vec{u}$ bektoreak.



$k\,.\vec{u}$ biderkadura ondoko ezaugarriak dituen bektorea da:

- Norabidea: $\vec{u}$ -rena.
- Modulua: $\vec{u}$ -ren moduluaren eta *k*-ren balio absolutuaren arteko biderkadura.
- Noranzkoa: $\vec{u}$ -ren noranzko bera *k* positiboa bada, eta $\vec{u}$ -ren aurkakoa *k* negatiboa bada.

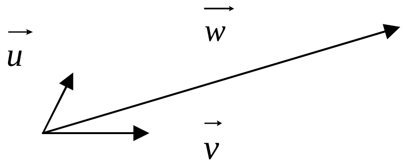
1.4 Bektoreen konbinazio lineala

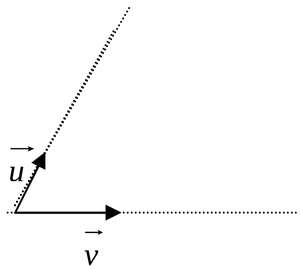
$\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektore askeak emanda, $k_1.\vec{u}+k_2.\vec{v}$ motako adierazpena $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen *konbinazio lineala* dela esango dugu, non k_1 eta k_2 edozein zenbaki erreal diren.

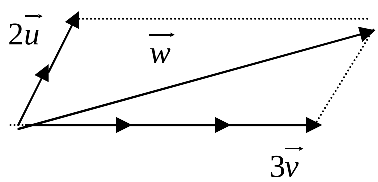
Esate baterako: $\vec{w}=2.\vec{u}-4.\vec{v}$ bektorea $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen konbinazio lineala da.

Garrantzitsua: Norabide ezberdineko bi bektore emanda, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$, planokidea den beste edozein bektore, $\vec{w}$, bi bektore horien konbinazio lineal modura adieraz daiteke.
Horren adibide bat emango dugu: $\vec{w}=2.\vec{u}+3.\vec{v}$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ eta $\vec{w}$ bektoreek jatorri berean kokatuko ditugu, eta $\vec{w}$ bektorea beste bien konbinazio lineal modura adierazi. Begira grafikoa.

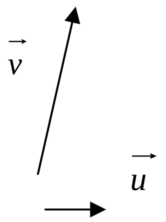






1.2 Ariketa.-

$\vec{u}$ eta $\vec{v}$ norabide ezberdineko bektoreak hartuta,



adieraz itzazu grafikoki beste bektore hauek: $\begin{cases} \vec{u}+\vec{v} \\ 3\cdot\vec{u} \\ \vec{v}-\vec{u} \\ 4\vec{u}-\vec{v} \end{cases}$

1.3 Ariketa.-

Bi indar perpendikularren erresultantea 40 N-ekoa da, eta indarretako batek 25 N-eko modulua du.
a)Marraz ezazu indarren eskema.
b)Determina ezazu bigarren indarraren modulua.

1.5 V2 -ren oinarriak

Ikusi dugun moduan, norabide ezberdineko bi bektore ez-nulu, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$, eta beste edozein bektore planokide, $\vec{w}$, emanda, beti lor ditzakegu bi zenbaki erreal, k_1 eta k_2, ondoko berdintza betetzen dutenak: $\vec{w}=k_1.\vec{u}+k_2.\vec{v}$

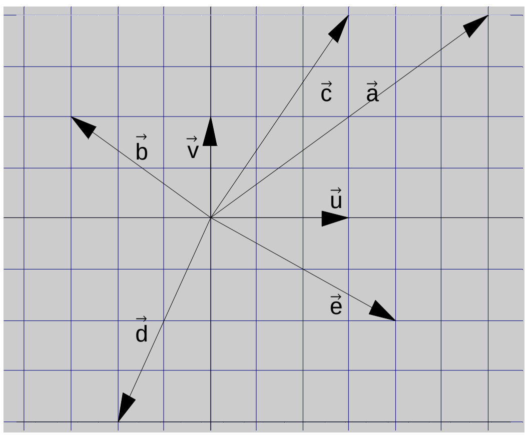
$B=\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\}$ multzoa V_2-ren **oinarri** bat da, eta k_1 eta k_2 zenbakiak $\vec{w}$ bektorearen **osagaiak**.

$\vec{w}$ bektorea beste era honetan ere adieraz dezakegu: $\vec{w}=(k_1,k_2)$

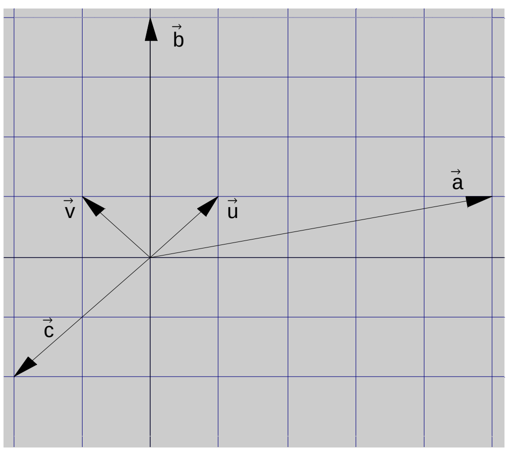
Esate baterako, $\vec{w}=2.\vec{u}+3.\vec{v}$ bada, $\vec{w}$ bektorearen osagaiak (2 , 3) direla esango dugu, eta era honetan idatziko dugu: $\vec{w}=(2{,}3)$

Ariketak.-

1.3- Adierazi alboko irudiko bektoreen osagaiak, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreek eraturiko oinarrian.

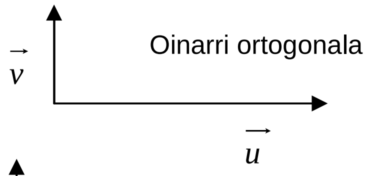


1.4- Adierazi gauza bera, oinarriaren $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreak alboko irudian adierazten direnak badira.

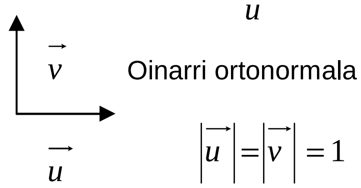


Oinarri ortogonala eta oinarri ortonormala

Oinarriaren bi bektoreak elkarren perpendikularrak badira, **oinarri ortogonala** eratzen dutela esango dugu.



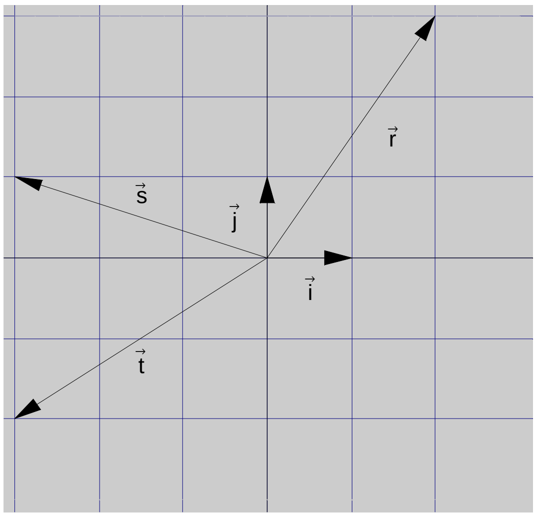
Elkarren perpendikularrak izateaz gain, bakoitzaren moduluak 1 balio badu, **oinarria ortonormala** dela esango dugu.



Gehienetan, oinarri ortonormala adierazteko $\vec{i}$ eta $\vec{j}$ erabiltzen dira; hots, $B = \{ \vec{i} \ , \ \vec{j} \ \}$
Beste zenbait kasutan (fisikan adibidez), $\hat{\imath}$ eta $\hat{\jmath}$ bidez adierazten da.

Ariketak.-

1.5- Adieraz itzazu irudiko $\vec{r}$, $\vec{s}$ eta $\vec{t}$ bektoreen osagaiak $B = \{ \vec{i} \ , \ \vec{j} \ \}$ oinarrian.



1.6- Aurreko ariketako oinarri bera hartuta, $B = \{ \vec{i} \ , \ \vec{j} \ \}$, adieraz itzazu era grafikoan
$\vec{a}$ = (-1 , 3) eta $\vec{b}$ = (2 , 5) bektoreak.

1.6 Osagaien bidezko eragiketak

Ikus dezagun, adibide baten bidez, zer gertatzen den bektoreen osagaiekin, bektoreen batuketa egitean edo bektorea zenbaki erreal baten bidez biderkatzean.

1-b. *Adibidea.*

Oinarri jakin batean $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen osagaiak $\vec{u}$ =(2 , -5) eta $\vec{v}$ =(-3 , 2) dira.

Kalkulatu: a) $\vec{u} + \vec{v}$, *b*) $3\,\vec{u}$ *eta* c) $4\vec{u} - \vec{v}$

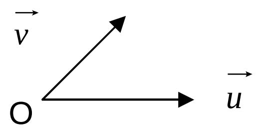
- a) $\vec{u} + \vec{v}$ = (2,-5) + (-3,2) = (2+(-3) , -5+2) = (-1 , -3)
- b) $3\vec{u}$ = 3 . (2,-5) = (6 , -15)
- c) $4\vec{u} - \vec{v}$ = 4 . (2,-5) – (-3,2) = (11 , -22)

1.7 Ariketa.-

Oinarri jakin batean $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen osagaiak $\vec{u}=(1,3)$ eta $\vec{v}=(2,-2)$ dira. Kalkulatu $-5\vec{v}$ *eta* $2\vec{u}-3\vec{v}$ bektoreen osagaiak.

1.7 Planoko bektoreen koordenatuak

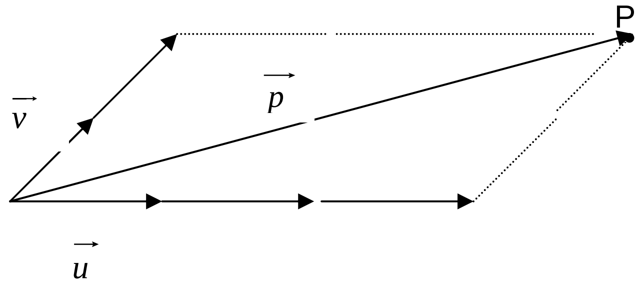
Kontsidera ditzagun planoko O puntu finkoa eta V_2-ren $B=\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\}$ oinarria.



O eta $B=\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\}$ multzoa planoko **erreferentzia-sistema** bat da, eta planoko edozein punturen posizioa determinatzeko balio du.

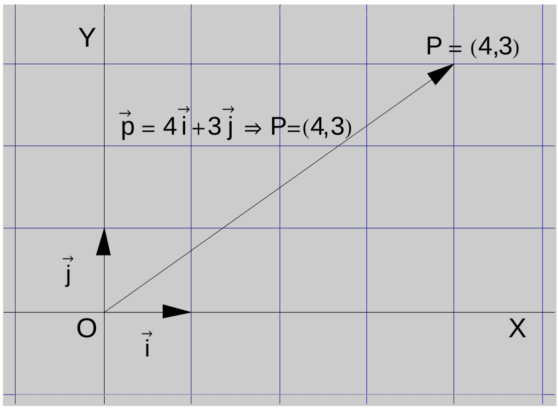
$R=\{O\ ;\ \vec{u}\ ,\vec{v}\}$ eran adieraziko dugu.

Izan ere, planoko beste edozein P punturi $\vec{p}$ bektore askea dagokio, eta P puntuaren *posizio-bektorea* deitzen zaio. Alboko grafikoan $\vec{p}$-ren osagaiak (3 , 2) dira.



Balio horiek P puntuaren **koordenatuak** direla esango dugu.

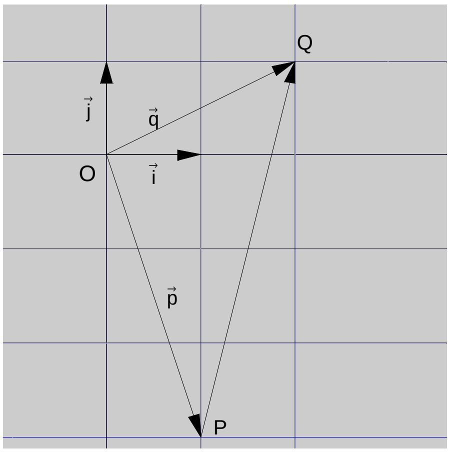
$\vec{p}=3\vec{u}+2\vec{v}\ \Rightarrow P=(3,2)$



Erreferentzia-sistemaren oinarria ortonormala bada, puntu batek dituen koordenatuak eta puntuaren koordenatu cartesiarrak kointzidenteak dira.

Hemendik aurrera oinarri ortonormala duen erreferentzia-sistema erabiliko dugu, eta ardatz cartesiarrak OX (abszisa) eta OY (ordenatua) ardatzak izango dira.

Ariketa ebatziak:



- P eta Q puntuak emanda, zein dira $\overrightarrow{PQ}$ bektorearen osagaiak?

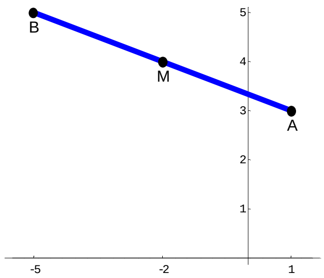
  Demagun P =(1 , -3) eta Q= (2 , 1) direla.

  $$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = (2-1, 1-(-3)) = (1, 4)$$

- Irudiko AB segmentua emanda, zein dira M erdiko puntuaren koordenatuak?

  Demagun A = (1 , 3) eta B = (-5 , 5) direla.
  M puntuaren koordenatuak, (m_1 , m_2), honela kalkulatuko ditugu:

  $$m_1 = \frac{1+(-5)}{2} = -2 \quad , \quad m_2 = \frac{3+5}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad M = (-2 , 4)$$

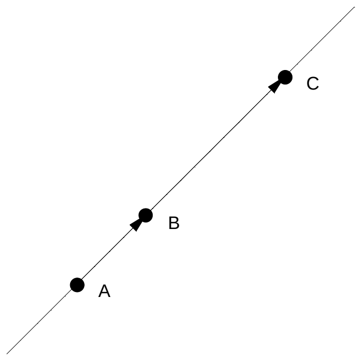


1.8 Ariketa-
A = (7 , 5) eta B = (-2 , 4) puntuak emanda:

- Kalkulatu $\overrightarrow{AB}$ bektorearen koordenatuak
- Lor itzazu M, N eta P puntuen koordenatuak, hiru puntu horiek AB segmentua lau parte berdinetan zatitzen dutela jakinik.

1.3 Puntu alineatuak

Hiru –edo gehiago– puntu elkarrekin alineaturik egotea zuzen berean egotea da.



1-c. *Adibidea*

Esan A, B eta C puntuak elkarrekin alienaturik dauden ala ez, ondoko kasuetan.
a.) A=(0,3), B=(1,1) eta C=(-1,5)
b.) A=(-1,3),B=(4,0) eta C=(2,6)

A, B eta C puntuak alienaturik badaude, $\overrightarrow{AB}$ eta $\overrightarrow{AC}$ elkarren proportzionalak dira.
Hots: $\overrightarrow{AC} = k\,.\overrightarrow{AB}$

a.) $\overrightarrow{AC} = (-1-0, 5-3) = (-1, 2)$
$\overrightarrow{AB}$ = (1-0,1-3)=(1,-2)

Proportzionalak dira (k=-1); beraz, alienatuta daude.

b.) $\overrightarrow{AC} = (2+1, 6-3) = (3, 3)$
$\overrightarrow{AB}$ = (4+1,0-3)=(5,-3)

Ez dira proportzionalak; beraz, ez daude alineatuta.

1.9 Ariketa.-
Froga ezazu A=(1,2), B=(-2,3) eta C=(0,5) puntuak alineaturik dauden ala ez.

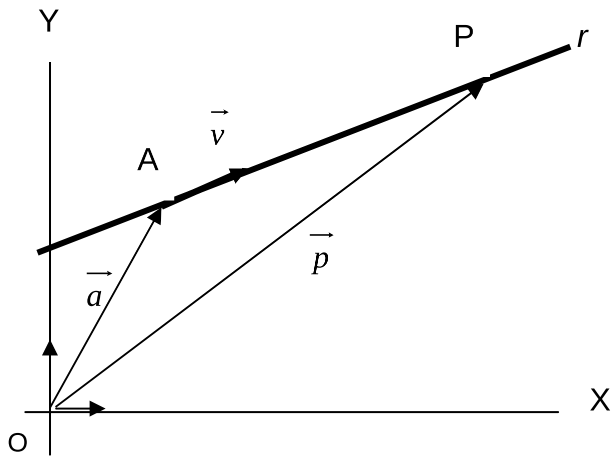
2. Zuzena planoan

2.1 Zuzenaren ekuazioak

Planoan zuzen bat determinatzeko, bi puntu behar dira, edo bestela, puntu bat eta norabidea adierazten duen bektore bat. Bektore horri **bektore zuzentzailea** esaten zaio.

Erreferentzia-sistema ortonormal batean, har dezagun A puntutik pasatu eta v bektore zuzentzailea duen r zuzena.

Zuzen hori era askotan adieraz daiteke:



Ekuazio bektoriala

Alboko irudian ikus daitekeenez, r zuzeneko edozein P puntu emanik, $\overrightarrow{AP}$ bektorea $\vec{v}$-ren proportzionala da; hots, $\overrightarrow{AP} = k.\vec{v}$ da, non k zenbaki erreal bat den.

Bestalde, honako hau dugu: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ edo $\vec{p} = \vec{a} + k.\vec{v}$**.**

Adierazpen hori r zuzenaren **ekuazio bektoriala** da.

Ekuazio parametrikoak

Demagun $\vec{p}$, $\vec{a}$ eta $\vec{v}$ bektoreen osagaiak, hurrenez hurren, (x , y), (a_1 , a_2) eta (v_1 , v_2) direla. $\vec{p} = \vec{a} + k.\vec{v}$ ekuazio bektorialean, bektoreak osagaien bidez adierazita, ondokoa lortuko dugu:

$$(x , y) = (a_1 , a_2) + k . (v_1 , v_2) \quad \text{edo} \quad \begin{cases} x = a_1 + k.v_1 \\ y = a_2 + k.v_2 \end{cases}$$

Ekuazio horiek zuzenaren **ekuazio parametrikoak** dira.

2-a. *Adibidea.*

Zein dira (2 , -1) puntutik pasatu eta $\vec{v} = (-3\ ,\ 1)$ bektore zuzentzailea duen zuzenaren ekuazio bektoriala eta parametrikoak?

Bektoriala: (x , y) = (2 , -1) + k . (-3 , 1)

Parametrikoak: $\left.\begin{array}{l} x = 2 - 3k \\ y = -1 + k \end{array}\right\}$

Ekuazio jarraitua

Ekuazio parametrikoetan v_1 eta v_2 zero ez badira, bi ekuazioetan *k* bananduta , eta adibidearekin jarraituz, ondokoa lortuko dugu:

$k = \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - 2}{-3} = \frac{y + 1}{1}$ zuzenaren **ekuazio jarraitua** da. Eta beraren bektore zuzentzailea $\vec{v} = (-3 \; , \; 1)$ da.

Ekuazio orokorra

Ekuazio jarraituan eragiketak eginez eta gaiak bilduz, hauxe lor dezakegu:

1.(x - 2) = -3.(y + 1) $\Rightarrow$ **x + 3y + 1 = 0**

Adierazpen hori zuzenaren **ekuazio orokorra** da, eta **Ax + By + C = 0** forma hartzen du. Batzuetan, ekuazio **cartesiarra** edo ekuazio **inplizitua** izenak ere erabiltzen dira.

Zuzen horren bektore zuzentzailea $\vec{v} = (-B \; , \; A)$ da, zeren $A = v_2$ eta $B = -v_1$ baitira.

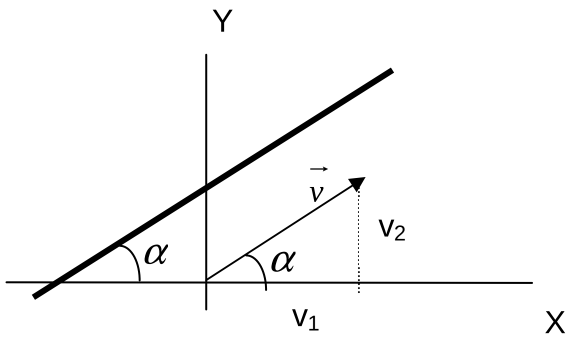
2-b. *Adibidea*
x + 3y +1 = 0 zuzenean, bektore zuzentzailearen osagaiak (-3 , 1) dira, zeren A = 1 eta B = 3 baitira.

Puntu-malda ekuazioa

Zuzenaren ekuazio jarraituan, eta adibidearekin jarraituz, *y + 1* bananduz, ondokoa lortuko dugu:

$$y+1=-\frac{1}{3}(x-2)$$

Kontura zaitezkeenez, $-\frac{1}{3}$ zatidura $\frac{v_2}{v_1}$ da.



Zatidura horri zuzenaren **malda** deritzo, eta **m** letraz adierazten da.

Beraz, ondoko formula dugu: $\mathbf{y - a_2 = m\,(x - a_1)}$. Hori da zuzenaren **puntu-malda ekuazioa.**

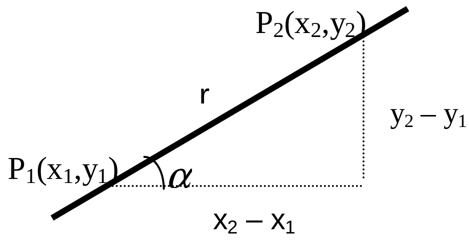
2-c. *Adibidea*
Zein da (-5 , 7) puntutik pasatu eta m = -2 duen zuzenaren ekuazioa?

$y-7=-2(x+5) \quad \rightarrow \quad y-7=-2x-10 \quad \rightarrow \quad 2x-y-3=0$

Malda

Malda (m), $\frac{v_2}{v_1}$ zatidura eta zuzenak abzisa-ardatzarekin eraturiko α angeluaren tangentea elkarren berdinak dira.
Bi puntu emanda, $P_1=(x_1,y_1)$ eta $P_2=(x_2,y_2)$, puntu horietatik pasatzen den zuzenaren malda hau da:

$$m = \frac{v_2}{v_1} = tg\alpha = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\text{y - ren hazkundea}}{\text{x - ren hazkundea}}$$



2-d. *Adibidea*. Zein da A=(1,-3) eta B=(3,2) puntuetatik pasatzen den zuzenaren malda?

$$m=\frac{2-(-3)}{3-1}=\frac{5}{2}$$

Zuzenaren ekuazioaren bestelako forma batzuk

- x + 3y +1 = 0 ekuazio orokorrean *y* aldagaia bananduz gero, hauxe dugu: $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

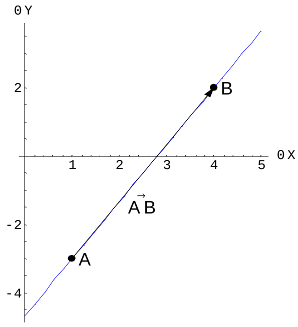
  x-ren koefizientea,(-1/3), zuzenaren malda da.
  Honela idatz daiteke: **y = m.x + b**. Adierazpen hori **ekuazio esplizitua** da.

- Demagun zuzenaren bi puntu ezagutzen ditugula: A=(1 , -3) eta B=(4 , 2). Zein da beraren ekuazioa?
  Puntutzat bata zein bestea har daiteke; adibidez A = (1 , -3)
  Bektore zuzentzailea

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (4 - 1 , 2 - (-3)) = (3 , 5)$$

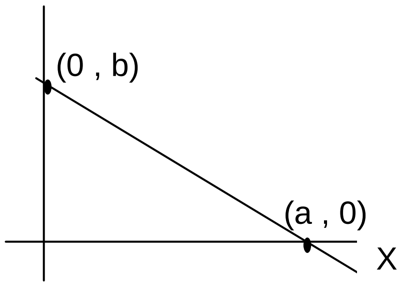
  Beraz, zuzenaren ekuazioa hauxe da:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-(-3)}{5} \Rightarrow 5x - 3y - 14 = 0$$



- Zuzenaren eta ardatzen arteko ebaki-puntuak (a , 0) eta (0 , b) badira, era honetan idatzi ahal dugu zuzenaren ekuazioa: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Ekuazio horri zuzenaren ekuazio **kanonikoa** edo **segmentarioa** deritzo.
  Demagun zuzena (3,0) eta (0,2) puntuetatik pasatzen dela. Beraren ekuazioa hauxe da:

$$\boldsymbol{\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow 2x + 3y - 6 = 0}$$



Ariketak-.

2.1 Idatz ezazu (0 , -3) puntutik pasatu eta $\vec{v} = (-2 , 4)$ bektore zuzentzailea duen zuzenaren ekuazioaren formak.

2.2 Aurkitu A(2 , 0) puntutik pasatu eta $\vec{v} = (1 , -3)$ bektore zuzentzailea duen zuzenaren ekuazio orokorra.

2.3 $r : \frac{x}{2} = y + 1$ ekuazioko zuzena emanik, zein da bektore zuzentzailea? Eta malda? Eman zuzeneko puntu bat. Ondoren, adierazi zuzena era esplizituan.

2.4 3x – 2y +1 = 0 ekuazioko zuzena emanda, zein da bektore zuzentzailea? Eta malda? Eman zuzeneko puntu bat. Ondoren, adierazi zuzena era parametrikoan.

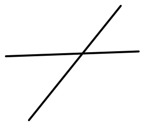
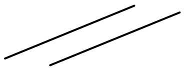
2.5 Aurkitu P=(2 , 1) puntutik pasatu eta malda –3 duen zuzenaren ekuazioa.

2.6 Zein dira bi ardatz cartesiarren (OX eta OY) ekuazioak?

2.7 A eta B puntuak emanda, lor itzazu bi puntu horietatik pasatzen den zuzenaren ekuazioa ondoko bi kasuetan:
a) A=(2 , 1) eta B=(3 , -1)
b) A=(2 , 0) eta B=(0 , -1)

2.2 Bi zuzenen posizio erlatiboak

Planoko bi zuzen ***ebakitzaileak***, ***paraleloak*** edo ***kointzidenteak*** izan daitezke. Zein diren jakiteko, nahikoa da haien ekuazioez osaturiko ekuazio-sistema ebaztea.

		Adibidea	Soluzioa	
Ebakitzaileak		$-x + y + 1= 0$ $2x + 3y + 3 = 0$	Soluzio bakarra du: x=0 ; y=-1	Puntu komun **bat** dute P(0 , -1)
Paraleloak		$x + 2y - 2 = 0$ $2x + 4y - 1 = 0$	Ez du soluziorik.	**Ez** dute puntu komunik.
Kointzidenteak		$-x + y - 1 = 0$ $2x - 2y + 2 = 0$	Infinitu soluzio ditu.	Puntu **guztiak** komunak dira.

Dena den, bi zuzenen posizio erlatiboak determinatzeko, ez da beharrezkoa haien ekuazioek osatutako sistema ebaztea. Nahikoa da zuzenen ekuazio orokorretako koefizienteak aztertzea.

Ekuazioak	Baldintza	Goiko adibidean	Posizio erlatiboa
r: Ax + By + C = 0 s: A´x + B´y + C´= 0	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$	$\frac{-1}{2} \neq \frac{1}{3}$	Ebakitzaileak
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{-2}{-1}$	Paraleloak
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$	$\frac{-1}{2} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$	Kointzidenteak

2.8 Ariketa-.

Esan zein diren *r* eta *s* zuzenen arteko posizio erlatiboak.

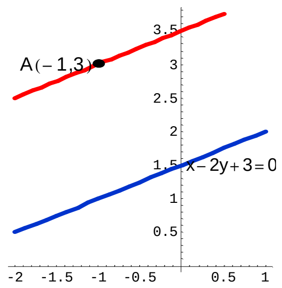
a) r: $5x - 3y + 2 = 0$; s: $-5x+3y - 2 = 0$
b) r: $2x - 3y + 1 = 0$; s: $-3x + 2y - 2 = 0$
c) r: $-3x + 5y - 4 = 0$; s: $6x - 10y + 7 = 0$

2.3 Paralelotasun baldintza

Bi zuzen paralelok honako hau betetzen dute:
- malda bera dute, edo
- bektore zuzentzaileen osagaiak elkarren proportzionalak dira.

Adibideak

2-e. *Idatzi r: x – 2y + 3 = 0 zuzenarekiko paraleloa izan eta (-1,3) puntutik pasatzen den zuzenaren ekuazioa.*



Paraleloa bada, x eta y-ren koefizienteak proportzionalak izan behar dira (berdinak ere izan daitezke), eta gai independientea, C, ez-proportzionala.

Beraz, bilatzen ari garen zuzenaren ekuazioa honelakoa izango da: x – 2y + k = 0

Zuzena (-1,3) puntutik pasatzen denez, ondokoa bete behar da:

$$-1 - 2.(3) + k = 0 \Leftrightarrow -7 + k = 0 \Rightarrow \quad k = 7$$

Bilaturiko zuzenaren ekuazioa hau da: x – 2y + 7 = 0

2-f. *Lortu (-1 , 2) puntutik pasatu eta* $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3}$ *ekuazioko zuzenaren paraleloa den zuzenaren ekuazioa.*

Bektore zuzentzailea (-2,3) da. Zuzen horren edozein zuzen paraleloren bektore zuzentzaileak (-2,3) bektorearen proportzionalak dira. Bereziki, bektore hori har dezakegu.

$$\left.\begin{array}{l} A = (-1,2) \\ \vec{v} = (-2,3) \end{array}\right\} \Rightarrow r : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3}$$

2-g. Lortu (0,5) puntutik pasatu eta y = -2x +1 ekuazioko zuzenaren paraleloa den zuzenaren ekuazioa.

Kasu honetan, agerian dago maldaren balioa: -2

Bilatzen ari garen zuzenak malda berbera du. Beraz, ekuazioa honelakoa izango da:

$$y = -2x + b$$

b konstantearen balioa lortzeko, ordezkatu egingo dugu enuntziatuan emandako puntua, hots, (0,5): $5 = -2.0 + b \quad \Rightarrow \quad b = 5$

Bilaturiko zuzenaren ekuazioa hauxe da: y = -2x + 5

2.9 Ariketa-.

Idatz ezazu (2 , 3) puntutik pasatu eta ondoko zuzenen paraleloak diren zuzenak:

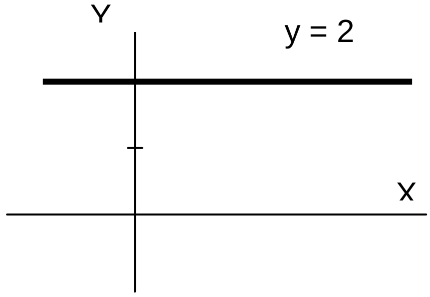
a) r: y = -3x +2

b) $\frac{-x+2}{1} = \frac{y-1}{-3}$

c) -3x + y = -5

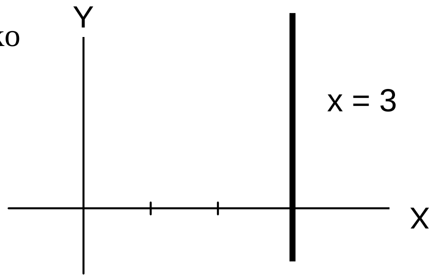
OX ardatzarekiko zuzen paraleloak

OX ardatzaren ekuazioa *y = 0* denez, OX ardatzarekiko paraleloa den edozein zuzenen ekuazioa ***y* = *k*** izango da, non $k \in \mathbb{R}$ den.

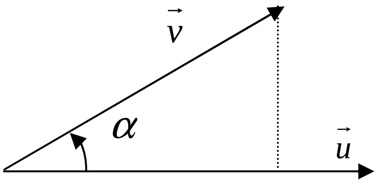


OY ardatzarekiko zuzen paraleloak

OY ardatzaren ekuazioa *x = 0* denez, OX ardatzarekiko paraleloa den edozein zuzenen ekuazioa ***x* = *k*** izango da, non $k \in \mathbb{R}$ den.



2.4 Bi bektoreren arteko biderketa eskalarra



Biderketa eskalarra eragiketa berezi bat da. Eragiketa berri hori oso baliagarria izango dugu bektoreen luzerak eta angeluak kalkulatzeko, baita distantziak kalkulatzeko ere (bi punturen artean, puntu batetik zuzen batera...).

Bai $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ eta bai $\cos\alpha$ zenbakiak dira; beraz, $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ zenbaki bat da. Hortik datorkio, hain zuzen, izena: *eskalar* hitza.

Bi bektoreren biderkadura eskalarrari **zenbaki erreal bat** dagokio: $V_2 \;.\; V_2 \rightarrow \mathbb{R}$

Era honetan definitzen dugu: $\vec{u} \;.\; \vec{v} = |\vec{u}| \;.\; |\vec{v}| \;.\; \cos\alpha$

2-h. *Adibidea.*
Eman dezagun $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ *eta* $\alpha = 60^0$ *direla*:

$$\vec{u}\;.\;\vec{v} = 3\,.\,4\,.\cos\,60^{\,0} = 12\;.\;\frac{1}{2} = 6$$

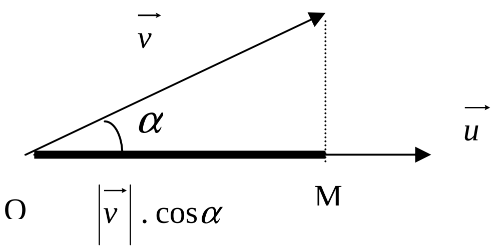
<u>Ondorio garrantzitsua:</u> "Bi bektore perpendikularrak badira, haien biderkadura eskalarra zero da".

$\vec{u} \perp \vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{u}\;.\;\vec{v} = 0$ Izan ere, $\cos\alpha = \cos 90^0 = 0$ da.

Eta alderantziz: "Nuluak ez diren bi bektoreren biderkadura eskalarra zero bada, bektoreak perpendikularrak dira".

Propietateak

1.- Bi bektoreren biderkadura eskalarra hauxe da: bektore baten moduluaren eta beste bektoreak lehenengoaren gainean sortzen duen proiekzioaren arteko biderkadura. Angelua zorrotza bada, emaitzaren zeinua + izango da; ordea, kamutsa bada, zeinua – izango da.

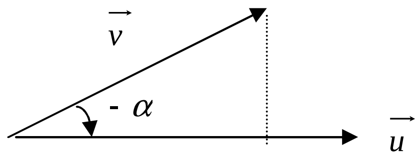


$\vec{v}$ *ren* proiekzioa $\vec{u}$ *ren* gainean

$$\vec{u}\ .\ \vec{v} = |\vec{u}|\ .\ (|\vec{v}|\ .\ \cos\ \alpha)$$
$$= |\vec{u}|\ .\ (\vec{v}\ \text{–ren proiekzioa } \vec{u}\text{-ren gainean})$$
$$= |\vec{u}|\ .\ \overline{OM}\quad,\ \alpha\ \text{angelua zorrotza denean}$$

eta α angelua kamutsa bada, $\vec{u}\ .\ \vec{v} = -\ |\vec{u}|\ .\ \overline{OM}$

2.- Trukatze-propietatea: $\vec{u}\ .\ \vec{v} = \vec{v}\ .\ \vec{u}$



Izan ere, $\vec{v}\ .\ \vec{u} = |\vec{v}|\,.|\vec{u}|.\cos(-\alpha) = |\vec{v}|\,.\,|\vec{u}|.\ \cos(\alpha) = \vec{u}\ .\ \vec{v}$,

zeren $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ baita.

3.- Banatze-propietatea: $\vec{u}\ .\ (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\ .\ \vec{v} + \vec{u}\ .\ \vec{w}$

4. Elkartze-propietatea: $(\lambda\ \vec{u})\ .\ \vec{v} = \lambda\ (\vec{u}\ .\ \vec{v})$, λ edozein zenbaki erreal izanik.

Adibidez, $(3\ \vec{u})\ .\ \vec{v} = 3\ (\vec{u}\ .\ \vec{v})$

Adierazpen analitikoa

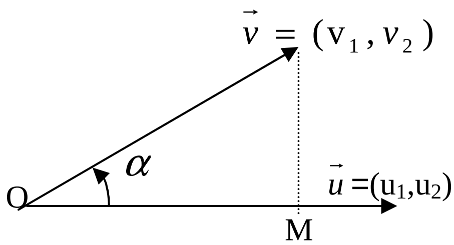
Demagun oinarria ortonormala dela eta oinarri horretan $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen osagaiak (u_1, u_2) eta (v_1, v_2) direla, hurrenez hurren.

Ondokoa betetzen da:

$$\vec{u}\,.\vec{v} = u_1\,.v_1 + u_2\,.v_2$$

Esaterako,

$\vec{u} =$ (1 , -2) eta $\vec{v} = (3, 4)$ bektoreak emanda, $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 1\,.\,3 + (-2)\,.\,4 = -5$



KONTUAN IZAN!

Biderketa eskalarraren hiru definizio:

I) $\overrightarrow{u} \cdot \vec{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\alpha$

II) $\overrightarrow{u} \cdot \vec{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \overline{OM}$

III) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$ (oinarria ortonormala den kasuan)

Emaitza: ZENBAKI ERREAL BAT da.

2.11 Ariketa-.

Oinarri ortonormal batean $\overrightarrow{u} = (1,-2)$ eta $\overrightarrow{v} = (-2,2)$ bektoreak emanda, kalkulatu:

$a)$ $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$b)$ $2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$c)$ $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v}$

$d)$ $\vec{v}$ – ren proiekzioa $\vec{u}$ – ren gainean.

2.5 Zenbait aplikazio

Bektore perpendikularrak

(u_1, u_2) eta $(-u_2, u_1)$ bektoreak elkarren perpendikularrak dira, bien arteko biderkadura eskalarra nulua baita:

$$(u_1, u_2) \cdot (-u_2, u_1) = -u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1 = 0$$

2.12 Ariketa-.

Aurkitu *k*-ren balioa, ondoko bektoreak ortogonalak (perpendikularrak) izan daitezen:

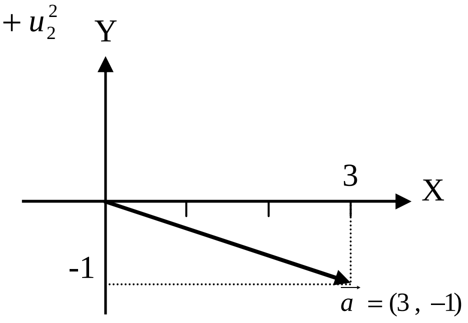
$\vec{a} = (1,3)$; $\vec{b} = (k,-2)$

Oh.: bektore jakin baten ortogonala den bektore bat lortzeko, nahikoa da beraren osagaiak ordenaz aldatzea eta bietako baten zeinua aldatzea.
Adibidez, (2 , -3) eta (3 , 2) bektoreak perpendikularrak dira, zeren 2.3 + (-3).2 = 0 baita.

Bektore baten modulua

Izan bedi $\vec{u} = (u_1 , u_2)$ bektorea. Oinarri ortonormalean, hauxe betetzen da:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}\,.\,\vec{u} = |\vec{u}|.|\vec{u}|.\cos 0^{o} = |\vec{u}|^2 \\ Bestalde,\ \vec{u}\,.\,\vec{u} = u_1.u_1 + u_2.u_2 = u_1^2 + u_2^2 \end{array}\right\} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$



Adibidez, $\vec{a} = (3\ ,\ -1)$ bektorearen modulua

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ da.

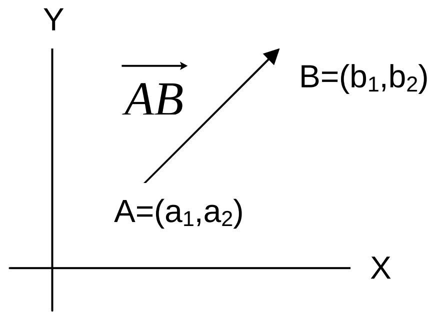
Bektore unitarioa 1 balioko modulua duten bektoreei **bektore unitario** deitzen zaie.

$\vec{u}$ bektore bat emanda, zein da $\vec{u}$-ren norabide berbera eta noranzko berbera dituen bektore unitarioa? Ondoko bektorea da: $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

> **2-i.** *Adibidea.*
> Demagun $\vec{u} = (2\ ,\ -1)$ dela.
> Modulua: $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$
> $\vec{u}$ -ren paraleloa den eta noranzko bera duen bektore unitarioa hauxe da: $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\ ,\ \dfrac{-1}{\sqrt{5}}\right)$

Bi punturen arteko distantzia

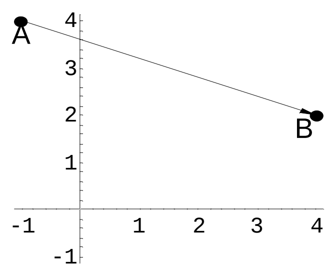
Planoko A eta B puntuen arteko distantzia puntu biek determinaturiko bektore finkoaren modulua da. Eta $d(A, B)$ bidez adieraziko dugu.



$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1\ ,\ b_2 - a_2)$$
$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

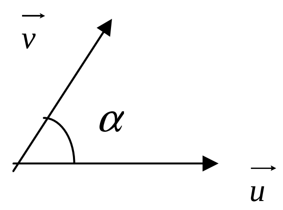
Esate baterako, A = (-1 , 4) eta B = (4 , 2) puntuak badira:

$$d(A, B) = \sqrt{(4 + 1)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$



Bi bektoreren arteko angelua

Izan bitez $\vec{u} = (u_1\ ,\ u_2)$ eta $\vec{v} = (v_1\ ,\ v_2)$ bektoreak oinarri ortonormal batean. Ondokoa betetzen da:



$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}\ .\ \vec{v} = |\vec{u}|\ .\ |\vec{v}|\ .\ \cos\ \alpha \\ Bestalde,\ \vec{u}\ .\ \vec{v} = u_1\ .\ v_1 + u_2\ .\ v_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\ \alpha = \frac{\vec{u}\ .\ \vec{v}}{|\vec{u}|\ .\ |\vec{v}|} = \frac{u_1\ .\ v_1 + u_2\ .\ v}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\ .\ \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

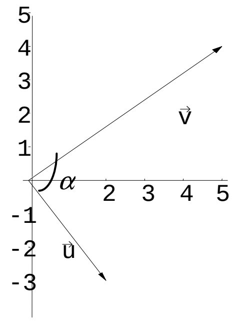
2-j. *Adibidea*

$\vec{u} = (2\ ,\ -3)$ *eta* $\vec{v} = (5\ ,\ 4)$ badira

$$\cos\ \alpha = \frac{\vec{u}\ .\ \vec{v}}{|\vec{u}|\ .\ |\vec{v}|} = \frac{2\ .\ 5 + (-3)\ .\ 4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}\ .\ \sqrt{5^2 + 4^2}} =$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{13}\ .\ \sqrt{41}} = -0{,}0866\quad da,$$

$$\text{eta}\quad \alpha = arc\ \cos\ (-0{,}0866) = 94^0\ \ 58'$$



Ariketak-.

2.12 Oinarri ortonormal batean $\vec{u} = (2,1)$ *eta* $\vec{v} = (-3\ ,\ 2)$ bektoreak emanik, kalkula itzazu:

a) $\vec{u}\ .\vec{v}$

b) $|\vec{u}|$

c) $|\vec{v}|$

d) $\cos(\vec{u}\ ,\vec{v}\ )$

2.13 Lortu $\vec{v} = (-3\ ,\ 2)$ bektorearen paraleloa izan eta 1 modulua duen bektorea.

2.14 Kalkula ezazu zein den P = (-2 , 3) eta Q = (3 , -4) puntuen arteko distantzia

Zuzen perpendikularrak

Dakigunez, *r*: Ax + By + C = 0 eran adierazitako zuzenean bektore zuzentzailearen osagaiak (-B,A) dira, eta malda $m_1 = -\frac{A}{B}$ da.

Beraz, *r*-ren perpendikularra den zuzen batek (A, B) edo (-A,-B) moduko bektore zuzentzailea eduki behar du, biderkadura eskalarra zero izan dadin.

Izan ere, (-B).A + A.B = 0 da, eta beraren malda $m_2 = \frac{v_2'}{v_1'} = \frac{B}{A}$

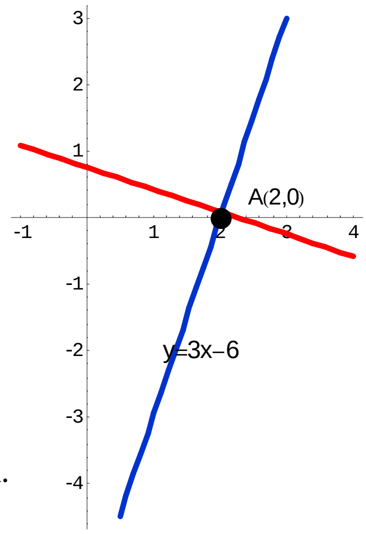
Beraz, bi **zuzen perpendikularren maldak** elkarren **alderantzizkoak** eta **aurkakoak** dira; hots, $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

2-k. *Adibidea*. Demagun *r*: 2x – 5y + 1 = 0 zuzena. Beraren malda $m = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-5} = \frac{2}{5}$ da.
Zuzen horren perpendikularra den zuzen bat aurkitu nahi izanez gero, badakigu horren malda $-\frac{5}{2}$ izan behar duela, hots, mota honetako zuzena dela: 5x + 2y + *k* = 0

Ariketa ebatzia

Lor ezazu, kasu bakoitzean, A=(2 , 0) puntutik pasatu eta r-ren perpendikularra den zuzena:

a) *r: y = 3x – 6*
a) *r: 3x + 2y +1 = 0*
b) $r : \frac{x+1}{4} = y - 2$



Ebazpena:

a) *r*-ren malda 3 da; beraz, zuzen perpendikularrarena $-\frac{1}{3}$ izango da, alderantzizkoa eta aurkakoa, hain zuzen.
Zuzena $y = -\frac{1}{3}x + b$ motakoa izango da. A(2, 0) puntutik pasatu behar duenez, $0 = -\frac{1}{3}.2 + b \Rightarrow b = \frac{2}{3}$
Beraz, zuzen perpendikularra $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow x+3y-2=0$ da.

b) *r*-ren zuzen perpendikularrak, *x*-ren eta *y*-ren koefizienteak elkar trukatuz eta bati zeinua aldatuz, 2x - 3y + k = 0 motakoa izan behar du.
A(2,0) puntutik pasatu behar duenez, 2.2 – 3.0 + k = 0 ; hau da, k = -4
Beraz, 2x – 3y –4 = 0 zuzena da.

c) *r*-ren bektore zuzentzailea (4 , 1) da. Beraz, zuzen perpendikularraren osagaiak (-1 , 4) izango dira. Gainera, A(2,0) puntutik pasatu behar duenez, $\frac{x-2}{-1} = \frac{y}{4}$ da aurkitu nahi dugun zuzenaren ekuazioa.

KONTUAN IZAN!
Demagun bi zuzen m eta m' maldadunak:

- Paraleloak badira: m = m'
- Perpendikularrak badira: $m = -\frac{1}{m'}$

Ariketak

2.15 Lor ezazu, kasu bakoitzean, A = (1 , -1) puntutik pasatu eta s-ren perpendikularra den zuzena:

a) s: x – 4y + 1 = 0 ; *b) y = -2x +5* ; *c)* $\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\}$

2.16 P = (1, 2) puntua eta r: x + 3y = 0 zuzena emanda, aurkitu ondoko hauek:

a) P-tik pasatu eta r-ren paraleloa den zuzenaren ekuazioa.
b) P-tik pasatu eta r-ren perpendikularra den zuzenaren ekuazioa.

Puntu baten eta zuzen baten arteko distantzia

Adibide baten bidez azalduko dugu.

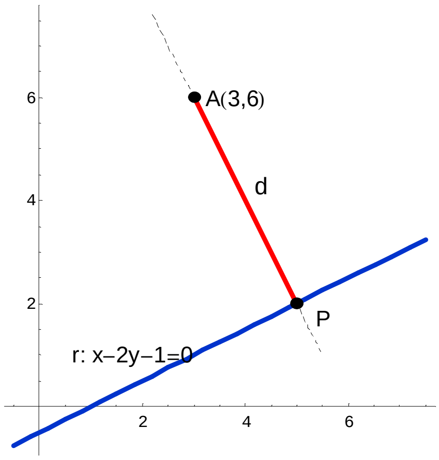
Eman ditzagun *r*: x – 2y – 1 = 0 zuzena eta A(3 , 6) puntua. Bien arteko distantzia minimoa –zuzenaren perpendikularrak emango diguna– kalkulatu behar dugu. Bi eratan egingo dugu: arrazoituz eta formula erabiliz.

I) Zein da *r*-ren perpendikularra den eta A(3,6) puntutik pasatzen den zuzenaren ekuazioa?

r-ren malda 1/2 da; beraz, zuzen perpendikularraren malda –2 da.

r-ren perpendikularraren ekuazioa:

$$y - 6 = -2(x - 3) \text{ edo } \quad 2x + y - 12 = 0$$



Orain kalkula dezagun bi zuzen perpendikularren arteko ebaki-puntua (P), ondoko ekuazio-sistema ebatzita: $\left\{\begin{array}{l} x - 2y - 1 = 0 \\ 2x + y - 12 = 0 \end{array}\right.$

Soluzioa x = 5 eta y = 2 ; P(5 , 2)

A puntutik *r* zuzenera arteko distantzia eta A-tik P puntura artekoa bat dira; hau da:

$$d(A, r) = d(A, P) = \sqrt{(2-6)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{20}$$

II) Formula erabilita:

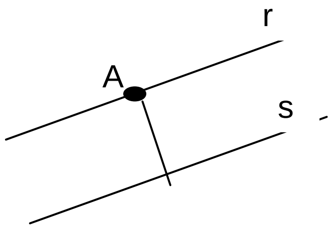
r: Ax + By + C = 0 zuzena eta A (a_1 , a_2) puntua emanda: $d(A,r) = \frac{|A.a_1 + B.a_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Gure adibidean, *r*: x – 2y –1 = 0 eta A(3 , 6) direnez gero,

$$d(A,r) = \frac{|1.3 + (-2).6 + (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10 . \sqrt{5}}{5} = 2.\sqrt{5} = \sqrt{20}$$

2.17 Ariketa.- Kalkulatu P(-3 , 1) puntutik x – y + 2 = 0 zuzenera dagoen distantzia.

Bi zuzen paraleloren arteko distantzia

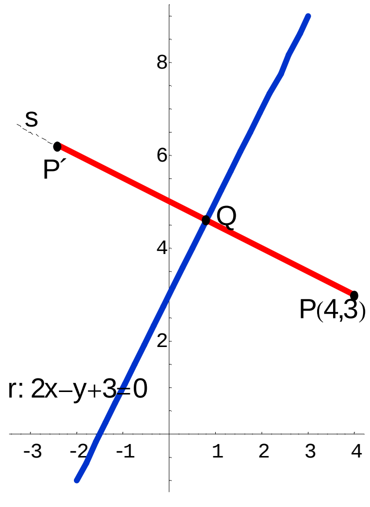


r eta *s* zuzen paraleloen arteko distantzia zuzen bateko edozein puntutatik beste zuzenera dagoen distantzia da.

2.18 Ariketa.-
Har itzazu r: x – 2y –1 = 0 eta s: x – 2y + 4 = 0 zuzenak
Aukera ezazu r-ren puntu bat –esaterako (1 , 0)– eta kalkulatu puntu horretatik s zuzenera dagoen distantzia, metodo bata zein bestea erabilita. *Em.:* $\sqrt{5}$

Puntu baten simetrikoa zuzenarekiko

Ariketa ebatzia.
Kalkula ezazu P = (4 , 3) puntuaren simetrikoa r: 2x – y + 3 = 0 zuzenarekiko.



P' puntua lortu behar dugu, hain zuzen *P*-tik pasatu eta *r*-ren perpendikularra den zuzenean dagoena.
Problema hori ondoko hiru pausuak emanda ebatziko dugu:

I) *P*-tik pasatu eta *r*-ren perpendikularra den *s* zuzena bilatu.
II) *r* eta *s* zuzenen arteko *Q* ebaki-puntua aurkitu.
III) *Q* puntua *PP'* zuzenkiaren erdiko puntutzat hartu.

Hau da:

I) *r*-ren bektore zuzentzailea (1,2) da; beraz, *s* zuzen perpendikularraren zuzentzailetzat (-2,1) har daiteke.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v} = (-2{,}1)\\ P = (4{,}3)\end{array}\right\} \Rightarrow s: \frac{x-4}{-2} = \frac{y-3}{1} \Rightarrow s: x + 2y - 10 = 0$$

II) *r* eta *s* zuzenen ebaki-puntua kalkulatzeko ondoko ekuazio-sistema ebatziko dugu:

$$\left.\begin{array}{l}2x - y + 3 = 0\\ x + 2y - 10 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow Q = \left(\frac{4}{5}, \frac{23}{5}\right)$$

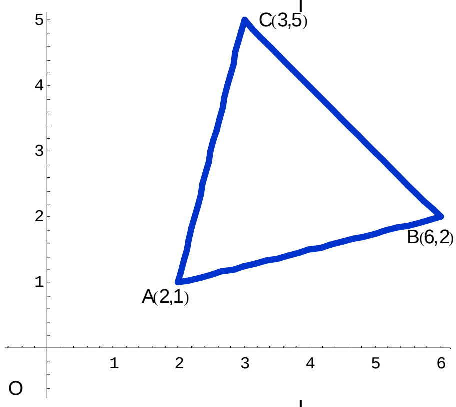
III) Demagun *P'*-ren koordenatuak (x , y) direla. *Q* puntua erdiko puntua denez:

$$\frac{4}{5} = \frac{x+4}{2} \quad \text{eta} \quad \frac{23}{5} = \frac{y+3}{2} \Rightarrow x = -\frac{12}{5} \text{ eta } y = \frac{31}{5} \Rightarrow P' = \left(\frac{-12}{5}, \frac{31}{5}\right)$$

Hiru puntu ez-alineatuk determinatzen duten triangeluaren azalera

Ariketa ebatzia.

Kalkula ezazu A=(2 , 1), B=(6,2) eta C=(3,5) erpinak dituen triangeluaren azalera.



$$\boldsymbol{Azalera = \frac{1}{2}(oinarria \cdot altuera)}$$

Oinarri A eta B puntuen arteko distantzia hartuta, altuera C puntutik AB zuzenera arteko distantzia da.

- $Oinarria = d(A,B) = \sqrt{(6-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{17}$
- Altuera (h) = d(C , r_{AB})

Lehenik, A eta B-tik pasatzen den zuzena kalkulatuko dugu:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (4,1) \\ A=(2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow x - 4y + 2 = 0$$

Ondoren, d(C , r) kalkulatuko dugu: $d(C,r) = \dfrac{|3-\ 4.5+2|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}} = \dfrac{|-15|}{\sqrt{17}} = \dfrac{15}{\sqrt{17}}$

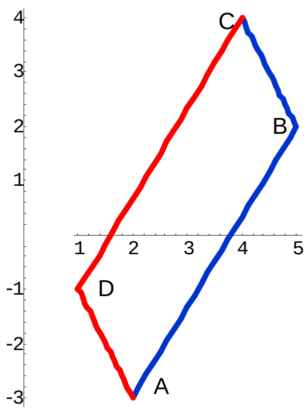
- Azkenik, azalera:

$$\boldsymbol{Azalera = \frac{1}{2}(oinarria \cdot altuera) = \frac{1}{2} \,.\, \sqrt{17} \,.\, \frac{15}{\sqrt{17}} = \frac{15}{2}\, unitate\ karratu.}$$

ARIKETA EBATZIAK

1. A(2,-3), B(5,2),eta C(4,4) puntuak emanda:
   a) Aurkitu D puntua, ABCD paralelogramo bat izan dadin.
   b) Egiaztatu beraren diagonalen erdiguneek bat egiten dutela.

a) Ikusten duzunez, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ da; beraz :

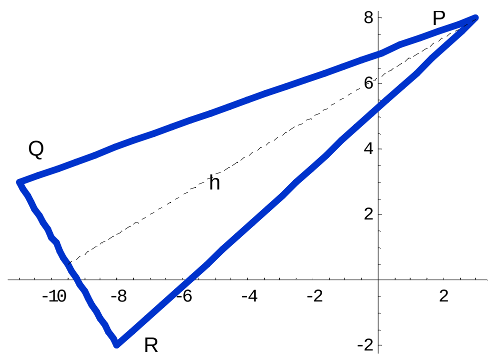


$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (5,2)-(2,-3) = (3,5) \\ \overrightarrow{DC} = (4,4)-(x,y) = (4-x\,,\,4-y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4-x=3 \to x=1 \\ 4-y=5 \to y=-1 \end{array}\right\} \to D(1,-1)$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{AC}\text{-ren erdigunea}: (\frac{2+4}{2}, \frac{-3+4}{2}) = (3,\frac{1}{2}) \\ \boldsymbol{BD}\text{-ren erdigunea}: (\frac{5+1}{2}, \frac{2+(-1)}{2}) = (3,\frac{1}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Puntu bera lortzen}$$

2. P(3,8), Q(-11,3) eta R(-8,-2) puntuak triangelu baten erpinak dira.
   a) Egiaztatu triangelu hori isoszelea dela.
   b) Aurkitu triangeluaren azalera.



a) Aldeen luzerak hauek dira:

$$d(P,Q)=\sqrt{(-11-3)^2+(3-8)^2}=\sqrt{221}$$

$$d(P,R)=\sqrt{(-8-3)^2+(-2-8)^2}=\sqrt{221}$$

$$d(Q,R)=\sqrt{(-8+11)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{34}$$

d(P,Q) = d(P,R) delako, triangelua isoszelea da.

b) Oinarri *QR* zuzena hartuta, altuera (h) *P*-tik *QR* zuzenera dagoen distantzia da.
QR-ren ekuazioa:

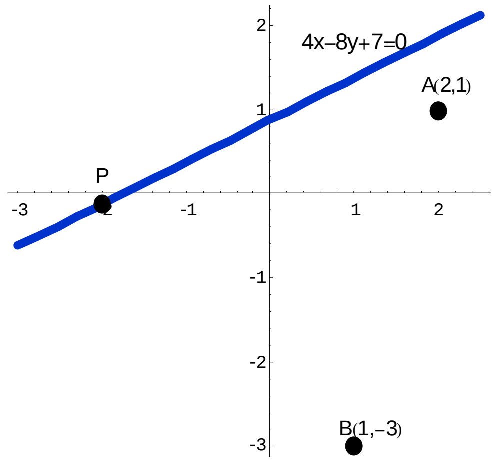
$$m=\frac{-2-3}{-8+11}=-\frac{5}{3} \quad\rightarrow\quad y-3=-\frac{5}{3}(x+11) \quad\rightarrow\quad 5x+3y+46=0$$

$$Altuera=d(P,QR)=\frac{|5.3+3.8+46|}{\sqrt{5^2+3^2}}=\frac{85}{\sqrt{34}}$$

$$Azalera=\frac{1}{2}\sqrt{34}.\frac{85}{\sqrt{34}}=\frac{85}{2}\ unitate\ karratu$$

Triangelua isoszelea denez, altuera P puntutik QR-ren erdigunera dagoen distantziaren bidez ere kalkula daiteke. Egizu kalkulua ariketa gisa.

3. A(2,1) eta B(1,-3) puntuetatik distantzia berera dagoen 4x-8y+7=0 zuzeneko puntua aurkitu.



Bila gabiltzan puntua P(x,y) da, eta bi baldintza bete behar ditu:
I) d(P,A) = d(P,B)
II) P puntua 4x-8y+7=0 zuzenean egotea.

Hau da:

I) $$d(P,A)=d(P,B) \Rightarrow \sqrt{(2-x)^2+(1-y)^2}=\sqrt{(1-x)^2+(-3-y)^2} \rightarrow 2x+8y+5=0$$

II) P puntuak emandako zuzenekoa izan behar duenez, 4x-8y+7=0 ekuazioa bete behar du.

$$\left.\begin{array}{l}2x+8y+5=0\\4x-8y+7=0\end{array}\right\}$$ sistema ebatzita lortzen dugu P puntua: $P=(-2,-\frac{1}{8})$

Planoko geometria (ariketak)

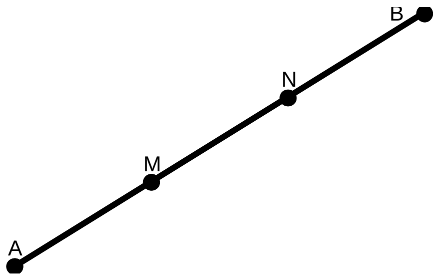
1. Bila ezazu zein izan behar duen *m* parametroaren balioa, A=(1,0), B=(4,-1) eta C=(m,2) puntuak elkarrekin alineaturik egon daitezen. *Em.: m=-5*

2. Aurkitu ABCD paralelogramoaren D erpinaren koordenatuak, A(1,2), B(5, -1) eta C(6,3) direla jakinik.

3. A=(-4,1) eta B=(9,4) puntuen arteko segmentua kontsideraturik, lor itzazu segmentu hori hiru parte berdinetan zatitzen duten *M* eta *N* puntuen koordenatuak.

   Oharra: Kontuan izan $AM = \frac{1}{3}\boldsymbol{AB}$ eta $AN = \frac{2}{3}\boldsymbol{AB}$ direla.

   Em.: $\boldsymbol{M} = (\frac{1}{3}, 2)$, $\boldsymbol{N} = (\frac{14}{3}, 3)$



4. $\vec{a} = (3,-5)$ eta $\vec{b} = (k, 2)$ bektoreen biderkadura eskalarra 7 bada, aurkitu *k*-ren balioa.

5. $\vec{a}$ eta $\vec{b}$ nuluak ez diren bi bektore dira. Esan zein angelu eratzen duten ondoko kasuetan:

   $a)\ \vec{a}\ .\ \vec{b} = |\vec{a}|\ .\ |\vec{b}|$

   $b)\ \vec{a}\ .\ \vec{b} = -|\vec{a}|\ .\ |\vec{b}|$

   $c)\ \vec{a}\ .\ \vec{b} = 0$

   $d)\ \vec{a}\ .\ \vec{b} = 0,5\ |\vec{a}|\ .\ |\vec{b}|$

6. Kalkulatu *x*-ren balioa, $\vec{a} = (3, x)$ eta $\vec{b} = (5,2)$ bektoreek ondoko ezaugarriak bete ditzaten:
   a) Ortogonalak (perpendikularrak) izan.
   b) 60º-ko angelua osatu.

7. Idatz ezazu era posible guztietan A = (-5,3) puntutik pasatu eta $\vec{v} = (-1,1)$ bektore zuzentzailea duen zuzenaren ekuazioa.

8. Kalkula ezazu *k*-ren balioa, 2x – (k+1)y –4 = 0 ekuazioa duen zuzena (1 , 1) puntutik pasa dadin. *Em.: -3*

9. Ondoko ekuazioek adierazitako zuzen bakoitzaren kasuan, determina itzazu zuzeneko puntu bat, bektore zuzentzaile bat eta malda:

   $a)\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1}$ $\qquad d)\ (x, y) = (1,1) + k.(0,-2)$

   $b)\ 3x - 4y + 5 = 0$ $\qquad e)\ y = -3x + 7$

   $c)\ \left.\begin{matrix} x = -3 + 2k \\ y = -4k \end{matrix}\right\}$ $\qquad f)\ y - 2 = \frac{1}{3}(x + 2)$

10. Adieraz ezazu *r* eta *s* zuzenen posizio erlatiboa ondoko kasuetan:

$a)\ r: 2x-3y+4=0 \quad ; \quad s: -x+3y+2=0$

$b)\ r: -x-y+2=0 \quad ; \quad s: 2x+2y-1=0$

$c)\ r: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1} \quad ; \quad s: y=2x-4$

11. Kalkula ezazu *a*-ren balioa, *r*: 2x+ay=3 eta *s*: 3x+5y=1 zuzenak elkar paraleloak izan daitezen.
Em.: a = 10/3

12. Kalkula itzazu *r* eta *s* zuzenen ebaki puntuaren koordenatuak ondoko kasuetan:
    a) r: 2x-4y=5 ; s: 3x-6y=-2 *Em.: a) Ez du*
    b) $r: \left.\begin{array}{l} x=2+3k \\ y=-1+4k \end{array}\right\}$; $s: 3x+2y=1$ $b)\ (\frac{25}{17}, -\frac{29}{17})$

13. Aurki ezazu ondoko baldintzak betetzen dituen zuzenaren ekuazioa: ordenatu-ardatza –2 puntuan ebakitzen du eta 2x-3y=0 zuzenaren paraleloa da.
(Oh.: zuzena (0,-2) puntutik pasatzen da)

14. Kalkula itzazu (1 , 3) puntutik pasatu eta $r: \dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y-4}{2}$ zuzenaren paraleloa eta perpendikularra diren zuzenen ekuazio orokorrak.

15. Erpinak A=(1,1), B(-3,5) eta C(-1,-2) puntuetan dituen triangelua emanik, kalkula itzazu ondoko zuzenen ekuazioak:
    a) A puntutik pasatu eta BC aldearen paraleloa den zuzena. *Em.: a) 7x+2y=9*
    b) B puntutik irteten den erdibidekoa. *Em.: b) 11x+6y+3=0*
    c) C puntutik irteten den altuera. *Em.: c) x-y-1=0*

16. Aurkitu A(-3,4) eta B(1,0) segmentuaren zuzen erdibitzailearen ekuazioa. *Em.*: y=x+3

17. Kalkula ezazu P = (2 , -5) puntuaren eta 3x + 2y + 1 = 0 ekuazioko zuzenaren arteko distantzia.

18. *r*: x+3y+1=0 eta *s*: x+3y-2=0 emanda, kalkulatu *r* eta *s* zuzenen arteko distantzia.
$\text{Em.}: \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

19. *Kalkula* ezazu *k*-ren balioa, *r*: -3x+2y=0 eta *s*: -3x+2y+k=0 zuzenen arteko distantzia 3 unitatekoa izan dadin. $\text{Em.}: k=\pm 3\sqrt{13}$

20. *r*: 3x + *a*y –2 = 0 zuzenak 60º-ko angeluarekin mozten du OX ardatza. Kalkulatu *a*-ren balioa.

21. Lor ezazu (2 , 6) puntuaren simetrikoa lehenengo koadrantearen erdikariarekiko.

22. Lor ezazu ABC triangeluaren azalera: A=(-1, 4) ; B=(2 , 3) ; C=(-6 , -4)
Em.: 29/2 unitate karratu

KONBINATORIA

Zenbaketa-problemak

1. Zenbat kiniela desberdin egin daitezke?
2. Errelebutako lasterketa batean lau taldek hartu dute parte. Zenbat era desberdinetan hel daitezke helmugara?

Ikus ditzagun zenbait teknika baliagarri mota horietako galderei erantzuteko.

1. Aldakuntzak

Zozketa batean bi sari emango dira eta lau pertsonak hartuko dute parte. Zenbat eratan bana daitezke sariak, kontuan izanik pertsona batek ezin dituela bi sariak jaso?

1. saria	2. saria	
A	B	AB
	C	AC
	D	AD
B	A	BA
	C	BC
	D	BD
C	A	CA
	B	CB
	D	CD
D	A	DA
	B	DB
	C	DC
4 .	3 =	12

Parte-hartzaileei A, B, C eta D deituko diegu eta zuhaitz-diagrama bat eraikiko dugu konfigurazio posibleak lortzeko.

Kontuan hartu behar dena:

- Elementuen ordena.
- Konfigurazio berean ez dagoela elementu errepikaturik.

Guztira 4 . 3 = 12. Horiei *4 elementuren 2nakako aldakuntzak* deitzen zaie eta erabiltzen den sinboloa hauxe da: ${}_{4}^{2}A$

Hiru sari baleude, kopurua hauxe litzateke: 4 . 3 . 2 = 24 eta honela adieraziko genuke: ${}_{4}^{3}A$

Oro har, n elementuren k-nakako aldakuntza kopurua ${}_{n}^{k}A$ sinboloaz adierazten da eta emaitza hauxe da:

$${}_{n}^{k}A = n.(n-1).(n-2).\ldots.(n-k+1)$$

Adibidea

24 ikasleen artean ordezkaria eta ordezkariordea aukeratu behar dira. Zenbat eratan aukera daitezke?

- Kontuan hartu behar da ordena, bi karguak desberdinak baitira.
- Ezin dira elementu errepikatuak agertu. Horrela balitz ikasle berberak bi karguak izango lituzke.

24 elementuren 2nakako aldakuntzak kalkulatu behar dira:

$${}_{24}^{2}A = 24\,.\,23 = 552$$

2. Aldakuntza errepikadunak

Demagun orain aurreko sari-banaketan pertsona bakar batek bi sariak hartzeko aukera duela.

1. saria	2. saria	
A	A	AA
	B	AB
	C	AC
	D	AD
B	A	BA
	B	BB
	C	BC
	D	BD
C	A	CA
	B	CB
	C	CC
	D	CD
D	A	DA
	B	DB
	C	DC
	D	DD
4 .	4 =	16

Kontuan hartu behar dena:

- Elementuen ordena
- Konfigurazio berean elementuak errepikaturik ager daitezkeela.

Guztira 4 . 4 = 16. Horiei *4 elementuren 2nakako aldakuntza errepikadunak* deitzen zaie eta ${}_{4}^{2}A^{'}$ da beraren sinboloa.

Oro har, n elementuren k-nakako aldakuntza errepikadunen kopurua ${}_{n}^{k}A^{'}$ sinboloaz adierazten da eta emaitza hauxe da: ${}_{n}^{k}A^{'} = n^{k}$

Adibidea.
Txanpon bat hiru aldiz jaurtitzen da. Zenbat emaitza desberdin lor daitezke?

Txanpona jaurtitzen dugun bakoitzean, bi emaitza hauetako bat lortuko dugu: aurpegia ala gurutzea

- Kontuan hartu behar da ordena.
- Elementuak errepikaturik ager daitezke (aab, aba, aaa…)

Beraz, 2 elementuren 3nakako aldakuntza errepikadunak kalkulatu behar dira. Emaitza posibleak ${}_{2}^{3}A^{'} = 2^{3} = 8$ dira.

Ariketak.

1. Hiru zifrako zenbat zenbaki desberdin idatz daitezke 2, 3, 4, 5,6 eta 7 digituekin?
   - digituak errepikatu gabe
   - digituak errepikatuta.

2. Zenbaki-sistema bitarrean 0 eta 1 zifrak erabiltzen dira soilik. Lau zifrako zenbat zenbaki desberdin idatz daitezke?

3. Zazpi letra desberdineko zenbat hitz idatz daitezke (esanahidunak edo esanahirik gabeak) A, B, C, D, E, F, G, H eta I letrekin, baldin letrak errepikaten ez badira? Horietako zenbat amaitzen dira D letraz? Eta DA letrez?

3. Permutazioak

1.lib.	2.lib.	3.lib.	
1	2	3	123
	3	2	132
2	1	3	213
	3	1	231
3	1	2	312
	2	1	321
3 .	2 .	1 =	6

Apalategi batean zenbat modu desberdinetan ordena ditzakegu hiru liburu?
Liburuak 1etik 3ra zenbakituta, konfigurazio edo modu bakoitza 1, 2 eta 3 digituez eratutako hiru zifrako zenbaki batez adieraz daiteke.
Horrela 3 . 2 . 1 = 6 modu lortuko ditugu, eta horiexek dira 3 elementuren (hiru liburu baitaude) permutazioak.

- Konfigurazio bakoitzean elementu guztiek hartzen dute parte.
- Elementuen ordenak eragina du.

Liburuen kopurua 4 balitz, ordenazio posibleak 4 . 3 .2 .1 = 24 lirateke. 5 liburu baleude 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120 ...

Oro har, **n** elementuren permutazioak bi eratan adierazten dira: ${}_nP$ sinboloaz edota *n faktorial* (*n!*) eta era honetan kalkulatzen da: ${}_nP = n! = n.(n-1).(n-2).\ ...\ .2.1$

Ikus dezakezunez, izatez, *n* elementuren permutazioak elementu guztien arteko aldakuntzak dira: ${}_nP = n! = {}_n^nA$

Adibideak

1. Jaialdi batean lau parte-hartzaile dira. Zenbat era desberdinetan programa daiteke agerraldien ordena?

$${}_4P = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

2. Zenbat eratan jar daitezke sei pertsona lerroan? Eta zirkuluan?

- Lerroan, ${}_6P = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$ ordenazio posible.
- Zirkuluan, behin era jakin batean kokatu ondoren, guztiak noranzko berean posizio bat desplazatuz gero, hasierako kokapen berbera lortzen da. Horregatik, pertsona baten posizio finkatu eta beste guztiak permutatzearekin aski da. ${}_5P = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$

n elementu zirkuluan kokatzeko moduei ***permutazio zirkularrak*** esaten zaie,eta beraren balioa ${}_{n-1}P$ da.

0 eta 1 zenbakien faktorialak 1! = 1 ; 0! = 1

Ariketak.
(Kalkulagailua erabili dezakezu. Gehienetan sakatu beharreko tekla ondoko sinboloetako batez adierazten da: **!** edo **x!**)

1. Zenbat da 10!
2. Zein zenbakiren faktoriala da 5040 zenbakia.
3. Zenbat eratan eser daitezke mahai zirkular batean zazpi kongresukide? Horietako bakoitzak diskurtso laburra irakurtzen badu, zenbat eratan ordena daitezke hitzaldiak?

4. **Permutazio errepikadunak**

Demagun orain apalategi batean bost liburu lerrokatu nahi ditugula, horietako bi txikiak (T) eta tamaina berekoak, eta hiru handiak (H) eta horiek ere tamaina berekoak.

Tamaina bakarrik kontuan hartuta, hauek dira lerrokatzeko moduak: TTHHH, HTHTH, THTHH, HTHHT, THHTH, HHTTH, THHHT, HHTHT, HTTHH, HHHTT.
Horiexek dira **5** elementuren **permutazio errepikadunak**,non **2**tan,**3**tan errepikatzen diren. Bere sinboloa ${}_5P^{2,3}$ da eta balioa $\frac{5!}{2!\,.\,3!}$

Oro har, n elementuren permutazio errepikadunak, non n_1, n_2, ...,n_k errepikatzen diren hauxe da: ${}_nP^{n_1, n_2, \ldots n_k} = \dfrac{n!}{n_1!\,.\,n_2!\,.\ \ldots\ .n_k!}$

Adibidea

Kode sekretu batean, **.** (puntua) eta **—** (marra) konbinatuz lortzen dira letrak. Zenbat letra desberdin lor ditzakegu bi puntu eta lau marra erabilita?

$${}_6P^{2\,,\,4} = \frac{6!}{2!\,.\,4!} = \frac{6.5.4!}{2!\,.\,4!} = \frac{6.5}{2!} = 15 \text{ letra}$$

```
Ariketa
Zenbat hitz desberdin idatz daitezke (esanahidunak zein esanahirik
gabeak) BIDELAGUN hitzaren letra guztiak erabilita? Eta BIRIBILA hitzaren
letra guztiak erabilita?
```

5. Konbinazioak

4 pertsonaren artean 2 laguneko taldeak egin behar dira. Zenbat modu desberdinetan antola daitezke taldeak?

Lau pertsonak A, B, C eta D letrez adierazita, talde bakoitza bi letraz adieraziko dugu. Hona hemen sei posibleak: AB, AC, AD, BC, BD eta CD.

- Elementuen ordena ez da kontuan hartu behar; hau da, AB = BA
- Konfigurazio berean ez dago elementu errepikaturik.

Horiei *4 elementuren 2nakako konbinazioak* deitzen zaie eta erabiltzen den sinboloa hauxe da: ${}_4^2K$

Konbinazioen kalkulurako formula hau da : ${}_4^2K = \dfrac{{}_4^2A}{{}_2P} = \dfrac{4.3}{2!} = 6$

Oro har, n elementuren k-nakako konbinazioen kopurua ${}_n^kK = \dfrac{{}_n^kA}{P_k}$ da.

Adibidea. Zenbat triangelu lor daitezke exagono baten erpinekin?

Triangelua determinatzeko hiru puntu ezberdin behar ditugu eta ez da kontuan hartu behar puntuen kokapen-ordena (ABC=ACB=CBA...). Beraz, 6 elementuren (exagonoaren sei erpinak) 3nakako konbinazioen kopurua kalkulatu behar dugu.

$${}_6^3K = \frac{{}_6^3A}{P_3} = \frac{6.5.4}{3.2.1} = 20 \text{ triangelu.}$$

5.1 Zenbaki konbinatoriak

${}_n^kK$ adierazpena eta $\binom{n}{k}$ berdina da. Azken honi ***zenbaki konbinatorioa*** deitzen zaio eta **n gain k** irakurtzen da. Beraren balioa $\frac{n!}{k!\,.\,(n-k)!}$ zatiketa eginda lortzen da. Beraz,

$${}_n^kK = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,.\,(n-k)!}$$

Esate baterako, 4 pertsonaren artean zenbat talde egin ahal dira 2 lagunekoak?

$${}_4^2K = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,.\,(4-2)!} = 6$$

Adibidea

Zenbat dira $\binom{12}{3}$ eta $\binom{6}{4}$?

12 gain 3: $\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!\,.\,(12-3)!} = \frac{12!}{3!\,.\,9!}$ Eragiketa egin baino lehen, sinplifikatzea komeni da; egin honela: $\frac{12!}{3!\,.\,9!} = \frac{12.11.10.9!}{3!\,.\,9!} = \frac{12.11.10}{3!} = \frac{12.11.10}{6} = 2.11.10 = 220$

6 gain 4: $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,.\,2!} = \frac{6.5.4!}{4!\,.\,2!} = \frac{6.5}{2!} = 15$

k = 0 den kasuan, $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,.\,(n-0)!} = \frac{n!}{1\,.\,n!} = 1$

Ariketa.

Sinplifikatu eta kalkulatu ondoko adierazpenen balioak:

$\frac{1000!}{998!}$; $\frac{14!}{11!\,.\,3!\,.\,2!}$; $\frac{n!}{(n-2)!}$; $\binom{12}{2}$; $\binom{12}{0}$

5.2 Zenbaki konbinatorioen propietateak

- $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n} = 1$ (Froga itzazu)

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Adibidez, $\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$ edo $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$, $\binom{100}{10} = \binom{100}{90}$ ...
  (Egiazta ezazu horietako bat).

- $\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = \binom{7}{4}$; $\binom{100}{47} + \binom{100}{48} = \binom{101}{48}$ ...

KONBINATORIA

KONTUTAN HARTU BEHARREKOA	ELEMENTU ERREPIKATURIK EZ	ELEMENTU ERREPIKATUAK BAI
ELEMENTUEN ORDENA BAI, ELEMENTU GUZTIEK PARTE HARTU GABE.	ALDAKUNTZAK $_{n}^{k}A = n(n-1)(n-2)....(n-k+1)$ AD.: Ikasleen artean delegatua eta delegatu-ordea aukeratzea. Zenbat eratan aukera daitezke?	ALDAKUNTZA ERREPIKADUNAK $_{n}^{k}A' = n^{k}$ AD.: Txanpon bat hiru aldiz jaurtikitzea. Zenbat emaitza ezberdin lor daitezke?
ELEMENTUEN ORDENA BAI, ELEMENTU GUZTIEK HARTUZ	PERMUTAZIOAK $_{n}P = n! = n(n-1)(n-2)....3\cdot 2\cdot 1$ AD.: Kontzertu baten partaideak lau dira, zenbat era ezberdinetan antolatu daitezke?	PERMUTAZIO ERREPIKADUNAK $_{n}P^{n_1,n_2,...,n_k} = \dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...\cdot n_k!}$ AD.: Lau lerro eta bi punturekin zenbat konbinaketa ezberdin lor daitezke?
ELEMENUTEN ORDENA EZ	KONBINAZIOAK $_{n}^{k}K = \dfrac{_{n}^{k}A}{P_k} = \underset{ngaink}{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ AD.: Zenbat triangelu lor daitezke hexágono baten erpinekin?	

Ariketa ebatziak

1. *18 auzokideko etxe batean, zenbat eratan hauta daitezke lehendakaria, idazkaria eta diruzaina, auzokide bakoitzak kargu bakarra izan behar badu?*

Hona hemen konfigurazio posible batzuk: $A_1A_2A_3$, $A_2A_1A_3$, A_2,A_7,A_5 ... ,non A_1, A_2 ... hemezortzi auzokideak diren.

- Kontuan hartu behar al da elementuen ordena? Bai, karguak desberdinak baitira.
- Konfigurazio guztietan elementu guztiak al daude? Ez, 18 auzokideetatik 3 hautatu behar baitira.
- Errepika al daitezke elementuak? Ez, auzokideek kargu bakarra izan baitezakete.

Beraz, 3naka harturiko 18 elementuren **aldakuntzak** dira.

$${}_{18}^{3}A = 18\,.\,17\,.\,16 = 4896 \text{ posibilitate daude.}$$

2. *Aurreko adibideko auzokideen arazo bat konpontzeko, zortzi auzokidek osatutako batzordea eratu behar bada, zenbat eratara osa daiteke batzordea?*

Hona hemen konfigurazio posible batzuk: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, $A_1A_2A_9A_4A_7A_{11}A_3A_6$ ...

- Kontuan hartu behar al da elementuen ordena? Ez, karguak berdinak baitira.
- Errepika al daitezke elementuak? Ez, zortzi auzokide izan behar badira.

Beraz, 8naka harturiko 18 elementuren **konbinazioak** dira.

$${}_{18}^{8}K = \binom{18}{8} = 43758 \text{ konbinazio desberdin era daitezke.}$$

(Oh.: Batzuetan, bilatu beharreko konfigurazioek, aldi berean, beren azpikonfigurazioak dituzte, eta horietako bakoitza irizpide bereziez era daiteke)

3. *Diplomatikari-talde batean 6 alemaniar, 5 frantziar eta 7 italiar daude. Zenbat eratan antola daiteke batzorde bat, herrialde bakoitzak bi ordezkari izan ditzan?*

Bilatu nahi ditugun konfigurazioak, aukeran ditugun 18 pertsonetariko 6 hautatuz lortzen dira, baina herrialde bakoitzetik bi egonik.

Ikus dezakezunez, hautaketa egitean ez da kontuan hartu behar ordena eta ezin dira errepikatu elementuak. Beraz, konbinazioak dira.

- 6 alemaniarren artean 2 ordezkari hautatzeko moduak: ${}_{6}^{2}K = \binom{6}{2} = 15$
- 5 frantziarren artean 2 ordezkari hautatzeko moduak: ${}_{5}^{2}K = \binom{5}{2} = 10$
- 7 italiarren artean 2 ordezkari hautatzeko moduak: ${}_{7}^{2}K = \binom{7}{2} = 21$

Lehen motako 15 azpikonfigurazioak bigarren motako 10ekin osa daitezke, eta hauek hirugarren motako 21ekin. Beraz, batzorde posibleen kopurua ondokoa izango da:

15 . 10 . 21 = 3150

4. *1 eta 5 bitarteko zifrak erabilita, bost zifra desberdineko zenbat zenbaki desberdin era daitezke? Zenbaki horiek txikienetik handienera ordenatuz, zenbatgarren tokian dago 34215 zenbakia?*

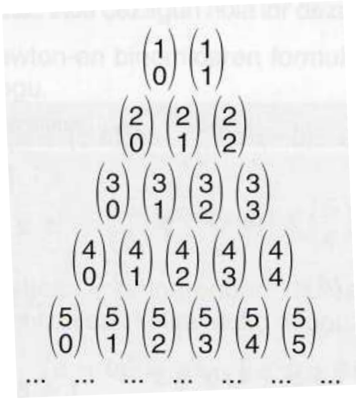
Lehenik, 1, 2, 3, 4 eta 5 zifrekin bost zifra desberdineko zenbat zenbaki era daitezkeen kalkulatu behar dugu.
Kontuan hartu behar da ordena, zeren 12345 eta 12435 desberdinak baitira.
Zifra guztiek hartzen dute parte.
Zenbakietan ez dago elementu errepikaturik, bost zifra desberdinez eratutako zenbakiak kontsideratu behar baititugu.
Beraz, 5 elementuren permutazioak kalkulatu behar ditugu: ${}_5P = 5! = 120$

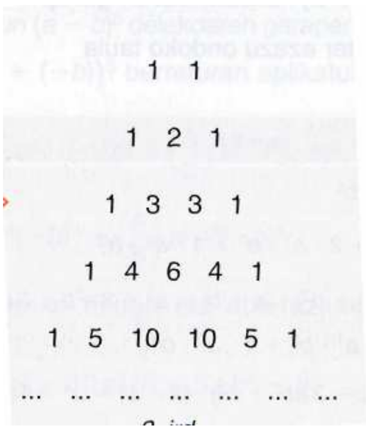
Orain, behin txikienetik handienera ordenatu ondoren, zenbaki horien artean 34215 baino txikiagoak diren zenbakiak kontatu behar ditugu.
Kontuan hartu beharrekoak, hasieran 1 , 2 , 31 , 32 eta 341 zifrak dituzten zenbaki guztiak izango dira.

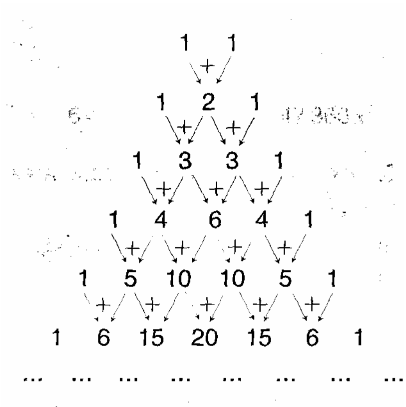
- 1 zifratik hasten direnak: ${}_4P = 4! = 24$
- 2 zifratik hasten direnak: ${}_4P = 4! = 24$
- 31 zifretatik hasten direnak: ${}_3P = 3! = 6$
- 32 zifretatik hasten direnak: ${}_3P = 3! = 6$
- 341 zifretatik hasten direnak: ${}_2P = 2! = 2$

Guztira: 24 + 24 + 6 + 6 + 2 = 62 zenbaki daude 34215 zenbakia baino txikiagoak. Beraz, 34215 zenbakia **63. tokian dago.**

5.3 Tartaglia-ren triangelua







Ohar zaitez ezaugarri hauetaz:

- Errenkada bakoitzeko muturrak beti dira 1 zenbakia; hau da $\binom{n}{0}$ edo $\binom{n}{n}$
- Errenkada bakoitzeko bigarren eta azken bigarren zenbakiak elkarren berdinak dira, baita hirugarrena eta azken hirugarrena...ere
- Barnealdeko zenbaki bakoitza, gainean dauzkan bi zenbakien batura da.

5.4 Newton-en binomioa

$(a + b)^n$ binomiaren garapena

Azter ezazu ondoko taula:

	Koekizienteak
$(a + b)^1 = a + b = \mathbf{1}\, a^1 b^0 + \mathbf{1}\, a^0 b^1$	1 1
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \mathbf{1}\, a^2 b^0 + \mathbf{2}\, a^1 b^1 + \mathbf{1}\, a^0 b^2$	1 2 1
$(a + b)^3 = (a + b)^2 \,.\, (a + b) = \mathbf{1} a^3 b^0 + \mathbf{3}\, a^2 b^1 + \mathbf{3}\, a^1 b^2 + \mathbf{1}\, a^0 b^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4 = (a + b)^3 \,.\, (a + b) = \mathbf{1} a^4 b^0 + \mathbf{4}\, a^3 b^1 + \mathbf{6}\, a^2 b^2 + \mathbf{4}\, a^1 b^3 + \mathbf{1}\, a^0 b^4$	1 4 6 4 1

Horiek guztiek ondoko ezaugarriak dituzte:

- $(a + b)^n$ gaien kopurua $n+1$ da
- Koefizienteen balioak Tartaglia-ren triangeluko n-garren errenkadako elementuak dira; hots, $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, ... , $\binom{n}{n}$
- **a**-ren berretzaileak n-tik 0-rako balioa osoak dira, ordena beherakorrean
- **b**-ren berretzaileak 0-tik n-rako balio osoak dira, ordena gorakorrean.

Era orokorrean:

$$\mathbf{(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n}$$

Ariketa ebatzia

Erabili Newton-en binomioaren formula $(4 + 3x)^4$ kalkulatzeko.

$$(4 + 3x)^4 = \binom{4}{0} 4^4 \,.\, (3x)^0 + \binom{4}{1} 4^3 .(3x)^1 + \binom{4}{2} 4^2 \,.\, (3x)^2 + \binom{4}{3} 4^1 .(3x)^3 + \binom{4}{4} 4^0 \,.(3x)^4 =$$

$$= 4^4 + 4 \,.\, 4^3 \,.\, 3x + 6 \,.\, 4^2 \,.\, 3^2 \,.\, x^2 + 4 \,.\, 4 \,.\, 3^3 \,.\, x^3 + 3^4 \,.\, x^4 =$$

$$= 256 + 768\, x + 864\, x^2 + 432\, x^3 + 81x^4$$

$(a - b)^n$ binomiaren garapena.

Adibidez, kalkula dezagun $(3x – 2)^6$

$$(3x – 2)^6 = \binom{6}{0} (3x)^6 \,.\, (-2)^0 + \binom{6}{1} (3x)^5 \,.\, (-2)^1 + \binom{6}{2} (3x)^4 \,.\, (-2)^2 + \binom{6}{3} (3x)^3 \,.\, (-2)^3$$

$$+ \binom{6}{4} (3x)^2 \,.\, (-2)^4 + \binom{6}{5} (3x)^1 .\, (-2)^5 + \binom{6}{6} (3x)^0 \,.\, (-2)^6 =$$

$= \binom{6}{0} (3x)^6 . 2^0 - \binom{6}{1} (3x)^5 . 2^1 + \binom{6}{2} (3x)^4 . 2^2 - \binom{6}{3} (3x)^3 . 2^3 +$
$\binom{6}{4} (3x)^2 . 2^4 - \binom{6}{5} (3x)^1 . 2^5 + \binom{6}{6} (3x)^0 . 2^6 =$

$= 1 . 729 x^6 .1 - 6 . 243 x^5 . 2 + 15 . 81 x^4 . 4 - 20 . 27 x^3 . 8 + 15 . 9 x^2 . 16 - 6 . 3 x . 32 + 1 . 1 . 64 =$

$= 729 x^6 - 2916 x^5 + 4860 x^4 - 4320 x^3 + 2160 x^2 - 576 x + 64$

Ariketa. Kalkula itzazu ondoko berreturak:

a) $(2x + 3)^4$ Em.: $16 x^4 + 96 x^3 + 216 x^2 + 216 x + 81$

b) $\left(\frac{x^2}{2} - 2y\right)^5$ Em.: $\frac{x^{10}}{32} - \frac{5}{8} x^8 y + 5 x^6 y^2 - 20 x^4 y^3 + 40 x^2 y^4 - 32 y^5$

ARIKETAK

1. Kalkula itzazu:

   ${}_{8}^{6}A \quad ; \quad {}_{8}^{6}A' \quad ; \quad {}_{8}^{6}K \quad ; \quad {}_{8}P^{4,2,1}$

2. Idatz itzazu *a, b, c* eta *d* letrak binaka hartuta, era daitezkeen aldakuntza guztiak, aldakuntza errepikadun guztiak eta konbinazio guztiak.

3. Zenbat era desberdinetan bana daitezke kontzertu baterako hiru sarrera-txartel 40 pertsonaren artean, bakoitzari txartel bakarra emanik?

4. Zenbat eratan bana daitezke urreko, zilarrezko eta brontzezko dominak lasterketa batean parte hartuko duten 12 atleten artean?

5. Kalkula ezazu zenbat era desberdinetan eser daitezkeen bost pertsona:
   a) Bost eserleku dituen banku batean
   b) Mahai biribil baten inguruan, eserlekuak zenbakituta daudela suposatuz.
   c) Mahai biribil baten inguruan, kontuan hartu beharreko gauza bakarra ezker eta eskuinaldeko lagunak izanik

6. Dekagono erregular baten erpinak puntutzat hartuta, zenbat zuzen desberdin eta zenbat triangelu desberdin era daitezke?

7. Zenbat tren-txartel desberdin inprimatu behar dira zortzi geltoki dituen ibilbide bateko bidaia posible guztiak adierazteko, txartel bakoitzean hasierako eta amaierako geltokiak adierazi behar badira?

8. 4 biko, 2 bosteko eta hiruko bat dauzkaten zazpi zifrako zenbat zenbaki daude?

9. 2, 3 eta 4 *zenbakiak* erabiliz, lau zifrako zenbat zenbaki era daitezke?

10. Hiru faktore desberdineko zenbat biderketa desberdinak egin daitezke 2, 3, 5, 6 eta 8 zenbakiekin?

11. Loteria primitibo apustu bat egiteko, gurutze batez markatu behar dira 1 eta 49 zenbakien arteko (biak barne) sei zenbaki. Zenbat apustu desberdin egin daitezke loteria primitiboan? Zenbat apustu posiblek hartzen dituzte barnean 17, 23 eta 42 zenbakiak?

12. Ikastalde batean 12 mutil eta 16 neska daude. Zenbat eratan aukera daiteke sei pertsonako batzordea, hiru mutil eta hiru neska egonik?

13. Literatura-lehiaketa batean 25 pertsona aurkeztu dira. Hiru sari hiru pertsona desberdini emateko asmoa dagoela kontuan harturik:
    a) Zenbat eratara aukera daitezke sarituak, hiru sariak desberdinak izanik?
    b) Eta hiru sariak berdinak izanik?
    c) Eta lehen saria berezia eta bigarren eta hirugarren sariak bi akzesit berdin izanik?

14. Txanpon bat zortzi aldiz jaurti da airera, eta era ordenatuan idatzi dira emaitzak. Zenbat eratan lor daitezke 5 aurpegi eta 3 gurutze? Eta 2 aurpegi eta 6 gurutze?

Em.: 56 ; 28

15. 1, 2, 3, 4, 5 eta 6 zifrak erabilita, sei zifra desberdineko zenbat zenbaki era daitezke? Horietako zenbat daude 300000 eta 500000 zenbakien artean?

Em.: 720; 240

16. 1 eta 6 bitarteko zifrak erabilita, lau zifra desberdineko zenbat zenbaki desberdin era daitezke? Zenbaki horiek txikienetik handienera ordenatuz, zenbatgarren tokian dago 3542 zenbakia?

Em.: 360; 164

17. Demagun auto-matrikulak 4 zifraz eta ondoren 2 letraz osatzen direla. Alfabetoak 26 letra dituela jakinda, zenbat auto matrikulatu ahal dira metodo horrekin?

18. Zenbat modu desberdinetan bete daiteke futbol-kiniela? Zenbatean egongo dira zehazki 7 bateko, 5 ixa eta 2 biko?

19. Zenbat eratan ordena ditzakegu KONSPIRAZIOA hitzaren letrak, bokalen lekuan kontsonanterik ipini ezin bada, ez eta alderantziz ere?

Em.: 64800

20. Kalkula itzazu ondoko berreturak:

a) $(x + 2y)^5$; b) $(1 - x)^6$

PROBABILITATEA

Mahai gainera dado bat botatzen badugu, ez dakigu zein puntuazio agertuko den. Emaitza **aleatorioa** da.

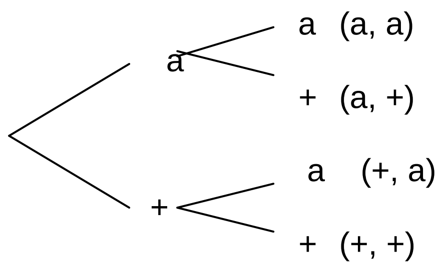
Esperimentu aleatorio batean, emaitza posible guztien multzoari **lagin-espazioa** deiten zaio eta Ω letra grekoz adierazten da.

Dado batean, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Txanpon batean, $\Omega = \{a \, , +\}$

Hiru txanponekin, $\Omega = \{aaa \; , \; aa+ \; , \; a+a \, , \; +aa \; , \; a++ \; , \; +a+ \; , \; ++a \; , \; +++\}$

Esperimentu konposatuak
Esperimentu bat konposatua dela esango dugu, baldin aldi berean edo ondoz ondo egindako zerbait esperimentu bakunez osaturik badago.
Adibidez, txanpona airera jaurtitzea esperimentu bakuna da; baina txanpon bat eta dado bat airera jaurtitzea, edo bi txanpon jaurtitzea… esperimentu konposatuak dira.
Esperimentu konposatu baten lagin-espazioa bilatzeko, oso egokia da zuhaitz-diagramak erabiltzea. Kasurako, bi txanpon airera jaurtitzean:



Ω = { (a, a) , (a, +) , (+, a) , (+, +) }

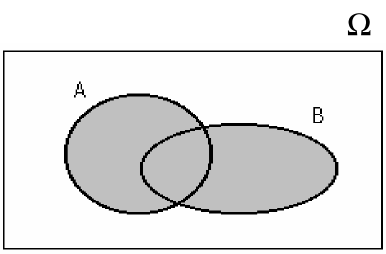
Ω-ren edozein azpimultzori **gertaera** esaten zaio eta letra larriz adierazten da. Esaterako, dadoa jaurtitzean *zenbaki bikoitia ateratzea* gertaera A = {2 , 4 , 6} da.

Gertaera ziurra, beti jasotzen dena da eta Ω lagin-espazio bera da izatez. Adibidez, dadoa jaurtitzean *6 zenbakia edo txikiagoa ateratzea*: A = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6}.

Ezinezko gertaera ez da inoiz jasotzen. ϕ multzo hutsa da.

Gertaeren arteko eragiketak

Bilketa: $A \cup B$

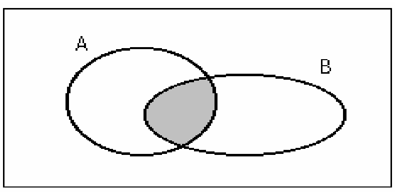


A edo *B* jazotzen denean.

A eta *B*ko elementu guztiekin osatzen da.

Ebaketa: $A \cap B$

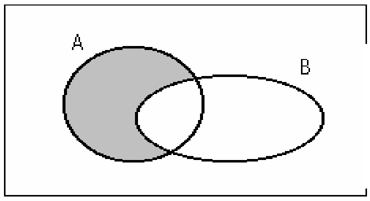
Aldi berean *A* eta *B* jazotzen direnean.



*A*koak eta *B*koak diren elementuekin osatzen da.

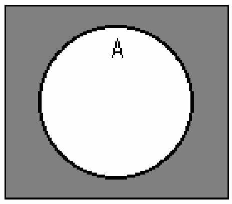
Kenketa edo diferentzia: $A - B$

A jazotzean *B* gertaera jazotzen



A multzokoak izanik *B*koak ez diren elementuekin osatzen da.

Osagarria: $\overline{A}$



A gertaera jazotzen ez denean.

Ariketak.

1. Karta-sorta batetik karta bat ateratzen da. Kontsidera ditzagun ondoko gertaerak:

   A: urrea atera ; *B: erregea atera*

   Deskriba itzazu ondoko hauek:

   $A \cup B$

   $A \cap B$

   $\overline{A}$

   A – B

2. Zenbat da?

   $A \cup \phi$; $A \cap \phi$; $\overline{\overline{A}}$; $A \cup \overline{A}$; $A \cap \overline{A}$

Dado bat jaurtitzean har ditzagun ondoko gertaerak:

A = {2 , 3} ; B = {1 , 2} eta C = {4 , 5}

2 zenbakia ateratzen bada, *A* eta *B* aldi berean gertatzen dira. Gertaera horiek **bateragarriak** dira. $A \cap B \neq \phi$

Aldiz, *A* eta *C* ezin dira aldi berean gerta; **bateraezinak** dira. $A \cap C = \phi$

PROBABILITATEA

Txanpon bat 100 aldiz botatzen dugu airera. Demagun 55 aldiz aurpegia ateratzen dela eta 45 aldiz gurutzea.

"Aurpegia irtetzea" gertaeraren maiztasun absolutua 55 da eta maiztasun erlatiboa $\frac{55}{100} = 0{,}55$ da; ordea, *"gurutze irtetzea"*-ren maiztasun erlatiboa 0,45 da.

Txanpona, zenbat eta gehiagotan jaurti (1000, 10000,...), maiztasun erlatiboak geroz eta gehiago hurbiltzen dira balio batera, 0,5 baliora.

Zenbaki horri, **probabilitatea** deitzen zaio.

Laplace-ren definizioa: $p(A) = \frac{aldeko\ kasuak}{kasu\ posibleak}$

Ariketak.

1. 40 kartako karta-sorta batetik karta bat ateratzen da. Zein da probabilitate hauen balioa?:
   a) Urrea izatea.
   b) Urrea edo kopa izatea.
   c) Bastoa ez izatea.

2. Dado bat jaurtitzean, zein da 4 irtetzeko probabilitatea?

3. Ontzi batean bost bola zuri, hiru bola gorri eta lau bola beltz daude. Ontzitik bola bat zoriz ateratzen bada, kalkula itzazu ondoko gertaeren probabilitateak:

A: bola beltza ; B: bola zuria edo beltza; C: bola urdina

4. Bi txanpon airera jaurtitzen ditugu. Idatzi lagin- espazioa. Zein da bi aurpegi ateratzeko probabilitatea ?

5. Bi dado jaurtitzean, zein da puntuen batura zortzi izateko probabilitatea?

Zera betetzen da:
$0 \le p(A) \le 1$
$p(\Omega) = 1$; $p(A) + p(\overline{A}) = 1$; $p(\phi) = 0$

6. Dado bat jaurtitzen dugu airera.Eman ditzagun gertaera hauek: A = {2 , 4 , 6} ; B = {1 , 2 , 3} ; C = {3 , 5}

Kalkulatu:
p(A) ; p(B) ; p(C) ; $p(\overline{C})$; $p(A \cap B)$; $p(A \cup B)$; $p(A \cup C)$

Gertaera **bateragarriak** direnean ondokoa betetzen da:
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
(Egiazta ezazu aurreko ariketan)

Gertaera **bateraezinak** direnean, $A \cap B = \phi$ da eta $p(A \cap B) = 0$.
Orduan, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

7. Mirenek eta Rakelek azterketa bat egin dute. Mirenek azterketa gainditzeko probabilitatea 0,6 da, Rakelek 0,3 eta biek (Mirenek eta Rakelek) gainditzekoaren probabilitatea 0,1. Kalkula itzazu:
a) Mirenek edo Rakelek gainditzeko probabilitatea.
b) Mirenek gainditu, baina Rakelek ez gainditzeko probabilitatea.

8. Gazte-elkarte bateko %35 bazkidek *A* musika-taldearen zaleak dira; %30 *B* taldearen zaleak; eta %15 bi taldeak atsegin dituzte. Bazkide bat zoriz aukeratuz gero, kalkula itzazu ondoko probabilitateak:
a)Ez *A* ez *B* taldeak gustoko izatea.
b)B taldekoa zalea izatea, baina ez *A* taldekoa.

9. Herri batean biztanleen %40k ilea beltza dute, %25ek begi marroiak eta %50ek ez dute ile beltzik ez eta begi marroirik. Herri horretako pertsona bat zoriz aukeratzen badugu, zein da:
a) Begi marroiak ez edukitzeko probabilitatea.
b) Ile beltza bai, baina begi marroirik ez edukitzeko probabilitatea?

Honelako taula erabiltzea gomendatzen da:

	Begi marroiak	Begi marroiak ez	
Ile beltza			40
Ile beltza ez		50	
	25		100

10. Ikastetxe batean 250 ikasle daude. Horietatik, 150 Eibarkoak dira, eta 80 ikasleei ez zaie gustatzen musika modernoa. Gainera, 60 ikasle ez dira Eibarkoak, baina gustatzen zaie musika modernoa. Ikasle bat zoriz aukeratuta, zein da:

a) Musika modernoa gustoko izateko probabilitatea.

b) Eibarkoa ez izan eta musika modernoa gustoko ez izateko probabilitatea.

c) Ikaslea Eibarkoa dela badakigu. Zein da musika modernoa gustoko izateko probabilitatea?

Probabilitate baldintzatua

Batzuetan gertaera bati buruz aldez aurreko informaioa edukitzeak gertaeraren probabilitatea aldarazten du.

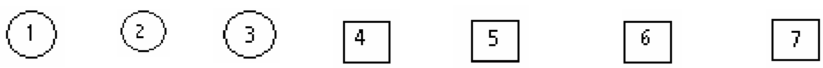
"*B*-k baldintzaturiko *A* gertaeraren probabilitatea". Formula: $\boxed{p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}}$

$$p(A\cap B)=p(A/B).p(B)$$

Aurreko adibidean, musika modernoa gustatzea Eibarkoak direnen artean: *p(M/E)*. Formula aplikatuz, $p(M/E)=\dfrac{p(M\cap E)}{p(E)}=\dfrac{\frac{110}{250}}{\frac{150}{250}}=\dfrac{110}{150}$

Ariketak.

1. Poltsa batean forma biribilak eta laukiak ditugu, eta zenbakituta daude, ondoren adierazten den bezala:



Bat zoriz ateratzean, zein da probabilitatea:
a) Bikoitia izatea.
b) Biribila dela jakinda, bikoitia izatea.
c) Laukia dela jakinda, bikoitia izatea.

2. Herri batean bi egunkari saltzen dira: A eta B. Badakigu herri horretako biztanleen %55ek A egunkaria irakurtzen dutela, %40k B egunkaria, eta %25ek ez bata ez bestea. Biztanle bat zoriz aukeratuta, zeintzu dira probabilitate hauek:
a) Egunkari biak irakurtzea.
b) A bakarrik irakurtzea.
c) Egunkarietako bat bakarrik irakurtzea.
d) Badakigu biztanle horrek A irakurtzen duela. Zein da B ere irakurtzearen probabilitatea?
e) Badakigu egunkariren bat irakurtzen duela. Zein da A bai eta B ez izateko probabilitatea?

Esperimentu konposatuak

<u>Menpeko esperientziak (dependenteak) eta esperientzia askeak (independenteak)</u>

Gaiaren hasieran esan zen moduan, txanpon bat bi aldiz jaurti esperimentua konposatua da, (“txanpon bat jaurti eta “bestea jaurti). Poltsa batetik bi bola atera ere esperimentu konposatua da baina kasu honetan ondo bereizi beharreko bi mota aurkituko ditugu:

- Itzuleradun ateraldiak: ateraldi bakoitzaren ondoren, ateratako elementua berriro multzoan sartzen da.
- Itzulera gabeko ateraldiak: ateraldiak elkarren atzean egiten dira, baina ateratako elementuak multzoan berriro sartu gabe.

Bi esperientzia edo gehiagori **askeak** direla esaten zaie esperientzia bakoitzaren emaitza besteen emaitzen menpekoa ez denean. Adibidez, txanpon bat bi aldiz jaurti eta ondoz ondoko itzuleradun ateraldiak esperientzia askeak dira.
Bi esperientzia edo gehiagori **menpekoak** direla esaten zaie esperientzia bakoitzaren emaitzak besteen emaitzatan eragina duenean. Adibidez, ondoz ondoko itzulera gabeko ateraldiak esperientzia menpekoak dira.

1. adibidea.

Txanpon bat bi aldiz jaurtitzean, lehenengo jaurtialdian *aurpegia ateratzea* gertaerak ez du eraginik bigarren jaurtialdian berriro *aurpegia ateratzea* gertaerarekin.

Kasu honetan, gertaera bat jazotea ez dago baldintzatuta beste gertaera jazotzen den ala ez.

Gertaera independenteak direla esango dugu eta ondokoa beteko da:

$$p(A \cap B) = p(A)\,.\,p(B)$$

Txanpona bi aldiz botatzean, biak aurpegia ateratzeko probabilitatea:

$$p(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

2. adibidea.
48 kartako karta-sorta batetik hiru karta ateratzen ditugu. Kalkulatu hirurak bastoiak izateko probabilitatea ondoko bi kasuetan:

a) Karta atera eta gero, sortan berriro sartu gabe.
b) Atera ondoren, berriro sortara sartuta.

a) $\frac{12}{48} \cdot \frac{11}{47} \cdot \frac{10}{46}$ (gertaera dependenteak)

b) $\frac{12}{48} \cdot \frac{12}{48} \cdot \frac{12}{48}$ (gertaera independenteak)

Ariketa.

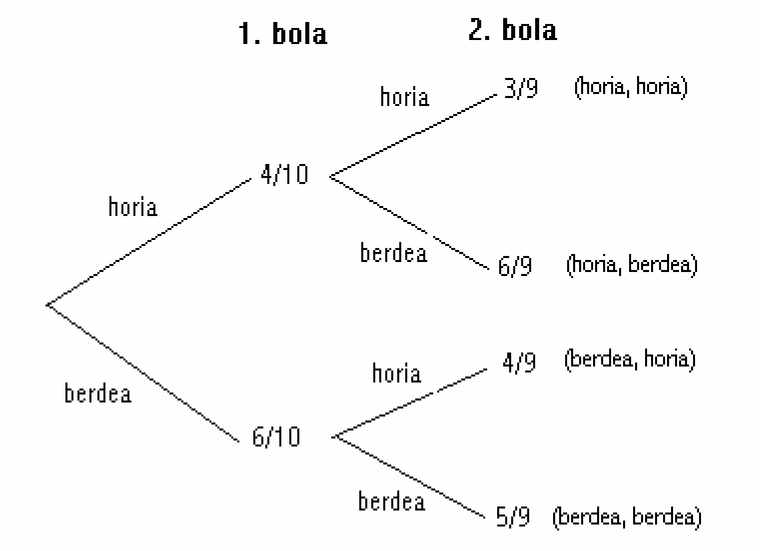
Zein probabilitate dago erruletan jokatzean hiru aldiz segidan gorria ateratea? Erruletak 18 gelaxka gorri, 18 gelaxka beltz eta zuri bat ditu.

Em.: 0,115

Zuhaitz-diagrama

1. adibidea.
Kutxa batean lau bola hori eta sei berde daude. Bi bola aldi berean ateratzen baditugu, zein da:

a) Biak horiak izateko probabilitatea?
b) Gutxienez bat horia izateko probabilitatea?



a) Biak horiak izateko probabilitatea: $\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$

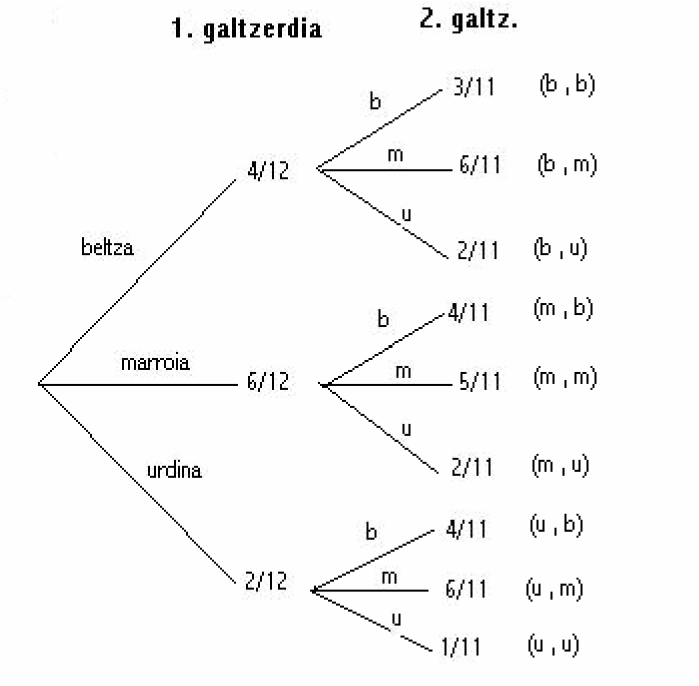
b) Gutxienez bat horia izateko probabilitatea. Bi eratan egin ahal da:

I) $\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} + \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9} + \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$

II) Probabilitate zihurra - p(berdea, berdea) $= 1-\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = 1-\frac{30}{90} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$

2. adibidea

Kajoi batean lau galtzerdi beltz, sei marroi eta bi urdin daude. Bi galtzerdi hartzen ditugu zoriz. Zein da biak kolore berekoak izateko probabilitatea?



Biak kolore berekoak izateko probabilitatea: (b , b) + (m , m) + (u , u) =

$$\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11} + \frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11} + \frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11} = \frac{44}{132} = 0{,}3333$$

Ariketak.

1. Idoiak geografiako 22 unitateetatik 18 dakizki. Azterketarako bi aterako dituzte, zoriz. Zein da unitate bat jakiteko probabilitatea.

2. Txanpon bat hiru aldiz jaurtitzen da. Zein da:

   a)Hiru aurpegi ateratzeko probabilitatea

   b)Gutxienez bi aurpegi ateratzeko probabilitatea

   c)Gutxienez aurpegi bat ateratzeko probabilitatea.

Konbinatoria eta Probabilitatea

1. Lau txanpon airera botata, zein da lau aurpegi ateratzeko probabilitatea?

2. Apalategi batean hamar kutxa daude 1etik 10era zenbakiturik, eta hamar bola ditugu, horiek ere 1etik 10era zenbakiturik. Kutxa bakoitzean bola bana zoriz sartuz gero, zein da bola bakoitza bere zenbaki bereko kutxan erortzeko probabilitatea?

   Em.: $2{,}756 \cdot 10^{-7}$

3. Zein da futbol kiniela bateko apustu batean hamabostekoa asmatzeko probabilitatea?

4. Apustu bat egin dugu Loteria Primitiboan.
   a) Zein da sei zenbakiak asmatzeko probabilitatea ?
   b) Eta zenbakia bat bera ere ez asmatzeko probabilitatea ?

ARIKETAK

1. Zer da probableago, jaiotako 20 umetik 14 neskak izatea ala 90 umetik 63 neska izatea?

2. 40 kartako karta-sorta batetik karta bat ateratzen dugu. Zein da probabilitatea:
   a) Txanka, zaldia edo erregea izatea?
   b) Batekoa edo kopa izatea?
   c) Badakigu urrea dela. Zein da bateko urrea izateko probabilitatea?

3. Dado bat bi aldiz jaurtitzen dugu. Ze probabilitate dago bigarren jaurtialdian lehenengoan baino puntuazio handiagoa lortzeko?

4. Parakaidista batek jausgailuak huts egiteko probabilitatea kalkulatu du, eta 0,0001 balioa lortu du. Guztiz ikaratuta, salto bakoitzean ordezko beste jausgailu berdin bat ere eramatea erabaki du, badaezpada. Zein da jausgailu biek huts egiteko probabilitatea?

5. Ikasleek maila gainditzeko duten probabilitatea 0,7 da. Zoriz aukeratutako bost ikasleko talde batean, zein dira ondoko gertaeren probabilitateak?
   a) Ikasmaila inork ez gainditzea.
   b) Guztiek ikasmaila gainditzea.

6. Bi haur dituen familia batean, zein da bata mutila eta bestea neska izateko probabilitatea? Eta biak neskak izatekoa?

7. Kutxa batean bost bola gorri eta hiru zuri daude. Bi bola aldi berean ateratzen ditugu.
   a) Zein da probabilitatea biak gorriak izateko?
   b) Zein da gutxienez bat gorria izateko probabilitatea?

8. Azterketa batean, programako hamar gaien artean zoriz bi gai aukeratu behar dira. Ikasle batek 6 gai dakizki. Ze probabilitate dago ikasle horrek:
   a) Aukeratutako bi gaiak jakiteko?
   b) Gai bat bai, baina bestea ez jakiteko?

9. Produktu batek bi zati ditu: *A* eta *B*. Fabrikazio prozesuaren arabera *A* zatian akatsa egoteko probabilitatea 0,06 da eta *B* zatian egotekoa 0,07. Zein da produktuak akatsak ez izateko probabiltatea?

10. Ikasgela batean 20 mutil eta 10 neska daude. Mutilen erdiek eta nesken erdiek matematika gainditu dute. Ikasle bat zoriz aukeratuta, zein da probabiltatea?

a) Matematika gainditu ez duen mutila izateko?
b) Mutila dela jakinda, matematika gainditu duen bat izateko?

11. Ikasle batek bi proba egin ditu egun berean. Lehenengo proba gainditzeko daukan probabilitatea 0,6 da, bigarrena gainditzeko probabilitatea 0,8 da, eta biak gainditzekoa 0,5. Aurkitu:

a) Proba bat gutxienez gainditzeko daukan probabilitatea.
b) Proba bat ere ez gainditzeko daukan probabilitatea.
c) Lehenengo proba gainditu badu, bigarrena ere gainditzeko daukan probabilitatea.
d) Lehenengo proba gainditu ez badu, bigarrena gainditzeko daukan probabilitatea.