Batxilergo Zientifiko-Teknikoa

MATEMATIKA I

1. ebaluazioa:

Ekuazio esponentzialak
Logaritmoak
Ekuazio linealen sistemak (Gauss)
Zuzen erreala – Segidak - Limiteak
Trigonometria

Ignacio Zuloaga BHI (Eibar)

EKUAZIO ESPONENTZIALAK

Ekuazio esponentzialak ezezaguna berretzailean duten ekuazioak dira.

Adibidez:

$a)\ 3^{1-x^2} = \dfrac{1}{27}$; $b)\ 5^{x^2-5x+6} = 1$; $c)\ 3^{1-x^2} = 2$; $d)\ 2^x + 2^{x+1} = 12$

Propietateak

$a^0 = 1$; $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$; $\sqrt[x]{a^n} = a^{\frac{n}{x}}$

$a^x . a^y = a^{x+y}$; $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; $a^x . b^x = (a.b)^x$; $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

<u>Azter ditzagun goian idatzitako lau adibideak</u>:

a) eta b) ekuazioak ebazteko, bigarren atala lehenengo atalaren oinarri bereko berretura moduan adierazi behar dugu: $\dfrac{1}{27} = 3^{-3}$; $1 = 5^0$

c) kasuan ezin dugu horrelakorik egin 2 zenbakia ez delako 3 zenbakiaren berretura osoa ez eta zatikizkoa ere. Ekuazio horiek atal bietan logaritmoak hartuta ebatzi behar ditugu

d) kasuan, berriz, aldagaiaren aldaketa bat egin beharko dugu.

Ebatzi ditzagun a), b) eta d), eta utz dezagun c) ariketa logaritmoak aztertu arte.

a) $3^{1-x^2} = \dfrac{1}{27}$

$\dfrac{1}{27}$ adieraziko dugu 3 oinarriko berretura moduan: $\dfrac{1}{27} = \dfrac{1}{3^3} = 3^{-3}$

$$3^{1-x^2} = \frac{1}{27} \quad \rightarrow \quad 3^{1-x^2} = 3^{-3} \quad \rightarrow \quad 1 - x^2 = -3 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x = \pm 2$$

$b)\ 5^{x^2-5x+6} = 1$

1 zenbakia 5 oinarriko berretura moduan adieraziko dugu: $1 = 5^0$

$$5^{x^2-5x+6} = 5^0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

Soluzioak: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$

$d)\ 2^x + 2^{x+1} = 12$

Aldagai aldaketa hau egingo dugu: $2^x = a$

Horrela, $2^{x+1} = 2^x . 2 = 2a$ izango da.

Beraz, $a + 2a = 12 \quad \rightarrow \quad 3a = 12 \quad \rightarrow \quad a = 4 \quad \rightarrow \quad 2^x = 4 \quad \rightarrow \quad x = 2$

Ariketa ebatziak: a) $\dfrac{5^{x+1}}{\left(\sqrt{5}\right)^{2x+3}} = 125^{6-x}$; b) $3^x + 3^{2-x} = 10$

a) $\dfrac{5^{x+1}}{\left(\sqrt{5}\right)^{2x+3}} = 125^{6-x}$ $\rightarrow$ $5^{x+1-\frac{2x+3}{2}} = 5^{3(6-x)}$ $\rightarrow$ x + 1 - $\dfrac{2x+3}{2}$ = 3(6 - x)

2x + 2 - 2x - 3 = 36 - 6x $\rightarrow$ 6x = 37 $\rightarrow$ **soluzioa: x =** $\dfrac{37}{6}$

b) $3^x + 3^{2-x} = 10$

$3^x = a \quad \rightarrow \quad a + \dfrac{3^2}{a} = 10 \quad \rightarrow \quad a^2 - 10a + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \dfrac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \dfrac{10 \pm 8}{2}$

$a = 9$ eta $a = 1$; $3^x = 9 \rightarrow x = 2$

$3^x = 1 \rightarrow x = 0$

Kalkulagailuaren erabilpena

- Idazkera zientifikoa: $5{,}7 \cdot 10^9$ idazteko $\rightarrow$ 5,7 $\boxed{\text{exp}}$ 9

  $2{,}94 \cdot 10^{-13}$ idazteko $\rightarrow$ 2,94 $\boxed{\text{exp}}$ 13 $\boxed{\pm}$

- Azter itzazu tekla hauek: $\sqrt{\ }$, x^2 , $\sqrt[3]{\ }$, x^y , $x^{1/y}$

- $y = 10^x$ eta $y = e^x$ funtzioen balioak lortu ahal izateko 10^x eta e^x teklak izaten dituzte, hurrenez hurren.

Gogoratu
e zenbakia zenbaki irrazionala da eta bere balioa hau da:
e = 2,7182818...
Goi mailako matematikan agertzen den zenbakirik garrantzitsuenetarikoa da.

Ariketak

1. Ebatzi ondoko ekuazioak

$a)\ 2^{\frac{1}{x}} = 16$; $b)\ \sqrt{7^x} = \dfrac{1}{49}$; $c)\ 2^x . 2^{x+1} = 8$; $d)\ 2^x + 2^{1-x} = 3$

$e)\ 2^{3x} = 0{,}5^{3x+2}$; $f)\ 3^{4-x^2} = \dfrac{1}{9}$; $g)\ 10^x .100 = \sqrt{100^2}$

$h)\ 5^{2x-1} = \sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}}$; $i)\ 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 7 = 0$; $j)\ 9^x - 2.3^{x+2} + 81 = 0$

$k)\ \sqrt{a^{x-1}} . \sqrt[4]{a^{2x+1}} . \sqrt[6]{a^{x+1}} = \sqrt{a^{2x-1}}$; $l)\ \dfrac{27^{x+2}}{9^{2x-2}} = 81^{3x-4}$; $m)\ 9^x - 3^x - 6 = 0$

2.Ebatzi ondoko sistemak: $a)\ \left.\begin{array}{l} \sqrt[x]{x+y} = 2 \\ (x+y)^3 = 2097152 \end{array}\right\}$ $\quad b)\ \left.\begin{array}{l} 2.3^x + 2^{y+3} = 86 \\ 3^x - 2^y = 23 \end{array}\right\}$

LOGARITMOAK

Funtzio logaritmikoa funtzio esponentzialaren alderantzizkoa da.

$\log_2 8 = 3$ da zeren $2^3 = 8$ baita

$\log_5 25 = 2$ da $5^2 = 25$ delako

$\log_3 \frac{1}{9} = -2$ da $3^{-2} = \frac{1}{9}$ delako

$\log_{100} 0{,}01 = -1$ da $100^{-1} = 0{,}01$ delako

....

a oinarriko *P*-ren logaritmoa $\log_a P$ idazten da. Bere balioa *x* da baldin $a^x = P$ bada; hau da, $\log_a P = x \iff a^x = P$

$\boxed{\text{Ez dago zenbaki negatiboen logaritmorik}}$

<u>Adibidea.</u> $\log_x 169 = 2$ bada, zenbat da *x*-ren balioa?

$x^2 = 169 \quad \to \quad x = 13$ Soluzio negatiboak (-13) ez du balio.

Ariketa.

Aurkitu *x*-ren balioak ondoko ekuazioetan:

$\log_2 128 = x$; $\log_x \frac{1}{81} = -4$; $\log_4 x = \frac{1}{2}$

Logaritmo hamartarrak

Oinarria 10 denean ez da ezer adierazten azpiindizean; hau da, $\log_{10} A$ eta $\log A$ bat dira.

Hori dela eta, $\log 10000 = 4 \quad \leftrightarrow \quad 10^4 = 10000$

$\log 0{,}1 = -1$

....

$\boxed{\text{log}}$ teklak, kalkulagailuan idazten duzun zenbakiaren logaritmo hamartarra ematen dizu.

Oinarri aldaketa. Zenbaki baten *a* oinarriko logaritmoa lortzeko, logaritmo hamartarretatik abia gaitezke ondoko formularen arabera: $\boxed{\log_a P = \frac{\log P}{\log a}}$

Beraz, kalkulagailuarekin edozein oinarritako logaritmoak lor ditzakegu:

$\log_a P: \quad P \ \boxed{\text{log}} \ \boxed{\div} \ a \ \boxed{\text{log}} \ \boxed{=}$

Adibidez,

$\log_5 80 :\quad \log_5 80 = \dfrac{\log 80}{\log 5} = 2{,}7227$; *80* $\boxed{\log}$ $\boxed{\div}$ *5* $\boxed{\log}$ $\boxed{=}$

$\log_{12} 100 :\quad \log_{12} 100 = \dfrac{\log 100}{\log 12} = 1{,}8532$; *100* $\boxed{\log}$ $\boxed{\div}$ *12* $\boxed{\log}$ $\boxed{=}$

Propietateak

- Oinarriaren logaritmoa 1 da: $\log_a a = 1$
- $\log_a a^x = x$. Esaterako, $\log_3 3^4 = 4$; $\log_5 \sqrt{5} = 1/2$ ...
- Edozein oinarritan, 1 zenbakiaren logaritmoa 0 da
  $\log_4 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad 4^0 = 1$; $\log 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad 10^0 = 1$ ....
- Biderkadura baten logaritmoa: $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
- Zatidura baten logaritmoa: $\log_a (\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$
- Berretura baten logaritmoa: $\log_a x^p = p.\log_a x$

Ariketa ebatziak

1. Har ditzagun logaritmo hamartarrak ondoko kasuetan:

$$a)\ A = \frac{x^2 . y^3}{z} \qquad ; \qquad b)\ B = \frac{100\ \sqrt[3]{x}}{y^2\ z^7}$$

Ebazpena:

$$a)\ \log A = \log(x^2\ y^3) - \log z\ =\ \log x^2 + \log y^3 - \log z\ =\ 2\log x + 3\log y - \log z$$

$$b)\ \log B =\ \log(100\ \sqrt[3]{x}) - \log(y^2\ z^7)\ =\ \log 100 + \log x^{1/3} - (\log y^2 + \log z^7)\ =$$

$$=\ 2 + \frac{1}{3}\log x - 2\log y - 7\log z$$

2. Egin dezagun alderantzizko ariketa; hau da, kalkulatu E ondoko kasuan:

$$\log E = 4\log a + \frac{1}{2}\log b - \log c - \frac{3}{5}\log d$$

Ebazpena:

$$\log E = \log a^4 + \log\sqrt{b} - (\log c + \log\sqrt[5]{d^3}) \ \rightarrow\ \log E = \log a^4\sqrt{b} - \log c\sqrt[5]{d^3} \rightarrow\ E = \frac{a^4\sqrt{b}}{c\sqrt[5]{d^3}}$$

3. *log 2 = 0,3010* bada, zenbat da *log 20, log 2000* eta *log 500?*

log 20 = log 10.2 = log 10 + log 2 = 1 + 0,3010 = 1,3010
log 2000 = log 1000.2 = log 1000 + log 2 = 3 + 0,3010 = 3,3010
log 500 = log 1000 : 2 = log 1000 – log 2 = 3-0,3010 = 2,6990

Ariketak

1. Kalkulagailua erabili barik, lor itzazu ondoko balioak:

$$a)\log_5 625 \quad ; \quad b)\log 0{,}001 \quad ; \quad c)\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. Aurkitu hurrengo logaritmoen balioak kalkulagailuaren laguntzaz.

$$a)\ \log 60 \qquad ; \qquad a)\log_2 1500 \qquad ; \qquad b)\log_{100} 200$$

3. Egia al gezurra al dira ondoko erlazioak? Arrazoitu.

$$a)\ \log 2x + \log 1 = \log(2x+1)$$
$$b)\ \log x + \log 10 = 3 \quad \rightarrow \quad x.10 = 3$$
$$c)\ \log 5x - \log 5 = \log x$$
$$d)\ \log x + \log 7 = \log y \quad \rightarrow \quad x + 7 = y$$
$$e)\ \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$$

4. Har itzazu logaritmo hamartarrak ondoko kasuetan:

$$a)\ A = \sqrt[3]{\frac{0{,}01}{5}} \qquad b)\ B = \frac{1000}{\sqrt{80^5 .6}} \qquad c)\ C = \frac{\sqrt[4]{100\,x^3\,y}}{0{,}1(1+z)^5}$$

5. Aurki ezazu *M* eta N ondoko kasuetan:

a) $\log M = 3 + 2\log a + \frac{1}{3}\log b - \frac{1}{2}\log d$

b) $\log N = \log a + \frac{1}{2}\log b - \frac{5}{3}\log(1-c)$

Ekuazio logaritmikoak

Adibidez,

$a)\ \log x + \log 50 = 3$; $b)\ 5\log_2 (x+3) = \log_2 32$; $c)\ \log(x+1) - \log\left(\frac{1}{2x-8}\right) = 2$

Ekuazio horiek ebazteko, kontuan hartu behar dira logaritmoen propietateak. Gainera, jakinean egon zenbaki positiboen logaritmoak bakarrik existitzen direla.

Ebatz ditzagun goiko hiru ekuazioak.

a) $\log x + \log 50 = 3$

Kontuan izan *log A + log B = log (A.B)* dela eta *3 = log 1000* dela.

Beraz, $\log(50x) = \log 1000 \quad \rightarrow \quad 50x = 1000 \quad \rightarrow \quad x = 20$

b) $5\log_2 (x+3) = \log_2 32$

Kontuan izango dugu $a\log b = \log b^a$ dela.

Beraz, $\log_2 (x+3)^5 = \log_2 2^5 \quad \rightarrow \quad x+3 = 2 \quad \rightarrow \quad x = -1$

c) $\log(x+1) - \log\left(\frac{1}{2x-8}\right) = 2$

$\log\left(\frac{(x+1)}{\frac{1}{2x-8}}\right)$ = log 100

(x + 1) (2x - 8) = 100 $\rightarrow$ 2x^2 - 6x - 8 = 100 $\rightarrow$ x^2 - 3x - 54 = 0 $\rightarrow$

x = $\frac{3 \pm \sqrt{9+216}}{2} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = 9 \\ x = -6 \end{matrix}}$ x = - 6 soluzioak ez du balio $\boxed{\textbf{Soluzioa: } x = 9}$

Ariketa

Ebatzi ondoko ekuazio logaritmikoak

$a)\ 3\log x - \log 32 = \log\frac{x}{2}$; $b)\ 2\log x - \log(x-16) = 2$; $c)\ 3\log x - 2\log(x/3) = 2\log 3 + \log 2$

$d)\ 2\log x = 3 + \log\frac{x}{10}$; $e)\ \log\sqrt{3x+5} + \log\sqrt{x} = 1 \quad \rightarrow \quad f)\ 4\log_3 (x^2+1) = \log_3 625$

$g)\ \log x + \log 2x + \log 4x = -3$; $h)\ \log\sqrt{3x+1} - \log\sqrt{2x-3} = 1 - \log 5$

....

Ekuazio esponentzialetan aipatu dugu ekuazio mota bat logaritmoen bidez ebatzi behar dena; esaterako, $3^x = 7$. Bigarren atala ezin denez 3 oinarriko berretura moduan adierazi, logaritmoak hartu behar ditugu eta kalkulagailua erabili. Hau da:

$$\log 3^x = \log 7 \quad \rightarrow \quad x \log 3 = \log 7 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\log 7}{\log 3} = \frac{0{,}8451}{0{,}4771} = 1{,}77$$

<u>Ariketa ebatzia</u>.

Ebatz dezagun $2^{x+1} . 3^{x+1} = \sqrt{30}$ ekuazioa:

$$(2.3)^{x+1} = \sqrt{30} \quad \rightarrow \quad \log 6^{x+1} = \log 30^{1/2} \quad \rightarrow \quad (x+1) \log 6 = \frac{1}{2} \log 30$$

$$\rightarrow \quad x+1 = \frac{\log 30}{2 \log 6} \quad \rightarrow \quad x+1 = \frac{1{,}4771}{2\,(0{,}7781)} = 0{,}9492 \quad \rightarrow \quad x = -\,0{,}0508$$

Ariketa

Ebatzi ekuazio hauek logaritmo hamartarrak hartuta:

$a)\ \dfrac{1}{4^x} = 27 \quad ; \quad b)\ 3^{x-9} = \sqrt{73} \quad ; \quad c)\ 5^{x+2} = 40 \quad (\text{sol}: \ \ x = 0{,}29)$

Logaritmo nepertarrak

Goi mailako matematikan $y = \log_e x$ funtzioa oso garrantzitsua da. Logaritmo nepertarra esaten zaio, eta honela adierazten da: $y = \ln x$ edo $y = L\,x$

Logaritmoen propietateak erabilita zera betetzen da:

$$\ln 1 = 0 \quad ; \quad \ln e = 1 \quad ; \quad \ln e^P = P$$

Ariketa. Zenbat dira $\ln \dfrac{1}{e}$ eta $\ln \sqrt{e}$?

$\boxed{\ln}$ teklak, kalkulagailuan idazten den zenbakiaren logaritmo nepertarra ematen du; adibidez, ln 20 $\rightarrow$ 20 $\boxed{\ln}$

<u>Ariketa ebatziak</u>.

1. Ebatz ezazu $3^x = 7$ ekuazioa logaritmo nepertarrak hartuta.

$$\ln 3^x = \ln 7 \quad \rightarrow \quad x \ln 3 = \ln 7 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\ln 7}{\ln 3} = \frac{1{,}9459}{1{,}0986} = 1{,}7712$$

2. Ebatzi *ln (x-3) = 2* ekuazioa.

$$x - 3 = e^2 \quad \rightarrow \quad x - 3 \approx 7{,}4 \quad \rightarrow \quad x \approx 10{,}4$$

$\boxed{e^2\text{: } 2\ \boxed{\text{INV}}\ \boxed{e^x}}$

Ariketak

1. Logaritmoen definizioa erabiliz, kalkulatu:

a) $\log(0{,}0001)$; b) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$; c) $\log_3\left(\sqrt[5]{3}\right)$; d) $\log_5\left(\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{5}}\right)$; e) $\ln\frac{1}{e^2}$

Soluzioak: a) –4 ; b) –3/2 ; c) 1/5 ; d) 7/6 e) –2

2. log 2 = 0,3010 bada, zenbat da $\log\sqrt{0{,}2}$? Eta $\log\sqrt[3]{64}$?

3. Ebatzi ondoko ekuazioak:

a) $\frac{1}{2}\log(2x+3)=\log x$; $b)\log(x-1)+\log(x+6)=\log(3x+2)$

Soluzioak: a) x=3 ; b) x=2

4. Ebatzi ondoko ekuazioak:

$a)\ 10^{x^2-1}=400$; b) $e^{2x}=40$ (sol: x = 1,84)

5. Lortu x-ren balioa ondoko kasuan (erabili logaritmoen propietateak):

$a)\ \ln x=\ln\sqrt{A}+5\ln B-3\ln C$; $b)\ \ln x=\frac{4}{5}\ln A-\ln B+2\ln C-\frac{1}{2}\ln D$

6. Bakterio bat $y=1+e^{x/10}$ funtzioaren arabera ugaltzen da (y:milaka bakterio ; x: orduak).
   a) Zenbat bakterio zeuden hasieran?
   b) Eta handik 10 ordura?
   c) Kalkulatu zenbat denbora beharko duen kopurua bikoizteko.

EKUAZIO LINEALEN SISTEMAK

Ekuazio linealak

Adibidea

"Parisera astebete pasatzera joateak 300 euro balio du. Ikasgelan 5.400 euro bildu baditugu, zenbat lagun joan gaitezke?"

300 x = 5400 Honelako adierazpenari , "ekuazio lineala" deitzen zaio.

Era orokorrean **a.x = c** adierazten da. Zein da soluzioa ? ....

Demagun, baldintza berri hau eransten diogula : ... "*eta gurasoak langabezian dituzten ikasleek 150 baino ez dute ordainduko* ". Orain, hauxe da ekuazioa:

300 x + 150 y = 5400 .

Orokorrean, **a.x + b.y = c**. Zein da soluzioa ? ....

Zenbat eta baldintza gehiago sartu, ekuazioa luzeagoa egiten da .

"*a*" eta "*b*" koefizienteak dira ; "*x*" eta "*y*" ezezagunak dira eta "*c*" gai independentea

Ekuazio sistemak

Adibidea

Hiru "butaka" eta sei "palko" sarrerengatik 150 euro ordaindu dira . Aztertu honako hauek ordaindu diren kasuak ere :

a) Bi butaka eta bi palko sarrerengatik 70 euro
b) Butaka sarrera bat eta bi palkogatik 50 euro ordaindu dira
c) Bi butaka eta lau palko sarrerengatik 110 euro.

Bilatu jarleku bakoitzaren prezioa, posible den kasuetan .

a) $\left.\begin{matrix} 3x+6y=150 \\ 2x+2y=70 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y=50 \\ x+y=35 \end{matrix}\right\}$ **x = 20** **y = 15**

Soluzio bakarra. Sistema bateragarri determinatua

b) $\left.\begin{matrix} 3x+6y=150 \\ x+2y=50 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y=50 \\ x+2y=50 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ **x = 5000 - 2y**

Infinitu soluzio. Sistema bateragarri indeterminatua

c) $\left.\begin{matrix} 3x+6y=150 \\ 2x+4y=110 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y=50 \\ x+2y=55 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ **0 = 5 ?**

Ez du soluziorik. Sistema bateraezina

Sistema baliokideak

Soluzio berberak dituzten ekuazio-sistemak sistema baliokideak direla esaten da.

Zein transformazio erabil ditzakegu sistema batetik beste sistema baliokide batera pasatzeko?

- Ekuazioen ordena aldatzea: $\left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ x+2y=15 \end{array}\right\}$ eta $\left.\begin{array}{l} x+2y=15 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$ baliokideak dira.

- Ekuazio baten atal biak zero ez den zenbaki erreal batez biderkatzea:
$\left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ x+2y=15 \end{array}\right\}$ eta $\left.\begin{array}{l} 2x-2y=4 \\ x+2y=15 \end{array}\right\}$ baliokideak dira.

- Ekuazio bati zenbaki erreal batez biderkaturiko beste ekuazio bat batzea:
$\left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ x+2y=15 \end{array}\right\}$ eta $\left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ 4x-y=21 \end{array}\right\}$ baliokideak dira zeren $ek_2 \to ek_2 + 3ek_1$ baita.

<u>Gauss-en metodoa</u>

Ekuazio linealen sistemak ebazteko, Gauss-en metodoa erabil daiteke. Metodo horren bidez, hasierako sistema *sistema mailakatu baliokide* batean bihurtzen da, eta, ondoren, oso erraz ebatzi ahal da.

Adibidez, ikus dezagun nola ebatz daitekeen $\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=5 \\ x-y+2z=-3 \\ 3x-2y+z=-2 \end{array}\right\}$ sistema.

Pausuak:

I) Ezezagunen koefizienteekin eta gai independenteekin ondoko matrizea (koadroa) eratzen dugu: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$

Lehen zutabea *x*-ri dagokio, 2.a *y*-ri, 3. zutabea *z*-ri eta 4.a gai independentei.

x ezezagunak lehen errenkadan duen koefizientea 2 da, baina hobe litzateke 1 baliokoa izatea, kalkuluak errazagoak izan daitezen. Horretarako, lekuz trukatuko ditugu lehenengo bi errenkadak; hau da:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

II) Lor dezagun matrize triangeluar baliokide bat ; hau da, **diagonal nagusiaren azpiko elementu guztiak 0 izatea lortuko dugu**. Horretarako:

Bigarren errenkadari –2 balioaz biderkaturiko lehenengo errenkada gehituko diogu, eta hirugarrenari –3 balioaz biderkaturiko lehenengoa; hau da:

$$\begin{array}{l} E_2 \to E_2 - 2E_1 \\ E_3 \to E_3 - 3E_1 \end{array} \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \end{array}\right)$$

Hirugarren errenkada eta bigarren zutabeko balioa, 1 dena, 0 bihurtzea gelditzen zaigu. Kalkuluak errazteko asmoz, hobe dugu beren gaineko balioa 3 izan beharrean 1 edo –1 izatea. Kasu honetan, hori lortzeko nahikoa da azken bi errenkadak trukatzea; hau da:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \end{array}\right)$$

Orain, azken errekadaren ordez, hirugarren errenkada gehi bigarrena bider –3 idatziko dugu:

$$E_3 \to E_3 - 3E_2 \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{array}\right)$$

III) Lortutako matrize triangeluar horri dagokion ekuazio-sistema hauxe da:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 2z = -3 \\ y - 5z = 7 \\ 10z = -10 \end{array}\right\}$$

Sistema hori hasieran emandako sistemaren baliokide da.

Era horretan, sistema mailakatu bat lortu dugu. Soluzioa aurkitzeko, azken ekuaziotik hasiko gara ebazten; ondoren, 2. ekuaziora pasatuko gara, eta, azkenean 1.ra. Hau da, **z** = **-1**

y = 7+5(-1) = **2**

x = -3 +2 – 2 (-1) = **1**

Soluzio bakarra: **(1 , 2 , -1)**

Sistema bateragarri zehatza

2. adibidea

Gauss-en metodoaren aplikazioan hainbat egoera ager daitezke. Azter dezagun zer gertatzen den errenkadekin eragiketak egitean elementu guztiak nuluak dituen errenkada bat azaltzen denean; hau da: $\left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Adibidez, ebatz dezagun $\left.\begin{array}{l} 2x + y \quad = 4 \\ x + \quad z = 4 \\ 3x + y + z = 8 \end{array}\right\}$ sistema

I) Adierazpen matriziala: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right)$

Truka ditzagun lehen eta gigarren errenkadak, goi-ezkerreko erpineko balioa 1 izan dadin:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

II) Egin ditzagun 0 lehen zutabeko 2 eta 3 balioak. Horretarako,

$$\begin{array}{l} E_2 \to E_2 - 2E_1 \\ E_3 \to E_3 - 3E_1 \end{array} \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Hirugarren errenkada eta bigarren zutabeko 1 balioa 0 bihurtzeko, nahikoa da hirugarren errenkadari bigarrena kentzea: $E_3 \to E_3 - E_2$. Honela gelditzen zaigu matrizea:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Azken errenkadak ez du inolako garrantzirik sistema ebazteko eta, horregatik ezabatu egingo dugu: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$

III) Matrize horri dagokion sitema hauxe da: $\left.\begin{array}{r} x + \quad z = 4 \\ y - 2z = -4 \end{array}\right\}$

Kasu honetan, sistemak **2** ekuazio eta **3** ezezagun ditu. **Sistema bateragarri indeterminatua da; infinitu soluzio ditu.**

Soluzioak lortzeko, prozedura hau erabiliko dugu:

Azken ekuazioan ezezagun bat bakanduko dugu (adibidez, *y*), eta beste ezezaguna (*z*) parametro lez adieraziko dugu letra greko batekin (λ, μ ...). Hau da:

$z = \lambda$
$y = 2\lambda - 4$

Azkenik, lehenengo ekuazioan *x* ezezaguna kalkulatuko dugu: $x = 4 - z = 4 - \lambda$

> λ parametroa duten gai guztiak ekuazioen bigarren atalera pasatu behar dira

Soluzioa: $(4-\lambda \ , \ 2\lambda - 4 \ , \ \lambda)$

3. adibidea.

Ebatz dezagun $\left.\begin{array}{l} x-2y+3z = -3 \\ 2x+y = 2 \\ -x-8y+9z = 3 \end{array}\right\}$ sistema

Ekuazio-sistema horrekin elkarturiko matrize zabaldua hauxe da:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -8 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

Gauss-en metodo aplikatuko dugu:

$$\begin{array}{l} E_2 \to E_2 - 2E_1 \\ E_3 \to E_3 + E_1 \end{array} \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -6 & 8 \\ 0 & -10 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

$$E_3 \to E_3 + 2E_2 \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right)$$

Hirugarren errenkada ekuazio honi dagokio: 0x + 0y + 0z = 16 $\to$ 0 = 16

Beraz, **sistema bateraezina** da.

Laburpena

Sistemaren ebazpenean hiru kasu dira posible. Taula honetan biltzen ditugu hirurak:

Sistema	Lortzen den matrize triangeluarra (adibidea)	Soluzioak
Bateragarri determinatua	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$	Soluzio bakarra 2z = 6 $\rightarrow$ z=3 y-3=2 $\rightarrow$ y=5 x-5+2.3 = 9 $\rightarrow$ x= 10
Bateragarri indeterminatua	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ Ekuazio baino ezezagun gehiago.	Infinitu soluzio $z = \lambda$ $y = 2 + z = 2 + \lambda$ $x = 9 + (2 + \lambda) - 2\lambda = 11 - \lambda$
Bateraezina	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$	0 = 6 ?? Ez du soluziorik

Ariketa ebatziak

1. Sailkatu eta ebatzi, posible bada sistema hau: $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ x+y-2z=-3 \\ -2x+5y-z=5 \\ 3x-2y+z=2 \end{array}\right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[E_4 \to E_4 - 3E_1]{\substack{E_2 \to E_2 - E_1 \\ E_3 \to E_3 + 2E_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{E_3 \to E_3 - 3E_2 \\ E_4 \to E_4 - 4E_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_4 \to E_4 - E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 \to -\frac{1}{6}E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Laugarren errenkada alde batera utz dezakegu: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Sistema baliokide mailakatua hauxe da: $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ y+z=5 \\ z=3 \end{array}\right\}$

Soluzioa: **z = 3**
y + 3 = 5 → **y=2**
x – 2(2) + 3 = 0 → **x = 1**

Soluzio bakarra.
Sistema bateragarri determinatua

2. Sailkatu eta ebatzi, posible bada sistema hau: $\left.\begin{array}{l} x-y+2z+3t=1 \\ 2x+3y-z+t=-3 \\ x+y+z+t=0 \end{array}\right\}$

Ebazpena:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 \to E_3 - E_1]{E_2 \to E_2 - 2E_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_2 \to \frac{1}{5}E_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 \to E_3 - 2E_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sistema baliokidea: $\left.\begin{array}{r} x-y+2z+3t=1 \\ y-z-t=-1 \\ z \quad =1 \end{array}\right\}$

Ekuazio-sistema horrek ekuazio baino ezezagun gehiago ditu; **bateragarri indeterminatua** da. **Infinitu soluzio ditu**

Soluzioak:

Higarren ekuazioan $\boxed{z = 1}$ ateratzen da.

Bigarren ekuazioan $y - 1 - t = -1 \;\rightarrow\; y = t$

t aldagaia λ parametroaren bidez adieraziko dugu; beraz $\boxed{t = \lambda}$. Horrela, $\boxed{y = \lambda}$

Lehenengo ekuazioan $x - \lambda + 2.1 + 3\lambda = 1 \;\rightarrow\; \boxed{x = -1 - 2\lambda}$

Soluzioa: $(-1-2\lambda\;,\;\lambda\;,\;\lambda\;,\;1)$

Ariketak

1. Emanik ekuazio-sistema hau: $\left.\begin{array}{l} 3x-y+2z=1 \\ x+y+z=3 \\ 2x-2y-3z=-2 \end{array}\right\}$ aztertu

   hirukote hauetatik zein diren sistemaren soluzio:

   a) (4,0,3)   b) (1,-1,2)   c) (1,2,0)

2. Sailkatu eta ebatzi, posible bada, honako sistema hauek:

$a)\ \left.\begin{array}{l} 2x+3y-z=15 \\ 2x-y+z=-3 \\ x-y \qquad =0 \end{array}\right\}$ $\quad b)\ \left.\begin{array}{l} -2x-4y=2 \\ -8x-16y=1 \end{array}\right\}$ $\quad c)\ \left.\begin{array}{l} x+y-z=10 \\ x-y+z=5 \end{array}\right\}$

$f)\ \left.\begin{array}{l} x-4y=-5 \\ 2x+y=-1 \\ 2x-8y=-10 \end{array}\right\}$ $\quad g)\ \left.\begin{array}{l} 2x-y+z=1 \\ x-2y+3z=4 \\ x+y+3z=0 \end{array}\right\}$ $\quad h)\ \left.\begin{array}{l} 3x+2y-z=1 \\ -x+3y-2z=-1 \\ x+5y-3z=0 \end{array}\right\}$

3. Sailkatu eta ebatzi, posible bada, honako sistema hauek:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+5y=16 \\ x+3y-2z=-2 \\ x+z=4 \end{array}\right\}$ (Baterag. Det: x=-2, y=4, z=6)

b) $\left.\begin{array}{l} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=3 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\}$ (Bateraezina)

c) $\left.\begin{array}{r} 2x+y+3z=0 \\ 4x+2y-z=0 \\ 6x+3y+2z=0 \end{array}\right\}$ (Baterag indet: $x=-\dfrac{\lambda}{2}$; $y=\lambda$; $z=0$)

d) $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=9 \\ x-y-z=-10 \\ 2x-y+z=5 \end{array}\right\}$ (Baterag. det: x=-1 , y=1 , z=8)

e) $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=3 \\ 2x-y+z=-1 \end{array}\right\}$ (Baterag. indet: $x=3\lambda-4$, $y=\lambda$, $z=7-5\lambda$)

f) $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x+y+2z=2 \\ 2x+y+z=11 \\ y+z=7 \end{array}\right\}$ (Bateraezina)

g) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=3 \\ x+y+z=1 \\ 2x-3y+z=-1 \end{array}\right\}$ (Baterag det: x=2/3 , y=2/3 , z=-1/3)

4. Mirenek 60 euro dauzka kirol erropatan gastatzeko. Gustatu zaizkion galtzerdiak, prakak eta kamiseta erosiko balitu 2 euroko zorra utziko luke dendan; galtzerdiak eta prakak eramanez gero 29 euro edukiko lituzke soberan; eta prakak eta kamiseta erosita euro 1 geratuko litzaioke soberan. Zein da erropa bakoitzaren prezioa?

5. Kutxa batean hiru motako txanponak daude: bi eurokoak, euro batekoak eta 50 zentimokoak. Guztira 33 txanpon daudela eta guztien balioa 40 euro dela jakina da.
Mota bakoitzeko txanpon-kopurua zehaztea posible al da?
Erantzuna baiezkoa izatekotan aurkitu mota bakoitzeko txanpon kopurua
Erantzuna ezezkoa izatekotan, aurkitu aipatutako moduko 33 txanponeko bi multzo desberdin gutxienez, txanponen balioa bi kasuetan 40 euro delarik.

ZENBAKI ERREALAK

Tarteak

Zenbaki errealen multzoan azpimultzoak defini daitezke; esaterako, zenbaki razionalek osatutakoa.

$\Re$ erabat ordenaturiko multzoa denez, tarteak eta inguruneak deritzen beste azpimultzo mota batzuk defini ditzakegu.

Adibideak

1- Idatz itzazu tarte eran jarraian definitzen diren multzoak:

a) $\{x \in \Re / x < -3\}$ b)$\{x \in \Re / -3 < x < 3\}$

c) $\{x \in \Re / -3 \le x < 2\}$

Multzoen arteko eragiketak

A eta B multzoen bildura (A $\cup$ B) A-ko elementu guztiek eta B-ko guztiek osatzen duten multzoa da.

A eta B multzoen ebakidura (A $\cap$B) A-k eta B-k komunak dituzten elementu guztiek osatutakoa da.

(Multzo hutsa, ϕ, elementurik ez daukana da.)

Ariketak

Zuzen errealean adierazi eta posible denean, tarte bakar baten bidez idatzi:

a) (-5 , 3) $\cap$ (1 , 8) b) (-4 , 6) $\cup$ [0 , 8)

c) [-3 , -1] $\cap$ (-2 , 5] d) [-3 , 0) $\cup$[-2 , ∞)

Zenbaki erreal baten balio absolutua

a zenbaki erreal baten balio absolutua **a** zenbaki bera izango da positiboa den kasuetan, edo alderantzizkoa, **-a** , negatiboa den kasuetan.

$$|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0 \quad bada \\ -a, & a < 0 \quad bada \end{cases}$$

Adibideak

1- x-ren zein baliorekin betetzen dira hurrengo berdintza hauek?

a) $|x|$ =3 b) $|x|$ = 0 c)) $|x|$ = $\sqrt{3}$

Ebazpena:

a) x = 3 eta
-x = 3 $\Rightarrow$ x = -3

b) x = 0 eta
-x = 0 $\Rightarrow$ x = 0

c) x = $\sqrt{3}$ eta
-x = $\sqrt{3} \Rightarrow$ x = -$\sqrt{3}$

2- x-ren zein baliorekin betetzen dira hurrengo desberdintza hauek?

a) $|x| < 3$ b) $|x| \geq 3$ c) $|x| \leq 3$

Ebazpena:

a) $\begin{cases} x < 3 & eta \\ -x < 3 \Rightarrow & x > -3 \end{cases} \Rightarrow -3 < x < 3$ Emaitza (-3, 3)

b) $\begin{cases} x \geq 3 & eta \\ -x \geq 3 \Rightarrow & x \leq -3 \end{cases} \Rightarrow$ Emaitza $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

c) $\begin{cases} x \leq 3 & eta \\ -x \leq 3 \Rightarrow & x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$ Emaitza [-3 , 3]

Bi zenbaki errealen arteko distantzia

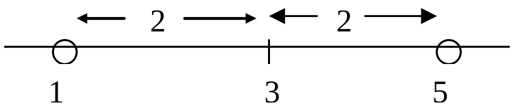
Bi zenbaki errealen arteko distantzia, bi zenbaki horien arteko kenduraren balio absolutua da; ha da: $d\ (a, b) = |\ b - a\ |$

<u>Distantzia erdiko puntu batera</u>

Adibideak:

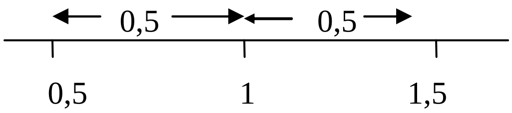
a) $|x - 3| < 2$

Zeintzu zenbaki dira 3-ra arteko distantzia 2 baino txikiagoa dena ?



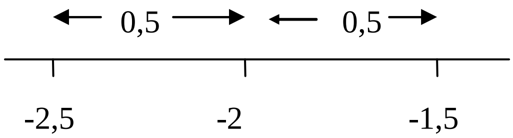
Soluzioa: (1 , 5)

b) $|x - 1| \leq 0{,}5$



Soluzioa: [0'5 , 1'5]

c) $|x + 2| \leq 0{,}5$ edo $|x - (-2)| \leq 0{,}5$



Soluzioa: (-2'5 , -1'5)

Ariketa

Aurkitu x-ren balioak ondoko adierazpenetan:

$|x - 7| < 3$; $|x| \leq 1$; $|x - 7| > 3$; $|x + 3| < 2$; $|x| > 3$

ARIKETAK

1- Adierazi tarte moduan eta zuzen errealean ondorengo zenbaki multzoak:

a) 3 baino zenbaki handiagoak
b) $\{x \in \Re / 2 \leq x < 5\}$
d) $\{x \in \Re / 3 \leq x \leq 7\}$

2- Adierazi hurrengo esaldi hau desberdintza eta tarte baten bitartez:

"x zenbakia -3 baino handiagoa edo berdina eta 5 baino txikiagoa da."

3- Idatzi tarte hauetako x zenbakiak egiaztatzen dituen desberdintzak:

a) $[-2, 7]$ b) $[13, \infty)$ c) $(-\infty, 0)$

d) $(-3, 0]$ e) $[\frac{3}{2}, 6)$ f) $(-\infty, \infty)$

4- Adierazi tarteak erabiliz, hurrengo zenbaki multzoa:

"1 baino zenbaki txikiagoa, 0 kenduta"

5- Adierazi zuzen errealean honako zenbaki multzo hauek:

a) $(-3, -1)$ b) $[4, \infty)$ c) $\{x \in \Re / -2 \leq x < 5\}$

d) $[-2, 5) \cup (5, 7]$ e) $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ f) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

6- Idatzi tarte bidez deberdintza hauek egiaztatzen dituzten zenbakiak:

a) $x<3$ edo $x \geq 5$
b) $x>0$ eta $x<4$

7- Aurkitu x-ren zein baliok beteko duten hau:

a) $|x| \leq 7$;b) $|x| \geq 6$; c) $|x-5| < 2$; d) $|x+1| < 2$; e) $|x-a| < \varepsilon$

ZENBAKI ERREALEN SEGIDAK

Definizioa

Zenbaki errealen segidak **N** eta **R**-ren arteko aplikazioak dira. a_n-ren bidez adierazten dira.

$$
\begin{array}{lcl}
N & \xrightarrow{f} & R \\
1 & \longrightarrow & a_1 \\
2 & \longrightarrow & a_2 \\
3 & \longrightarrow & a_3 \\
\text{-------------------} & & \\
n & \longrightarrow & f(n) = a_n
\end{array}
$$

a_n gai orokorra deitzen da. Lehenengo gaia a_1 , bigarrena a_2 , e.a.

Adibideak

a) 2, 4, 6, ... segidaren gai orokorra $a_n = 2n$ da. $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, ...
b) 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, ... segidaren gai orokorra $a_n = \frac{1}{n}$ da. $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ...
c) 0, 1, 2, ... segidaren gai orokorra $a_n = n-1$ da. $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, ...

Gai orokorraren kalkulua

Normalean zaila izaten da kalkultzea. Badira bi segida mota bereziak, zeinentzat kalkulua erregela batzuren bidez egiten den; baina orain gure habilidadeari ezker asmatu beharko ditugu.

Ariketak

1- Idatzi ondorengo segiden gai orokorrak:
   a) –1, -4, -9, -16, ...
   b) $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots$
   c) 2, 5, 10, 17, ...
   d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}. \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \ldots$

2- Ondorengo segidetan kalkulatu a_1, a_3, a_{10}, a_{2n}, a_{n+1}
   a) $a_n = \frac{1}{n+1}$ b) $a_n = \sqrt{n^2-1}$ c) $a_n = \frac{4n-1}{2-n}$

Segida gorakorrak eta beherakorrak

a_n segida gorakorra izango da, edozein n-rentzat $a_n \leq a_{n+1}$ betetzen bada.

a_n beherakorra izango da, edozein n-rentzat $a_n \leq a_{n+1}$ betetzen bada.

Segida baten gai guztiak berdinak baldin badira, segida konstantea deitzen da.

Hau kontutan hartuta, segida bat gorakorra ala beherakorra den frogatzeko, $a_{n+1} - a_n$ kenketaren ikurra zein den jakitea nahikoa da.

$a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow a_n$ gorakorra da
$a_{n+1} - a_n < 0 \Rightarrow a_n$ beherakorra da

Adibidea

Frogatu ondorengo segida gorakorra ala beherakorra den $a_n = \frac{1}{n}$.

- Lehenengo a_{n+1} kalkulatuko dugu: $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$
- Ondoren $a_{n+1} - a_n$ kenketa kalkulatuko dugu, hau da : $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$$\frac{n \cdot 1 - (n+1) \cdot 1}{(n+1) \cdot n} = \frac{n - n - 1}{(n+1) \cdot n} = \boxed{\frac{-1}{(n+1) \cdot n}}$$

- Orain emaitza honen ikurra aztertu behar da.
  Zenbakitzailea negatiboa da (-1).
  Izendatzailea positiboa (n zenbaki arrunta da, beraz n eta n+1 positiboak dira. Ondorioz (n+1)n positiboa da.

$\Rightarrow \frac{negatiboa}{positiboa} = negatiboa$, hau da

- $a_{n+1} - a_n < 0 \Rightarrow a_n$ segida beherakorra da.

Ariketak

Frogatu ondorengo segidak gorakor edo beherakorrak diren:

a) $a_n = 2n$ b) $a_n = \frac{n+1}{n}$ d) $a_n = n^2 + 5n$ e) $a_n = \frac{n+2}{3+n}$

Segida bornatuak

$\{a_n\}$ segidak goi bornea izango du $\forall$ n-rentzat $M \geq a_n$ betetzen duen M-rik baldin badago.

$\{a_n\}$ segidak behe bornea izango du $\forall$ n-rentzat $m \leq a_n$ betetzen duen m-rik baldin badago.

$\{a_n\}$ bornatua da, alde bietatik bornatua bada, hau da $\forall$ n-rentzat $m \leq a_n \leq M$.

Adibideak

Aurkitu ondorengo segiden behe eta goi borneak:

a) {2, 4, 6, 8,…}	M ez dago	m = 2
b) {1, 4, 9, 16,…}	M ez dago	m = 1
c) {-2, -4, -6, -8,…}	M = -2	m ez dago
d) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right\}$	$M = \frac{1}{2}$	m = 0

Segiden arteko eragiketak

- Batuketa

(a_n) eta (b_n) bi segida izanik: $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$

- Zenbaki bat eta segida baten arteko biderketa

k zenbaki bat eta (a_n) segida bat izanik: $k \cdot (a_n) = (k \cdot a_n)$

(a_n) eta (b_n) bi segida izanik:

- Biderketa

$$(a_n)\cdot(b_n) = (a_n \cdot b_n)$$

- Zatiketa

$$(a_n) \div (b_n) = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

- Berreketa

$$(a_n)^{(b_n)} = \left(a_n^{\,b_n}\right)$$

SEGIDEN LIMITEAK

Hainbat segidatako gaiak gero eta gehiago hurbiltzen dira balio jakin batera, eta horri **segidaren limitea** esaten zaio; balio hori $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$-ren bidez adierazten dugu, edo lim a_n –ren bidez, besterik gabe.

Ikus ditzagun bi adibide:

I) Gai orokortzat $a_n = \frac{1}{n}$ duen segida.

Hona segida horretako gaiak: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, …, $a_{1000} = \frac{1}{1000}$, …

Argi ikus daiteke balioak gero eta hurbilago daudela 0 baliotik; beraz *lim* $\frac{1}{n}$ *= 0*

II) Gai orokortzat $a_n = \frac{2n}{n+1}$ duen segida.

$a_1 = 1$; $a_2 = \frac{4}{3} = 1'\widehat{3}$; $a_3 = 1'5$; $a_{10} = 1'818...$; $a_{199} = 1'98$; $a_{1990} = 1'998$

Balioak gero eta hurbilago daude 2 baliotik; beraz *lim* $\frac{2n}{n+1}$ *= 2*

Limite finitua duten segidei **segida konbergente** esaten zaie, eta limiterik ez dutenei edo limite infinitua dutenei **segida dibergente** deitzen zaie.

Segiden eragiketekin erlazionaturiko propietateak

Zenbait segiden limiteak kalkulatzeko propietate hauek erabili beharko dira.

- lim $(a_n + b_n)$ = lim a_n + lim b_n
- lim $(a_n - b_n)$ = lim a_n - lim b_n
- $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$
- lim (a_n / b_n) = lim a_n / limb_n baldin $b_n \neq 0$
- lim $((k \cdot a_n) = k \cdot \lim a_n$
- lim $a_n^{b_n}$ =(lim $a_n)^{\lim b_n}$
- lim $(a_n)^k$ = (lim $a_n)^k$
- lim $\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n}$

Segiden limiteen kalkulua

Ikus dezagun, ondoren, zenbait segidaren limiteak nola kalkulatzen diren:

- **Segida konstante baten limitea**
  Baldin a_n = k bada, k$\in \Re$ izanik, orduan: lim a_n = k.
- **Segida polinomiko baten limitea**
  Maila altueneko monomioa bakarrik hartzen da kontutan.
  - Monomioa positiboa bada, limitea $+\infty$ da eta
  - Monomioa negatiboa bada, limitea $-\infty$.

  Adibideak

  a) $\lim(7n^3+1)=\infty$ b) $\lim\left(-2n^2+n\right)=-\infty$

- **Zenbakitzaile konstanteko segida arrazional baten limitea**
  Baldin $a_n = \dfrac{k}{b\cdot n^p}$ bada, k$\in \Re$ eta p$\in \mathrm{N}$ izanik, orduan lim a_n = 0

  Adibideak

  a) lim $\dfrac{3}{2n^4}$ = 0 b) lim $\dfrac{-2}{5n^2}$ = 0

Batzuetan, limiteen propietateak erabilita, honelako adierazpenak ager daitezke: $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, 1^∞, edo $\infty\cdot 0$. Kasu horietan, limitea *indeterminazio* bat dela esango dugu, hau da, ezin dugu zuzenean limitearen emaitza eman, eta beste tresna batzuk erabili behar ditugu hura kalkulatzeko.

Adibidez, $\dfrac{\infty}{\infty}$ indeterminazioa polinomioen zatidura denean agertzen da, eta emaitza zenbakitzailearen mailaren eta izendatzailearen mailaren araberakoa da. Azter dezagun kasu hori:

- **Polinomioen zatidura baten limitea**
  Baldin $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ bada, P(n) eta Q(n) polinomioak izanik, segidaren limitea zenbakitzailearen eta izendatzailearen mailarik handieneko monomioen arteko zatiduraren limitea da.
  (Praktikan, lehenengo mailarik handieneko monomioak hartuta geratzen den zatidura sinplifikatu egin behar da eta ondoren, limitea kalkulatu).

  Adibideak

  a) $\lim\left(\dfrac{6n^2+n-2}{2n^2+1}\right)=\lim\dfrac{6n^2}{2n^2}=\lim 3=3$

b) $\lim \dfrac{1-n^2}{n} = \lim \dfrac{-n^2}{n} = \lim(-n) = -\infty$

c) $\lim \dfrac{n^2+6n-2}{3n^3+1} = \lim \dfrac{n^2}{3n^3} = \lim \dfrac{1}{3n} = 0$

d) $\lim \dfrac{3n+1}{\sqrt{4n^2+1}+2n} = \lim \dfrac{3n}{\sqrt{4n^2}} = \lim \dfrac{3n}{2n} = \dfrac{3}{2}$

e) $\lim \dfrac{2n^2+5n}{\sqrt{3n^5+2n}+\sqrt{n^3}} = \lim \dfrac{2n^2}{\sqrt{3n^5}} = \lim \dfrac{2n^2}{n^2\sqrt{3n}} = \lim \dfrac{2}{\sqrt{3n}} = \dfrac{2}{\infty} = 0$

f) $\lim \dfrac{5-3n^2+4n}{\sqrt{2n^2-1}+n} = \lim \dfrac{-3n^2}{n\sqrt{2}+n} = \lim \dfrac{-3n^2}{n(\sqrt{2}+1)} = \lim \dfrac{-3n}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{-\infty}{\sqrt{2}+1} = -\infty$

Indeterminazioak

$\dfrac{\infty}{\infty}$ Kasu horretan ikusi dugu zein den limitea kalkulatzeko metodoa

$\infty-\infty$. Bi kasu:

I) Adibidez, kalkula dezagun $\lim \left(\dfrac{n^2-1}{n} - \dfrac{2n^3+1}{n+1}\right)$

Kasu horietan, limitea kalkulatu aurretik zatikien arteko kenketa egin behar da. Hau da:

$$\lim \left(\frac{n^2-1}{n} - \frac{2n^3+1}{n+1}\right) = \lim \frac{(n^2-1)\cdot(n+1)-(2n^3+1)\cdot n}{n\cdot(n+1)} =$$

$$\lim \frac{(n^3+n^2-n-1)-(2n^4+n)}{n^2+n} = \lim \frac{-2n^4+n^3+n^2-2n-1}{n^2+n} = \lim \frac{-2n^4}{n^2} =$$

$\lim(-2n^2) = -\infty$

Kalkulatu: $\lim\left(\dfrac{n^2+5n}{3-n} - \dfrac{2n^2+2}{n}\right)$

II) Erro karratuak agertzen direnean. Adibidez $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

Horrelakoetan konjokatuaren bidez $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})$ biderkatu eta zatitu egiten da; hau da:

$$\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = \lim \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} =$$

$$\lim \frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \lim \frac{2}{2\cdot\sqrt{n}} = 0$$

Kalkulatu:

lim $\left(\sqrt{n^2+9}-4n\right)$; lim $\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$; lim $\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n}\right)$

- $0\cdot\infty$

  Adibidez, $\lim \frac{n+1}{2n^2}\cdot\frac{n^3}{n}$

  Lehenengo biderketa egin eta gero limitea kalkulatuko dugu:

  $\lim \frac{n+1}{2n^2}\cdot\frac{n^3}{n} = \lim \frac{n^4+n^3}{2n^3} = \lim \frac{n^4}{2n^3} = \lim \frac{n}{2} = \infty$

- 1^∞

"*e*" zenbakia

Idatz ditzagun $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ segidaren zenbait gai:

$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$; $a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2'25$; $a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2'37$

$a_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2'44$; $a_{100} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2'7048$; $a_{1000} = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2'7169$

Segida horren limitea 2,718281... zenbaki irrazionala da eta **e** zenbakia deritzo.

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828...$$

Beste zenbait aplikazio artean, *e* zenbakia 1^∞ motako indeterminazioak kalkulatzeko erabiltzen da.

ARIKETAK

Kalkulatu hurrengo limiteak:

$\lim\ (3 - 4n + 5n^3)$

$\lim\ (3 + 4n - 5n^3)$

$\lim\ (n - 4n^2 + 5n^3)$

$\lim \dfrac{3n+2}{4}$

$\lim \dfrac{2}{4+5n}$

$\lim \dfrac{3n+2}{5n+4}$

$\lim\ 2^{5n}$

$\lim\ 2^{-5n}$

$\lim\ 2^{\frac{1}{n}}$

$\lim \dfrac{n^2+2}{3n-n^2}$

$\lim\ \left(\sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2+2}\right)$

$\lim\ \left(\sqrt{n^4+7} - n^2\right)$

$\lim \left(\dfrac{n^3+3n}{n+1} - \dfrac{n^3-4n}{n}\right)$

$\lim \sqrt{\dfrac{9n-2}{3n-6}}$

$\lim \dfrac{n^2+6n-2}{3n^2+1}$

$\lim \sqrt[3]{\dfrac{n^2+5}{3n^2+6}}$

$\lim \dfrac{n^2+6n-2}{3n^5+1}$

$\lim \dfrac{(n+1)^2-3n}{2-n}$

$\lim \sqrt[3]{\dfrac{2n-3}{2+3n^2}}$

$\lim\ 6^{\frac{n^2+1}{2n}}$

$\lim\ 6^{\frac{n+1}{2n^3}}$

$\lim\ 4^{\frac{n+1}{2n}}$

$\lim \left(\dfrac{n^2+3n}{n+1} \cdot \dfrac{4n}{n^2-1}\right)$

$\lim \left(\dfrac{n+3}{3} - \dfrac{4n^3}{n^2-1}\right)$

TRIGONOMETRIA

Ba al dakizu nola neur daitekeen ibai baten zabalera, alde batetik bestera pasatu gabe? Edo nola neur daitekeen dorre baten altuera, bertara igo gabe?

Galdera horien erantzuna erraz eman daiteke unitate honetan ikusiko ditugun kontzeptu trigonometrikoak aplikatuz.

Angeluen neurketa

Edozein magnitude neurtzeko, unitate bat aukeratu behar dugu. Angeluak neurtzeko gehien erabiltzen diren sistemak hauek dira:

- Sistema hirurogeitarra (Gradu hirurogeitarra)
- Sistema internazionala (Radiana)

I) Neurketak sistema hirurogeitarrean.

Sistema honetan, oinarrizko unitatea **gradu hirurogeitarra** (º) da. Angelu hori angelu zuzenaren laurogeita hamarren partea da.

Angelu txikiak neurtzeko, graduaren azpimultzoak erabiltzen dira:

1 minutu (1’) = graduaren $\frac{1}{60}$

1 segundu (1’’) = minutuaren $\frac{1}{60}$

1º = 60’
1’ = 60’’
1º = 3600’’

Bi forma hauek erabiltzen dira: 24,22º eta 24º 13’ 12’’

Adibidez, pasa ditzagun forma batetik bestera ondoko angeluak: 35º 17’ 26’’ eta 52,42º

35º 17’ 26’’ = $(35 + \frac{17}{60} + \frac{26}{3600})^{\circ} = 35{,}2905^{\circ}$

52,42º = 52º + (0,42 . 60)’ = 52º + 25,2’ = 52º + 25’ + (0,2 . 60)’’ = 52º 25’ 12’’

Kalkulagailua

- Kalkulagailu zientifikoek tekla [º ' '' ←] dute, angeluen adierazpen forma batetik bestera pasatzeko.
  Esate baterako, 2º 15’ 5’’ angelua formaz aldatzeko, honelaxe tekleatuko dugu:

  [2] [º ' '' ←] [15] [º ' '' ←] [5] [º ' '' ←]

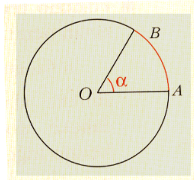
  Pantailan 2.2513889º agertuko zaigu.

- Alderantziz, 16,38º balioko angelua formaz aldatzeko, tekleatu

  [16.38] [INV] [º ' '' ←] Emaitza: 16º 22’ 48’’

II) Neurketak sistema internazionalean (SI).

SI sistemako unitatea **radiana** (rad) da.



α angelu zentralaren balioa radian bat da AB arkuaren luzera eta OA erradioarena berdinak direnean.

$\alpha = 1 \text{ rad} \quad \leftrightarrow \quad \overline{\text{OA}} = AB$ - ren luzera

Zirkunferentziaren luzera $2\pi r$ denez, erradioa baino 2π aldiz luzeagoa da zirkunferentzia. Beraz: $360^{\circ} = 2\pi$ rad

Baliokidetza hori erabiliz, gradutan emaniko magnitudeak radianetan eman daitezke, baita alderantziz ere, jarraiko adibideetan ikus daitekeenez.

<u>1. adibidea</u>. Adierazi radianetan 25,3º angelua.

$$25{,}3^{\circ} \cdot \frac{2\,\pi \text{ rad}}{360^{\circ}} = \frac{25{,}3\,\pi}{180^{\circ}} \text{ rad} = 0{,}44 \text{ rad}$$

<u>2. adibidea.</u> Adierazi sistema hirurogeitarrean $\frac{5\,\pi}{12}$ rad

$$\frac{5\,\pi}{12} \text{ rad} \cdot \frac{360^{\circ}}{2\,\pi \text{ rad}} = 75^{\circ}$$

Ariketa

1. Kalkulagailua erabiliz, aldatu formaz angelu hauek:

   a) 5º 12′ 23′′ ; b) 20,42º

2. Adierazi radianetan:

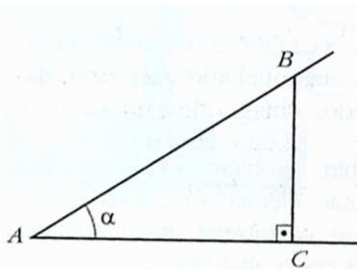
   a) 90º ; b) 60º ; c)270º

   d) 45º ; e) 15,65º ; f) 20º 10′ 10′′

3. Adierazi sistema hirurogeitarrean:

   $a)\ \frac{\pi}{6}$ rad ; $b)\ \frac{5\pi}{3}$ rad ; $c)$ 1,43 rad

<u>Angelu zorrotz baten arrazoi trigonometrikoak</u>



Triangelu horretako α angeluaren arrazoi trigonometrikoak hauexek dira:

Sinua: $\sin\alpha = \dfrac{\text{aurrez aurreko katetoaren luzera}}{\text{hipotenusaren luzera}} = \dfrac{BC}{AB}$

Kosinua: $\cos\alpha = \dfrac{\text{alboko katetoaren luzera}}{\text{hipotenusaren luzera}} = \dfrac{AC}{AB}$

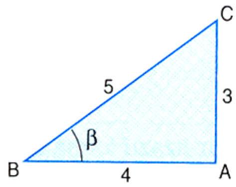
Tangentea: $tg\ \alpha = \dfrac{\text{aurrez aurreko katetoaren luzera}}{\text{alboko katetoaren luzera}} = \dfrac{BC}{AC}$

Bestalde, alderantzizko arrazoi trigonometrikoak ere defini daitezke:

Kosekantea	**Sekantea**	**Kotangentea**
$\cos ec\ \alpha = \dfrac{1}{\sin\ \alpha}$	$\sec\ \alpha = \dfrac{1}{\cos\ \alpha}$	$\cot g\ \alpha = \dfrac{1}{tg\ \alpha}$

Adibidea.

Adierazi irudiko β angeluaren arrazoi trigonometrikoak



$\sin\beta = \dfrac{3}{5}$; $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$; $tg\ \beta = \dfrac{3}{4}$

$\cos ec\ \beta = \dfrac{5}{3}$; $\sec\beta = \dfrac{5}{4}$; $\cot g\ \beta = \dfrac{4}{3}$

Ariketa.
Triangelu zuzen baten katetoak 5 cm eta 9 cm luze dira. Kalkula itzazu triangelu horren angelu zorrotzen arrazoiak

Kalkulagailua

Lehenik eta behin, erabili nahi ditun unitateen motari dagokion **modua** (MODE tekla) aukeratu behar dugu.

DEG: sistema hirurogeitarra

GRA: sistema ehundarra

RAD: radianetan

Adibideak

- sin 53º 15’ lortu nahi badugu, kalkulagailua DEG modura egon behar du; ondoren, honelaxe tekleatuko dugu:

  53 º ‘ ‘’ 15 º ‘ ‘’ sin Pantailan 0.8012538 agertuko da.

  Kosinua edo tangentea kalkulatzeko, sin teklaren ordez cos edo tan

- Halaber, arrazoi baten balioa ezagutuz gero, angeluaren balioa lor dezakegu. Esaterako, sin α = 0,75 bada, honelaxe tekleatuko dugu:

  0.75 INV sin Pantailan 48.590378 agertuko da. Formaz aldatzeko, INV º ‘ ‘’

30º , 45º eta 60º angeluen arrazoi trigonometrikoak.

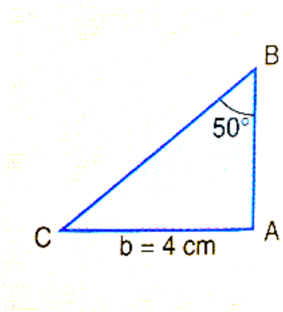
	30º	45º	60º
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Triangelu zuzenen ebazpena

Triangelu zuzenaren alde edo angelu batzuen balioak zein diren jakinez gero, gainerakoak ere lor ditzakegu Pitagoras-en teorema eta arrazoi trigonometrikoak erabiliz; hots, triangelua **ebatz** dezakegu.

1. adibidea

Ebazti triangelu zuzen bat, kateto bat 4 cm-koa eta angelu bat 50º-koa direla kontuan hartuta.



Datuak: b = 4 cm eta $\hat{B} = 50º$

$\hat{C}$ = 90º – $\hat{B}$ = 90º - 50º = 40º

$$\sin 50º = \frac{4}{a} \quad \rightarrow \quad a = \frac{4}{\sin 50º} = 5{,}22\,\text{cm}$$

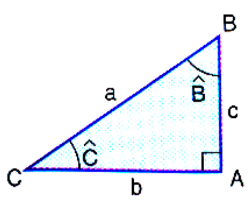
$$tg\, 50º = \frac{4}{c} \quad \rightarrow \quad c = \frac{4}{tg\, 50º} = 3{,}36\,\text{cm}$$

Ariketa

Ebatz ezazu ABC triangelua honako kasu hauetan:

a) a = 5 ; b = 2

b) b = 5 ; $\hat{C}$ = 30º

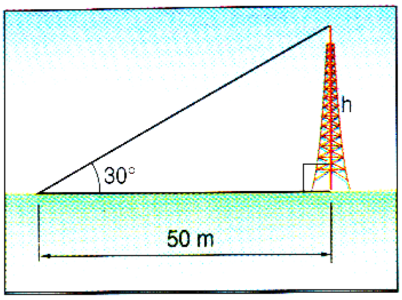


Aplikazioak

Trigonometrian aplikazio nagusienetako bat altueren eta distantzien determinazioa da. Ikus ditzagun zenbait adibide.

2. adibidea.

Antena baten punturik altuenaren gorapen-angelua 30º-koa da, lurrean antenaren oinetik 50 m-ra begiratuz gero. Kalkulatu antenaren altuera.

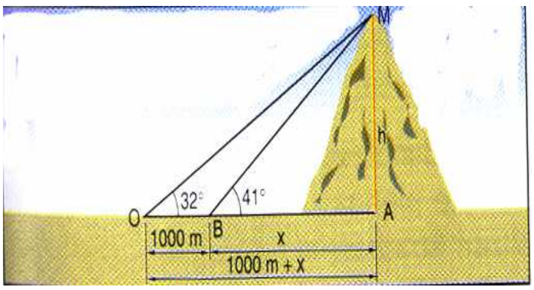


Irudiaren arabera, honako hau dugu:

$$tg\,30^{o} = \frac{h}{50} \quad \rightarrow \quad h = 50.tg\,30^{o} = 50.\frac{\sqrt{3}}{3} = 28,87 \text{ m}$$

3. adibidea.

Mendi baten gailurreko puntuaren gorapen-angelua 32º-koa da puntubatetik begiratuz gero. Mendirantz 1000 m hurbilduz gero, gorapen-angelua 41º-koa da. Zein da mendiaren altuera, puntu biak itsas mailan daudela kontuan hartuta?



OAM triangeluan hauxe betetzen da:

$$tg\,32^{o} = \frac{h}{x+1000}$$

BAM triangeluan hauxe betetzen da:

$$tg\,41^{o} = \frac{h}{x}$$

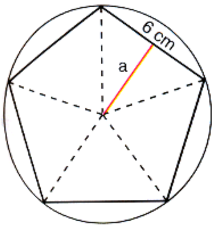
Bi ekuazioek osaturiko sistema ebatziz, mendiaren altuera lortuko dugu, baita gailurraren oinetik zein distantziatara gauden ere.

$$\left.\begin{array}{ll} tg\,32^{o} = \dfrac{h}{x+1000} & \Rightarrow \quad h = (x+1000)\,tg\,32^{o} \\ tg\,41^{o} = \dfrac{h}{x} & \Rightarrow \quad h = x\,tg\,41^{o} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x = 2546,94 \text{ m} \quad ; \quad \text{h} = 2213,29 \text{ m}$$

Metodo horri **behaketa bikoitzaren** metodoa deritzo.

<u>4. adibidea.</u>

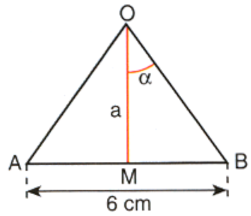
Kalkula ezazu pentagono erregular baten azalera, aldeek 6 cm-ko luzera dutela kontuan izanik



Pentagonoaren azalera: $A = \dfrac{\text{perimetroa . apotema (a)}}{2}$

Pentagonoa bost triangelu isoszeletan zatitu ahal da, eta triangelu horien altuerak poligonoaren apotema da.

Kontsidera dezagun lorturiko triangeluetako bat.



M delakoa *AB* aldeko erdiko puntua da eta α angelua poligonoaren *AOB* angelu zentralaren erdia da.

$$AOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

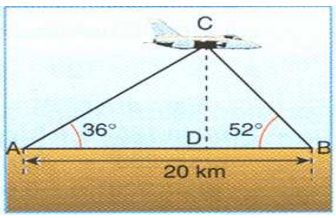
OMB triangeluan $tg\,36^\circ = \dfrac{3}{a} \quad \Rightarrow \quad a = 4{,}13$ cm

Beraz, pentagonoaren azalera honako hau da: $A = \dfrac{6.5\,.\,4{,}13}{2} = 61{,}95\ \text{cm}^2$

Ariketak

1. Kalkula ezazu eraikin baten altuera, bere oinetik 20 m-ra dagoen puntu batetik begiratuta eraikinaren punturik altuenaren gorapen-angelua 50º-koa dela kontuan izanik.

2. 20m-ko distantziara dauden bi radarren bidez, radarren plano bertikalean higitzen ari den hegazkin bat behatzen ari dira, 36º eta 52º-ko angeluez, hurrenez hurren. Zein altueratan doa hegazkina?



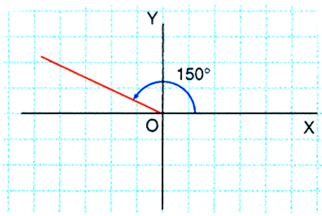
3. Kalkula ezazu 5 cm-ko aldeak dituen hexagono erregular baten azalera.

Angelu orientatuak

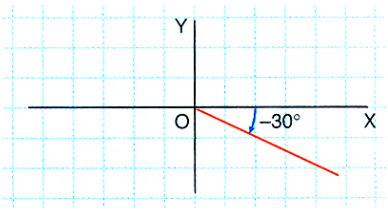
Angelu orientatu bat era grafikoan adierazteko, koordenatu-sistema cartesiarra erabiliko dugu.

Esate baterako:

150º-ko angelua bigarren koadranteko angelu bat da.



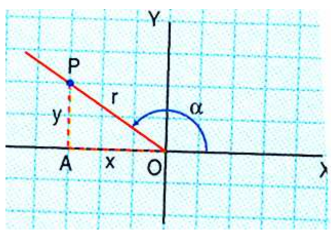
-30º-ko angelua laugarren koadrantekoa da:



Edozein angeluren arrazoi trigonometrikoak

Aurreko orrietan, angelu zorrotzen arrazoi trigonometrikoak nola definitzen diren ikusi dugu. Orain, edozein angeluren arrazoi trigonometrikoak nola defini daitezkeen aztertuko dugu.

Demagun irudian adierazitako α angelua, eta izan bedi P puntua angelu horren mutur-aldearen edozein puntu, bere koordenatuak (x , y) direlarik.



$$\sin\alpha = \frac{\text{ordenatua}}{OP \text{ distantzia}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{abzisa}}{OP \text{ distantzia}} = \frac{x}{r}$$

$$tg\ \alpha = \frac{\text{ordenatua}}{\text{abzisa}} = \frac{y}{x}$$

Zera betetzen da :

$$-1 \le \sin\alpha \le 1$$

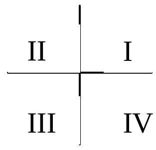
$$-1 \le \cos\alpha \le 1$$

Definizio horiek ez dute zerikusirik aukeratutako *P* puntuarekin.

Arrazoi trigonometrikoen

zeinuak *P* puntuaren koordenatuen zeinuen araberakoak izango dira, edo angelua zein koadrantetakoa den araberakoa.

Koadrantea	**sin**	**cos**	**tg**
Lehenengoa (I)	+	+	+
Bigarrena (II)	+	-	-
Hirugarrena (III)	-	-	+
Laugarrena (IV)	-	+	-

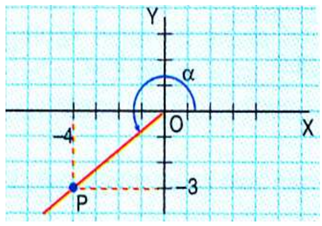


Adibidea

Lortu angelu baten arrazoi trigonometrikoen balioak, beraren mutur-aldea (-4 , -3) puntutik pasatzen dela jakinik.

OAP triangeluan Pitagoras-en teorema aplikatuko dugu *r* kalkulatzeko:

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$



Beraz: $\sin\alpha = \frac{-3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{-4}{5}$; $tg\,\alpha = \frac{3}{4}$

Ariketa

P puntuaren koordenatuak (2 , -3) dira.

a) Zein koadrantekoa da agelu hori?

b) Zeintzu dira angelu horren arrazoi trigonometrikoak?

Zirkunferentzia goniometrikoa

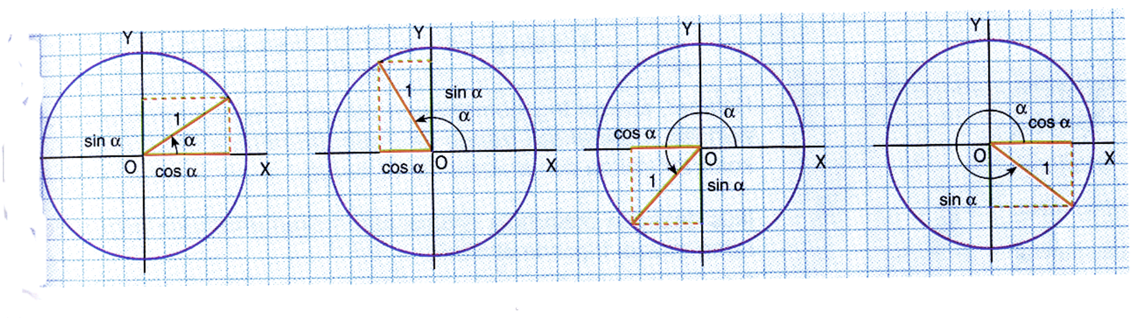
Angelu baten arrazoi trigonometrikoen baloak ez dute zerikusirik horiek definitzeko mutur-aldean harturik puntuarekin.

Horrela, esaterako, zentroa koordenatu-jatorrian izanik 1 balioko erradioa duen zirkunferentzia batean har dezakegu *P* puntu hori.

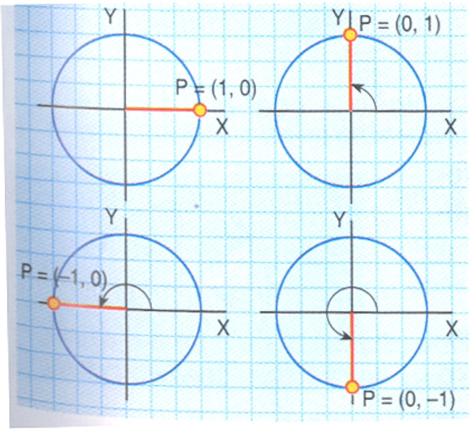
Zirkunferentzia horri **zirkunferentzia goniometrikoa** deritzo.

Era horretan, r = 1 denez, angeluaren sinua eta kosinua P puntuaren ordenatuaren (y) eta abzisaren (x) balio berekoak dira.

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$



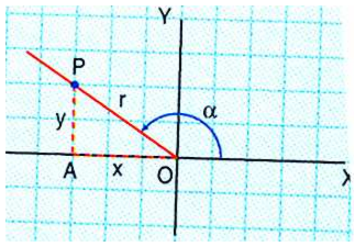
Horrela, oso erraz lortu ahal ditugu zenbait angeluren arrazoi trigonometrikoak, ondoko taulan ikus dezakezunez:



Angelua		P	sin	cos	tg
0º	0 rad	(1 , 0)	0	1	0
90º	$\frac{\pi}{2}$ rad	(0 , 1)	1	0	Ez dago definiturik
180º	π rad	(-1 , 0)	0	-1	0
270º	$\frac{3\pi}{2}$ rad	(0 , -1)	-1	0	Ez dago definiturik

Angelu baten arrazoi trigonometrikoen arteko erlazioak

Ikus dezagun orain nola erlazionatzen diren elkarrekin angelu berberaren arrazoi trigonometrikoak.



$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Izan ere,

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

$tg\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Izan ere, $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{y/r}{x/r} = \dfrac{y}{x} = tg\,\alpha$

$$\cot g\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{tg\,\alpha} \quad ; \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \cos ec\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Gainera, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ bada:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \rightarrow \quad 1 + \cot g^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \cos ec^2\,\alpha$$

eta

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \rightarrow \quad tg^2\,\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

Erlazio horiek erabiliz, edozein angeluren arrazoi trigonometriko guztiak lor ditzakegu, behin horietako bat ezagutuz gero.

1. adibidea

Kalkulatu α *angeluaren arrazoi trigonometrikoak,* $\sin\alpha = 0{,}5$ *dela eta* α *angelua lehenengo koadrantekoa dela jakinik.*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad 0{,}5^2 + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{1-0{,}25} = \sqrt{0{,}75} = \pm 0{,}87$$

α angelua lehenengo kodrantekoa denez, $\cos\alpha = +\,0{,}87$ balioa hartuko dugu.

Ondoren, $tg\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0{,}5}{0{,}87} = 0{,}57$

Azkenik, $\cot g\,\alpha = \ = \dfrac{1}{tg\,\alpha} = \dfrac{1}{0{,}57} = 1{,}75$

$$\sec\alpha = \ = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{0{,}87} = 1{,}15 \quad ; \quad \cos ec\,\alpha = \ = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{0{,}5} = 2$$

2. adibidea

Lor itzazu $tg\,\beta = 1$ *balioari dagozkion arrazoi trigonometrikoak,* β *angelua hirugarren koadrantekoa dela jakinik.*

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \rightarrow \quad 1^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

β angelua hirugarren kodrantekoa denez, $\cos\beta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ balioa hartuko dugu.

Ondoren, $tg\,\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} \quad \rightarrow \quad \sin\beta = tg\,\beta.\cos\beta = 1.(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Azkenik, $\cot g\,\alpha = \ = \dfrac{1}{tg\,\alpha} = \dfrac{1}{1} = 1$

$$\sec\alpha = \ = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \quad ; \quad \cos ec\,\alpha = \ = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

3. adibidea

Froga itzazu ondoko berdintzak:

$a)\ \cot g\,\alpha.\sec\alpha = \cos ec\alpha \qquad ; \qquad b)\ \sec\alpha - \cos\alpha = tg\,\alpha\,.\sin\alpha$

Ebazpena:

$$a)\ \cot g\,\alpha.\sec\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} = \cos ec\,\alpha$$

$$b)\ \sec\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\sin\alpha = tg\,\alpha.\sin\alpha$$

Ariketak

1. Kalkulatu $\sin\alpha$ eta $tg\,\alpha$, baldin $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bada eta α angelua laugarren koadrantekoa dela jakinik.

2. Badakigu $tg\,\beta = -\frac{5}{2}$ eta $\sin\beta \geq 0$ direla. Adieraz ezazu zein koadrantekoa den β angelua eta lor itzazu β-ren gainontzeko arrazoi trigonometrikoak.

3. $\cos ec\alpha = -2$ bada, eta α angelua hirugarren koadrantekoa dela jakinik, kalkula itzazu $\cos\alpha$ eta $\cot g\,\alpha$

4. Badakigu $\cot\ g\ \alpha = -\frac{1}{3}$ eta $\cos\alpha \geq 0$ direla.Zein koadrantekoa da α angelua? Lor itzazu gainontzeko arrazoi trigonometrikoak.

5. Sinplifika itzazu:

   $a)\ \sin\alpha.\sec\alpha.\cot g\,\alpha$; $b)\ \sin^2\alpha.\sec^2\alpha - \sec^2\alpha$

6. Froga itzazu ondoko berdintzak:

$$a)\ \sin^2\alpha.\frac{1+\cot g^2\alpha}{\cos\alpha} = \sec\alpha$$

$$b)\ \frac{1+tg^2\alpha}{\cot g\,\alpha} = \frac{tg\ \alpha}{\cos^2\alpha}$$

Angelu batzuen arrazoi trigonometrikoen arteko erlazioak

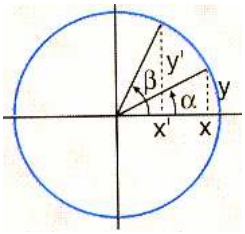
Ondorengo erlazioak oso erabilgarriak dira. Ez dituzu buruz ikasi behar, nahikoa baita ondo ulertzea.

<u>Angelu osagarriak:</u> α eta $90^\circ - \alpha$

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

$tg\,(90^\circ - \alpha) = \cot g\,\alpha$



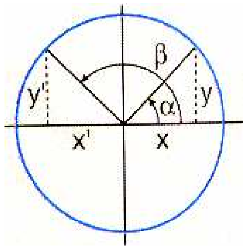
Adibidez,
sin 20º = cos 70º
cos 20º = sin 70º
tg 20º = cotg 70º

<u>Angelu betegarriak:</u> α eta $180^\circ - \alpha$

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

$tg\,(180^\circ - \alpha) = -tg\,\alpha$



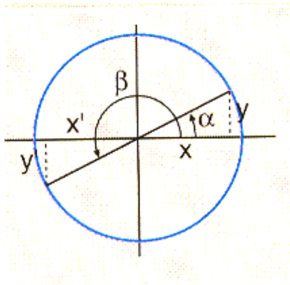
Adibidez,
sin 160º = sin 20º
cos 160º = -cos 20º
tg 160º = - tg 20º

<u>180º-ko aldea duten angeluak</u>: α eta $180^\circ + \alpha$

$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$

$tg\,(180^\circ + \alpha) = tg\,\alpha$



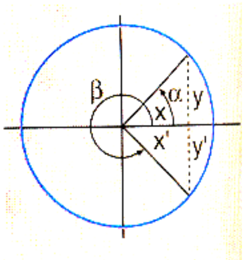
Adibidez,
sin 200º = - sin 20º
cos 200º = - cos 20º
tg 200º = tg 20º

<u>Aurkako angeluak</u>: α eta - α (edo α eta 360º-α)

$\sin(360^\circ - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$tg\,(360^\circ - \alpha) = tg\,(-\alpha) = -tg\,\alpha$



Adibidez,
sin 340º = sin(-20º) = - sin 20º
cos 340º = cos(-20º) = cos 20º
tg 340º = tg (-20º) = - tg 20º

Erlazio horiek erabiliz, edozein angeluren arrazoi trigonometrikoak lor ditzakegu, behin lehenengo koadranteko angeluen arrazoiak ezagutuz gero.

1. adibidea

Kalkulatu 120º, 225º eta 330º-ko angeluen arrazoi trigonometrikoak.

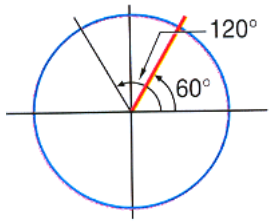
$\boxed{120º}$

Bigarren koadranteko angelu bat da. Beraz:

sin 120º = sin(180º- 60º) = sin 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

cos 120º = -cos(180º- 60º) = -sin 60º = $-\frac{1}{2}$

tg 120º = -tg(180º- 60º) = -tg 60º = $-\sqrt{3}$



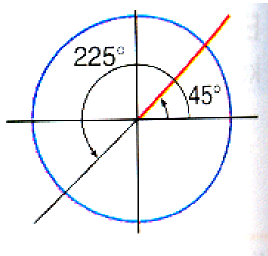
$\boxed{225º}$

Hirugarren koadranteko angelu bat da. Beraz:

sin 225º = sin(180º + 45º) = -sin 45º = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

cos 225º = cos(180º + 45º) = -cos 45º = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

tg 225º = tg(180º + 45º) = tg 45º = 1



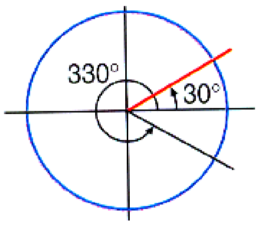
$\boxed{330º}$

Laugarren koadranteko angelu bat da. Beraz:

sin 330º = sin(360º- 30º) = -sin 30º = $-\frac{1}{2}$

cos 330º = cos(360º- 30º) = cos 30º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

tg 330º = -tg(360º- 30º) = -tg 30º = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$



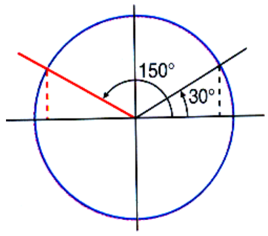
2. adibidea

Bigarren koadranteko zein angeluren sinuak balio du 0,5?

Lehenengo koadrantean, 30º-ko angeluaren sinuak balio du 0,5.

Bestalde, badakigu berdintza hau betetzen dela: sin(180º - α) = sin α

Hortaz, bila gabiltzan angelua 180º - 30º = 150º da.



Angelua 360º baino handiagoa bada, arrazoi trigonometrikoak kalkulatzeko, lehenik lehenengo biraketara laburtu behar dugu angelua.

3. adibidea

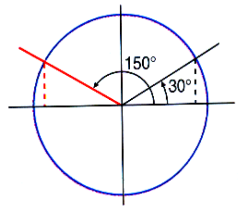
Kalkulatu 1590º-ko angeluaren arrazoi trigonometrikoak

$\frac{1590}{360}$ zatiketa egingo dugu $\rightarrow \quad 1590^{o} = 4.360^{o} + 150^{o}$

1590º-ko angelua 150º-ko angeluaren baliokidea da. Bera, 1590º-ko eta 150º-ko angeluen arrazoi trigonometriakoak balio berekoak dira.

Lehen koadranterako laburpena egingo dugu:

sin 1590º = sin 150º = sin(180º - 30º) = sin 30º = $\frac{1}{2}$



cos 1590º = cos 150º = cos(180º - 30º) = -cos30º = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

tg 1590º = tg 150º = tg(180º - 30º) = -tg30º = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ariketak

1. Lehenengo koadranteko angelu bat erabiliz, kalkula itzazu ondoko angeluen arrazoi trigonometrikoak: 135º, 210º, 300º, 315º, -30º, 1230º, 1575º.

2. Kasu bakoitzean lor itzazu ondoko erlazioak betetzen dituzten 0º eta 360º bitarteko angelu guztiak:

   $a)\sin\alpha = -\frac{1}{2}$; $b)\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $c)\ tg\,\alpha = \sqrt{3}$

3. $tg\,\alpha = \frac{2}{3}$ eta $0^{o} < \alpha < 90^{o}$ direla jakinik, aurki itzazu:

   $a)\sin\alpha$; $b)tg\,(90^{o}-\alpha)$; $c)\cos(180^{o}+\alpha)$; $d)tg\,(-\alpha)$

4. Sinplifika itzazu ondoko adierazpenak:

   $$a)\ \frac{\sin^2(\pi-\alpha)\,.\,\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\,.\,tg\,(\pi+\alpha)}{(1-\cos^2\alpha)\,.\,\sin\alpha\,.\,\sin(2\pi-\alpha)}$$ (Sol: $-\sec\alpha$)

   $$b)\ \frac{tg\,(\pi-\alpha)\,.\,\cot g\,(2\pi-\alpha)}{\sec\alpha\,.\,\cos(\pi-\alpha)}$$ (Sol: -1)

Ariketak

1. Aldatu formaz ondoko angeluak:

$a)\ \alpha = 15^{o}\ 43'\ 21''$; $b)\ \alpha = 36^{o}\ 34'\ 25''$; $c)\ \alpha = 25{,}1646^{o}$; $d)\ \alpha = 42{,}5216^{o}$

Em.: a) 15,7225° ; b) 36,5736° ; c) 25° 9′ 53′′ ; d) 46° 31′ 18′′

2. Adieraz itzazu radianetan.

a) 60° 12′ 45′′ ; b) 126° 12′ 54′′

Em.: a) 1,05 rad ; b) 2,20 rad

3. Adieraz itzazu sistema hirurogeitarrean.

$a)\ \frac{7\pi}{12}\text{rad}$; b) 0,75 rad

Em.: a) 105° ; b) 43°

4. Lortu α angelu zorrotzari dagozkion gainerako arrazoi trigonometrikoak, $tg\,\alpha = 1{,}5$ dela jakinik.

Em.: $\sin\alpha = 0{,}83$; $\cos\alpha = 0{,}55$; $\sec\alpha = 1{,}80$; $\cos ec\,\alpha = 1{,}20$; $\cot g\,\alpha = 0{,}67$

5. Kalkula itzazu $\sin\alpha$ eta $tg\,\alpha$, jakinik ezen $\cos\alpha = -0{,}4$ eta $tg\,\alpha < 0$ direla. Zein koadrantetakoa da α angelua?

Em.: $\sin\alpha = 0{,}92$, $tg\,\alpha = -2{,}29$; bigarren koadrantekoa

6. Froga ezazu ondoko berdintzak:

a) $\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$; $b)\ \frac{1}{1+tg^2\,\alpha} - \frac{1}{1+tg^2\,\beta} = \sin^2\beta - \sin^2\alpha$

7. Adierazi lehen koadranteko angelu baten arrazoi baten funtziopean:

a)cos 135° ; b)tg 210° ; c)sin 150° ; d)sin 315° ; e)cos 300°

8. $\sin\alpha = 0{,}35$ eta α<90° badira, aurki itzazu:

$a)\sin(180^{o}-\alpha)$ $b)\sin(180^{o}+\alpha)$; $c)\sin(360^{o}-\alpha)$; $d)\sin(90^{o}-\alpha)$

9. Badakigu $tg\,\alpha = 2$ eta $\alpha < 90^{o}$ direla.Lor itzazu α,180°- α eta 360° - α angeluen sinuak, kosinuak eta tangenteak.

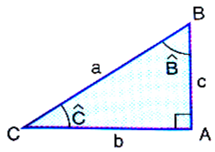
10. Erabili kalkulagailua α angelua kalkulatzeko ondoko kasuetan:

$a)\sin\alpha = -0{,}75 \quad (\alpha < 270^{o})$; $b)\cos\alpha = -0{,}37 \quad (\alpha < 180^{o})$

11. Sinplifika ezazu ondoko adierazpena:

$$tg\,(\frac{\pi}{2}-\alpha)\,.\,tg\,(\pi-\alpha) - \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}$$

12. Ebatzi ondoko triangelu zuzenak. Emandako datuak eta ezezagunak irudian azaldutakoei dagozkie.



a) a = 8 cm,   b = 6 cm

b) a = 10 cm, $\hat{B} = 50^{\circ}$

Em.: a) c = 5,29 cm, $\hat{B} = 48{,}59^{\circ}$, $\hat{C} = 41{,}41^{\circ}$

b = 7,66 cm, $\hat{C} = 40^{\circ}$, c = 6,43 cm

13. Triangelu isoszele baten alde desberdina 8 cm luze da, eta horren aurrez aurreko angelua 24º-koa da. Lor itzazu triangeluaren perimetroa eta azalera.

Em.: P = 46,48 cm ; A = 75,27 cm^2

14. Kalkula ezazu trapezio isoszele baten azalera, oinarriak 24 cm eta 8 cm-koak direla eta barne-angeluetako bat 120º-koa dela jakinik.

Em.: 221,70 cm^2

15. Hexagono erregular baten aldearen luzera 8 cm-koa da. Kalkula ezazu hexagonoan inskribaturiko zirkunferentziaren erradioa.

Em.: 6,93 cm

16. Erronbo baten diagonalak 30 cm eta 16 cm luze dira. Kalkula itzazu erronboaren perimetroa, azalera eta angeluak.

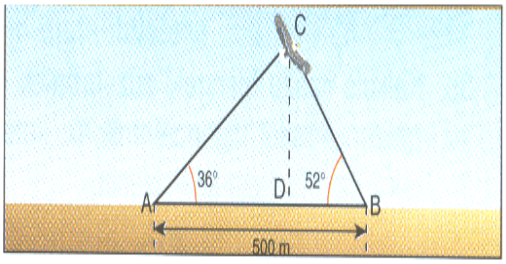
Em.: P =68 cm; A = 240 cm^2; 56,15º , 123,85º

17. Zein angelu eratzen dute eguzki-izpiek horizontalarekin ordu jakin batean, 15 m-ko altzifre baten itzala 6 m luze bada?

Em.: 68,20º

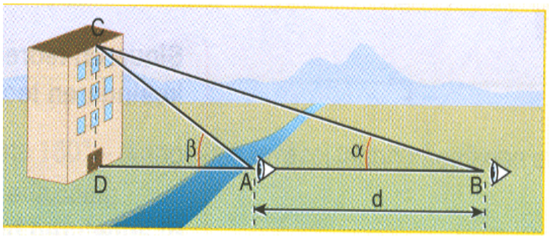
18. Aldiune batean, elkarrengandik 500 m-ra dauden bi behatzailek arrano bat ikusten dute beren gaineko plano bertikalean 36º eta 52º-ko angeluez. Zein altueratan zebilen arranoa?

Em.: 231,81 m



19. Kalkula ezazu irudiko eraikinaren altuera, $\alpha = 15^{\circ}$, $\beta = 20^{\circ}$ eta d = 10 m izanik.

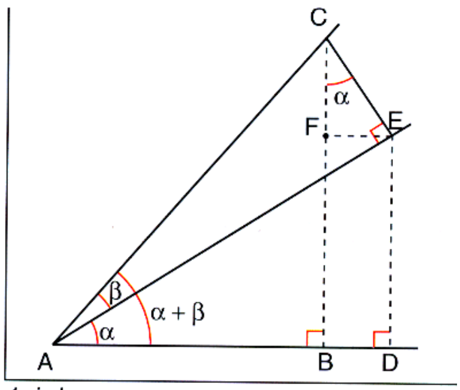
Em.: 10,16 m



Bi angeluren baturaren eta kenduraren arrazoi trigonometrikoak

$\alpha+\beta$ eta $\alpha-\beta$ angeluen arrazoi trigonometrikoak lortuko ditugu, α eta β angeluen arrazoi trigonometrikoen funtzioan. Ondoren, emaitza horiek 2α eta $\dfrac{\alpha}{2}$ angeluen arrazoiak lortzeko erabiliko ditugu.

➢ <u>Bi angeluren baturaren arrazoi trigonometrikoak</u>



1. ird.

Alboko irudian, kontura gaitezkeenez, *EAD* eta *ECF* angeluak berdinak dira, zeren *AD* eta *AE* aldeak *FC* eta *CE* aldeen perpendikularrak baitira, hurrenez hurren.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\,.\cos\beta+\cos\alpha\,.\sin\beta$$

Frogapena:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{BC}{AC}=\frac{BF+FC}{AC}=\frac{DE+FC}{AC}=\frac{DE}{AC}+\frac{FC}{AC}$$

Irudian ikus daitekeenez, $DE=AE\,.\sin\alpha$ eta $FC=CE\,.\cos\alpha$. Beraz:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{AE}{AC}\,.\sin\alpha+\frac{CE}{AC}\,.\cos\alpha$$

Baina $\dfrac{AE}{AC}=\cos\beta$ eta $\dfrac{CE}{AC}=\sin\beta$ dira. Beraz:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\,.\cos\beta+\cos\alpha\,.\sin\beta$$

<u>*1. adibidea*</u>

$$\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\,.\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\,.\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\,.\cos\beta-\sin\alpha\,.\sin\beta$$

Frogapena:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{AB}{AC}=\frac{AD-BD}{AC}=\frac{AD-FE}{AC}=\frac{AD}{AC}-\frac{FE}{AC}$$

Irudian ikus daitekeenez, $AD=AE\,.\cos\alpha$ eta $FE=CE\,.\sin\alpha$. Beraz:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{AE}{AC}\,.\cos\alpha-\frac{CE}{AC}\,.\sin\alpha$$

Baina $\dfrac{AE}{AC}=\cos\beta$ eta $\dfrac{CE}{AC}=\sin\beta$ dira. Beraz:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\,.\cos\beta-\sin\alpha\,.\sin\beta$$

2. adibidea

$$\cos(45^o + 30^o) = \cos 45^o \,.\, \cos 30^o - \sin 45^o \,.\, \sin 30^o = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\beta}{1 - tg\,\alpha \,.\, tg\beta}$$

Frogapena:

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{\sin\,(\alpha + \beta)}{\cos\,(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\,\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\,\alpha \,.\, \sin\beta}{\cos\,\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\,\alpha \,.\, \sin\beta}$$

Adierazpen errazagoa lortuko dugu, zenbakitzailea eta izendatzailea $\cos\alpha \,.\, \cos\beta$ biderkaduraz zatitu eta sinplifikatuz gero:

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\sin\,\alpha \,.\, \cos\beta}{\cos\,\alpha \,.\, \cos\,\beta} + \dfrac{\cos\,\alpha \,.\, \sin\beta}{\cos\,\alpha \,.\, \cos\,\beta}}{\dfrac{\cos\,\alpha \,.\, \cos\beta}{\cos\,\alpha \,.\, \cos\,\beta} - \dfrac{\sin\,\alpha \,.\, \sin\beta}{\cos\,\alpha \,.\, \cos\,\beta}} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \,.\, tg\,\beta}$$

3. adibidea

$$tg\,(45^o + 30^o) = \frac{tg\,45^o + tg\,30^o}{1 - tg\,45^o \,.\, tg\,30^o} = \frac{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \,.\, \dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

- Bi angeluren kenduraren arrazoi trigonometrikoak

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta - \cos\alpha \,.\, \sin\beta$$

Frogapena:

Hain zuzen, $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ denez, hauxe dugu:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\left[\alpha + (-\beta)\right] = \sin\alpha \,.\, \cos(-\beta) + \cos\alpha \,.\, \sin(-\beta)$$

$$= \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin(-\beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta - \cos\alpha \,.\, \sin\beta$$

4. adibidea

$$\sin(45^o - 30^o) = \sin 45^o \,.\, \cos 30^o - \cos 45^o \,.\, \sin 30^o = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta + \sin\alpha \,.\, \sin\beta$$

Frogapena:

Hain zuzen, $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ denez, hauxe dugu:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\left[\alpha + (-\beta)\right] = \cos\alpha \,.\, \cos(-\beta) - \sin\alpha \,.\, \sin(-\beta)$$

$$= \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha \,.\, \sin(-\beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta + \sin\alpha \,.\, \sin\beta$$

5. adibidea

$$\cos(45^o - 30^o) = \cos 45^o \,.\, \cos 30^o + \sin 45^o \,.\, \sin 30^o = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$tg\,(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\beta}{1 + tg\,\alpha\,.\,tg\beta}$$

Frogapena:

$$tg\,(\alpha - \beta) = tg\,[\alpha + (-\beta)] = \frac{tg\,\alpha + tg\,(-\beta)}{1 - tg\,\alpha\,.\,tg\,(-\beta)} = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\,.\,tg\beta}$$

6. adibidea

$$tg\,(45^o - 30) = \frac{tg\,45^o - tg\,30^o}{1 + tg\,45^o\,.\,tg 30^o} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1\,.\,\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

Ariketak

1. Kalkula ezazu cos 105º arrazoiaren balio zehatza. Kontuan izan 105º=60º+45º dela.

2. Kalkula itzazu ondoko arrazoien balio zehatza. Horretarako, adieraz ezazu angeluek ezagunak dituzun bi angeluren batura modura.

   a) sin 75º ; b) cos 135º ; c)tg 105º ; d)sin 120º

3. Kalkula ezazu $\cos(\alpha - \beta)$, jakinik ezen $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ eta $\sin\beta = \frac{12}{13}$ direla eta α eta β angeluak bigarren koadrantekoak direla.

4. Kalkula ezazu $\sin(\alpha - \beta)$, jakinik ezen $\sin\alpha = -\frac{1}{5}$ eta $\cos\beta = \frac{2}{3}$ direla eta bai α eta bai β laugarren koadrantekoak direla.

Angelu bikoitzaren eta angelu erdiaren arrazoi trigonometrikoak

Ikus dezagun nola lor ditzakegun 2α eta $\frac{\alpha}{2}$ angeluen arrazoi trigonometrikoak, α angeluaren arrazoien funtzioan.

- **Angelu bikoitzaren arrazoiak:**

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \,.\, \cos\alpha$ $\quad$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $\quad tg\, 2\alpha = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

Frogapenak:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha \,.\, \cos\alpha + \cos\alpha \,.\, \sin\alpha = 2\sin\alpha \,.\, \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha \,.\, \cos\alpha - \sin\alpha \,.\, \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$tg\, 2\alpha = \frac{tg\,\alpha + tg\,\alpha}{1 - tg\,\alpha \,.\, tg\,\beta} = \frac{tg^2\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

<u>1. adibidea</u>
Kalkulatu sin 40º eta cos 40º arrazoien balioak, sin 20º = 0,34 eta cos 20º =0,94 direla jakinik.

sin 40º = sin 2 . 20º = 2 sin20º . cos20º = 2 . 0,34 . 0,94 = 0,64

cos 40º = cos 2 . 20º = $\cos^2$ 20º - $\sin^2$ 20º = $(0{,}94)^2 - (0{,}34)^2$ = 0,77

- **Angelu erdiaren arrazoi trigonometrikoak**

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = \cos 2.\frac{\alpha}{2} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\ 1 = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{array}\right\}$$ Bi berdintza horien arteko kenketa eginez:

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Era berean, bi berdintzak batuz:

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

> Arrazoien zeinua aukeratzeko, kontuan izango dugu zein koadrantetan dagoen $\frac{\alpha}{2}$ angelua.

Bestetik, $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ lortzeko, $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ eta $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ arrazoien arteko zatiketa egingo dugu: $\quad tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

2. adibidea

Kalkulatu sin 25º eta cos 25º arrazoien balioak, sin 50º = 0,77 eta cos 50º =0,64 direla jakinik.

$$\sin 25^{\circ} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 50}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-0,64}{2}} = \pm 0,42$$

$$\cos 25^{\circ} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 50}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+0,64}{2}} = \pm 0,91$$

$$tg\, 25^{\circ} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 50}{1+\cos 50}} = \pm\sqrt{\frac{1-0,64}{1+0,64}} = \pm 0,47$$

25º-ko angelua lehenengo koadrantekoa denez, beraren sinua, kosinua eta tangentea positiboak dira.

Beraz, sin 25º = 0,42 ; cos 25º = 0,91 ; tg 25º = 0,47

Ariketak

1. sin 14º = 0,24 eta sin 42º = 0,67 direla jakinik, lor itzazu 28º, 56º eta 21º-ko angeluen arrazoi trigonometrikoak.

2. sin 38º = 0,62 dela jakinik, lor itzazu 19º eta 76º-ko angeluen sinua eta kosinua.

Sinuaren teorema eta kosinuaren teorema

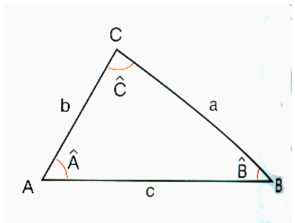
Teorema horien bidez, edozein triangelu ebatz dezakegu, triangelu zuzenetan deskonposatu beharrik gabe.

- **Sinuaren teorema**

Triangelu baten angeluak beren aurkako aldeekin erlazionatzen ditu.

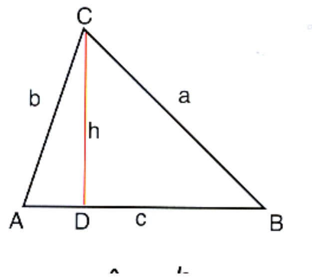
Triangelu baten aldeak eta aurkako angeluen sinuak elkarren proportzionalak dira.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$



Teorema hori frogatzeko, kontsidera dezagun alboko irudiko triangelua.

C puntutik marrazturiko altuera *h* izanik, eta ltuera horrek aurkako aldearekin duen ebaki-puntua *D* izanik, bi triangelu zuzen ditugu, *ADC* eta *DBC*. Ondokoak betetzen dira:



$$\sin \hat{A} = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad h = b.\sin \hat{A} \quad ;$$

$$\sin \hat{B} = \frac{h}{a} \quad \Rightarrow \quad h = b.\sin \hat{B}$$

Bi adierazpen horiek berdinduz gero, ondokoa lortuko dugu:

$b.\sin \hat{A} = a.\sin \hat{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$ eta hori berdintzaren lehen partea da.

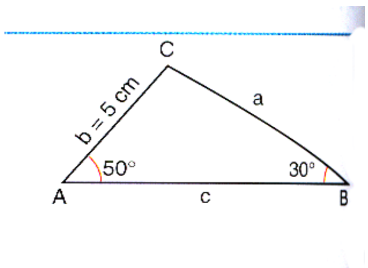
Orain A puntutik marrazturiko altuera kontsideratuz gero, ondoko emaitza lortuko dugu:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Hots, frogaturik geratu da teorema.

<u>1. adibidea.</u>

Lortu irudiko triangeluaren a aldea.



$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$ formula erabiliko dugu:

$$\frac{a}{\sin 50^{o}} = \frac{5}{\sin 30^{o}} \quad \Rightarrow \quad a = 5.\frac{\sin 50^{o}}{\sin 30^{o}} = 7{,}66 \text{ cm}$$

Ariketak

1. Lor ezazu ABC triangeluaren c aldea, b = 10 cm, $\hat{B} = 30^{o}$ eta $\hat{C} = 36^{o}$ izanik.
2. Lor ezazu ABC triangeluaren $\hat{B}$ angelua, a = 9 cm, b = 6 cm eta $\hat{A} = 62^{o}$ direla jakinik.

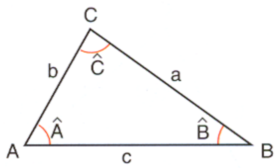
Kosinuaren teorema

Edozein triangeluren alde baten karratua beste bi aldeen karratuen batura ken bi aldiz bi alde horien eta bien arteko angeluaren kosinuaren arteko biderkadura da.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$$

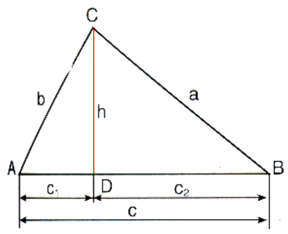
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2.c.a.\cos\hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\hat{C}$$



Adierazpenetako bat frogatuko dugu soilik. Besteak frogatzeko, antzeko arrazoibidea erabili behar da.

Azter dezagun alboko irudiko triangelua.



DBC triangeluan, ondokoa dugu: $a^2 = h^2 + c_2^2$

Baina ADC triangeluan honako hau betetzen da:
$h = b.\sin\hat{A}$; $c_1 = b.\cos\hat{A}$

Eta $c_2 = c - c_1$ dela kontuan hartuz, ondokoa idatz dezakegu:

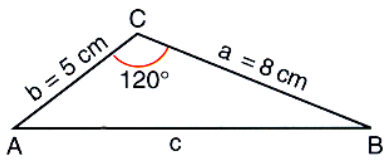
$$a^2 = h^2 + c_2^2 = h^2 + (c - c_1)^2 = (b.\sin\hat{A})^2 + (c - b.\cos\hat{A})^2 =$$

$$= b^2.\sin^2\hat{A} + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A} + b^2.\cos^2\hat{A} =$$

$$= b^2(\sin^2\hat{A} + \cos^2\hat{A}) + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$$

Eta $\sin^2\hat{A} + \cos^2\hat{A} = 1$ denez, zera dugu: $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$

<u>2. adibidea</u>
Lortu irudiko triangeluaren c aldea



Ebazpena:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\hat{C}$$

Datuak ordezkatuz, ondoko emaitza lortuko dugu:

$$c = \sqrt{8^2 + 5^2 - 2.8.5.\cos 120^\circ} = 11{,}36\text{ cm}$$

Ariketak

3. Lor ezazu ABC triangeluaren a aldea, b = 10 cm, c = 12 cm eta $\hat{A} = 26^\circ$ izanik.

4. Lor ezazu ABC triangeluaren $\hat{B}$, a = 6 cm, b = 3 cm eta c = 7 cm izanik.

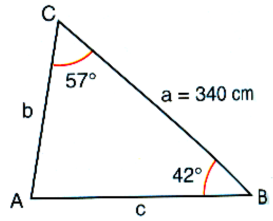
Triangelu ez-zuzenen ebazpena

Ikus dezagun nola aplikatzen diren aurreko teoremak edozein motatako triangeluak ebazteko.

➢ **Lehenengo kasua: alde bat eta bi angelu emanik**

<u>*1. adibidea*</u>

Ebatzi ABC triangelua, a = 340 cm, $\hat{B} = 42^{\circ}$ *eta* $\hat{C} = 57^{\circ}$ *izanik*



Ebazpena:

Kalkula ditzagun gainontzeko elementuak; hots, $\hat{A}$, *b* eta *c*.

$$\hat{A} = 180^{\circ} - (42^{\circ} + 57^{\circ}) = 81^{\circ}$$

$$\frac{340}{\sin 81^{\circ}} = \frac{b}{\sin 42^{\circ}} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{340 \,.\, \sin 42^{\circ}}{\sin 81^{\circ}} = 230{,}34 \text{ cm}$$

$$\frac{340}{\sin 81^{\circ}} = \frac{c}{\sin 57^{\circ}} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{340 \,.\, \sin 57^{\circ}}{\sin 81^{\circ}} = 288{,}70 \text{ cm}$$

<u>*2. adibidea*</u>

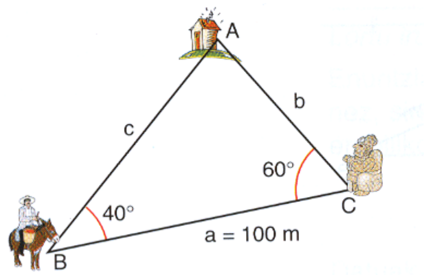
A puntuan kokaturiko aterpetxetik zein distantziatara dago C puntutik 100 m-ra dagoen B puntuko behatzailea, $\hat{B} = 40^{\circ}$ *eta* $\hat{C} = 60^{\circ}$ *balioko angeluak neurtu direla jakinik?*

Ebazpena:

c aldea kalkulatu behar dugu.

$$\hat{A} = 180^{\circ} - (40^{\circ} + 60^{\circ}) = 80^{\circ}$$

$$\frac{100}{\sin 80^{\circ}} = \frac{c}{\sin 60^{\circ}} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{100 \,.\, \sin 60^{\circ}}{\sin 80^{\circ}} = 87{,}94 \text{ m}$$



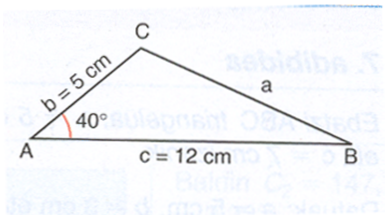
Ariketa

1. *Bata bestetik 100 m-ra dauden elkarri begira dauden bi behatzailek bere plano bertikalean dagoen globo bat ikusi dute 40º eta 43º-ko gorapen angeluez. Behatzaile bakoitzarengandik zein distantziatara dago globoa?*

- **Bigarren kasua: bi alde eta bien arteko angelua emanik**

<u>*3. adibidea*</u>

Ebatzi ABC triangelua, $\hat{A}=40^{\circ}$, *b = 5 cm eta c = 12 cm izanik.*



Ebazpena:

Kalkulatu beharrekoak: a, $\hat{B}$ eta $\hat{C}$.

$$a^2=b^2+c^2-2.b.c.\cos\hat{A} \quad \rightarrow \quad a=\sqrt{5^2+12^2-2.5.12.\cos 40^{\circ}}=8{,}78\,\text{cm}$$

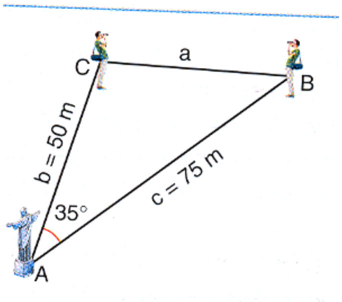
$$b^2=c^2+a^2-2.c.a.\cos\hat{B} \quad \rightarrow \quad \cos\hat{B}=\frac{12^2+8{,}78^2-5^2}{2.12.8{,}78}=0{,}9306 \quad \Rightarrow \quad \hat{B}=21{,}47^{\circ}$$

Ikus dezakezunez, $\hat{B}'=360^{\circ}-21{,}47^{\circ}=338{,}53^{\circ}$ angeluak ere $\hat{B}$ angeluaren kosinu bera duen arren, ez dugu kontuan hartu, $\hat{B}'>180^{\circ}$ baita.

Azkenik, $\hat{C}$ angelua kalkulatuko dugu: $\hat{C}=180^{\circ}-(40^{\circ}+21{,}47^{\circ})=118{,}53^{\circ}$

<u>*4. adibidea*</u>

Bi lagun A puntutik abiatu dira elkarrekin 35º-ko angelua eratzen duten bi norabidetan. 75 m eta 50 m ibili ondoren, B eta C puntuetan gelditu dira, hurrenez hurren. Kalkulatu bi puntu horien distantzia eta ABC triangeluaren $\hat{B}$ *eta* $\hat{C}$ *angeluak.*



Ebazpena:

Kalkulatu beharrekoak: a, $\hat{B}$ eta $\hat{C}$.

$$a^2=b^2+c^2-2.b.c.\cos\hat{A} \quad \rightarrow \quad a=\sqrt{50^2+75^2-2.50.75.\cos 35^{\circ}}=44{,}51\,\text{cm}$$

$$b^2=c^2+a^2-2.c.a.\cos\hat{B} \quad \rightarrow \quad \cos\hat{B}=\frac{75^2+44{,}51^2-50^2}{2.75.44{,}51}=0{,}7648 \quad \Rightarrow \quad \hat{B}=40{,}11^{\circ}$$

$$\hat{C}=180^{\circ}-(35^{\circ}+40{,}11^{\circ})=104{,}89^{\circ}$$

Ariketak

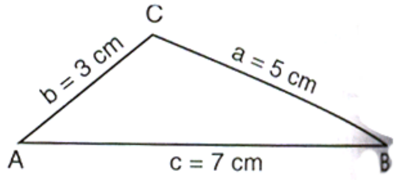
2. Ebatz ezazu ondoko triangelua: a = 7 cm, c = 6 cm, $\hat{B}=60^{\circ}$

3. Parke batean hiru estatua daude, A, B eta C puntuetan. A-tik B-ra 50 m daude eta A-tik C-ra 60 m. AB eta AC segmentuek eraturiko angelua 120º-koa da. Zein da B estatuatik C estatuarainoko distantzia?

➢ Hirugarren kasua: hiru aldeak emanik

<u>*5. adibidea*</u>

Ebatzi ABC triangelua, a = 5 cm, b = 3 cm eta c = 7 cm izanik.



Ebazpena:

Kalkulatu beharrekoak: $\hat{A}$, $\hat{B}$ eta $\hat{C}$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A} \quad \rightarrow \quad \cos\hat{A} = \frac{3^2+7^2-5^2}{2.3.7} = 0{,}7857 \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = 38{,}21^\text{o}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2.c.a.\cos\hat{B} \quad \rightarrow \quad \cos\hat{B} = \frac{7^2+5^2-3^2}{2.7.5} = 0{,}9286 \quad \Rightarrow \quad \hat{B} = 21{,}79^\text{o}$$

$$\hat{C} = 180^\text{o} - (38{,}21^\text{o} + 21{,}79^\text{o}) = 120^\text{o}$$

Ariketa

4. Hiru kanpaleku, A, B eta C, bide zuzenez loturik daude, halako moldez non A-tik B-ra joateko 2,5 km-ko bidea ibili behar den, eta B-tik C-ra beste 2 km-koa. A-tik C-rainoko distantzia 3 km-koa dela jakinik, zein angelu eratzen dituzte bideek elkarren artean?

➢ Laugarren kasua: bi alde eta bi aldeetako baten aurkako angelua emanik

Kasu horretan gerta daiteke soluziorik ez egotea, soluzio bakarra egotea edo bi soluzio egotea.

<u>*6. adibidea*</u>

Ebatzi hiru triangelu hauek:

a) *a = 3 cm, b = 8 cm eta* $\hat{A} = 25^\text{o}$

b) *a = 12,6 cm, b = 26,4 cm eta* $\hat{B} = 124^\text{o}\,34'$

c) *a = 82,6 cm, b = 115 cm eta* $\hat{A} = 28^\text{o}\,4'$

Ebazpena:

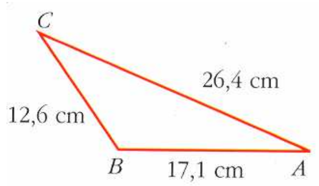
a) Sinuen teorema: $\dfrac{3}{\sin 25^\text{o}} = \dfrac{8}{\sin\hat{B}} \quad \rightarrow \quad \sin\hat{B} = 1{,}12$ Ezinezkoa da. Ez dago soluziorik.

b) Sinuen teorema erabiliz, $\hat{A}$ lortuko dugu:

$$\frac{12{,}6}{\sin \hat{A}} = \frac{26{,}4}{\sin 124^\circ 34'} \quad \rightarrow \quad \hat{A} = 23^\circ\ 8'\ 33''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \quad \rightarrow \quad \hat{C} = 32^\circ\ 17'\ 27''$$

$$\frac{c}{\sin 32^\circ 17' 27''} = \frac{26{,}4}{\sin 124^\circ 34'} \quad \rightarrow \quad c = 17{,}1\,\text{cm}$$



Ezin dira bi soluzio egon. $\hat{B}$ kamutsa izanik $\hat{A}$ eta $\hat{C}$ angeluek zorrotzak izan behar dute.

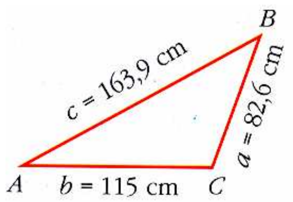
c) Sinuaren teorema aplikatzean, $\hat{B}$ angeluarentzat bi soluzio lortzen ditugu:

$$\frac{82{,}6}{\sin 28^\circ 4'} = \frac{115}{\sin \hat{B}} \quad \rightarrow \quad \sin \hat{B} = 0{,}6550 \quad \rightarrow \quad \hat{B}_1 = 40^\circ\ 55'\ 25'' \quad \text{eta} \quad \hat{B}_2 = 180^\circ - \hat{B}_1 = 139^\circ\ 4'\ 35''$$

$\hat{C}$ angelua eta c aldea kalkulatuko ditugu kasu bakoitzean:

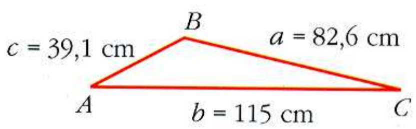
- $\hat{C}_1 = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}_1) = 111^\circ\ 35''$

  $$\frac{c_1}{\sin 111^\circ\ 35''} = \frac{82{,}6}{\sin 28^\circ\ 4'} \quad \rightarrow \quad c_1 = 163{,}9\ cm$$



- $\hat{C}_2 = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}_2) = 12^\circ\ 51'\ 25''$

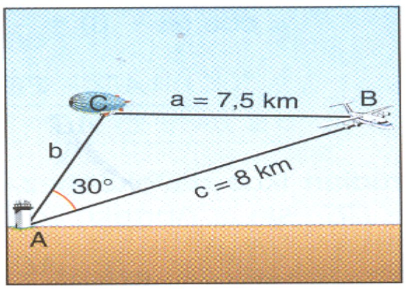
  $$\frac{c_2}{\sin 12^\circ\ 51'\ 25''} = \frac{82{,}6}{\sin 28^\circ\ 4'} \quad \rightarrow \quad c_2 = 39{,}1\ cm$$



Ariketak

5. Ebatzi ondoko triangelua: $\hat{B}$ = 30º; b = 5 cm eta c = 10 cm

6. Aldiune jakin batean hegazkin bat aireportuko kontrol-dorretik 8 km-ra dago eta baloi gidatu batetik 7,5 km-ra. Aireportutik behatuta, objektu hegalari biak 30º-ko angelu batez ikusten badira, aireportutik zein distantziatara dago une horretan baloi gidatua?



Em.: 13,24 km

ARIKETAK

1. $\cos\alpha = -0,6$ eta α angelua bigarren koadrantekoa izanik, kalkula itzazu angelu bikoitzaren sinua eta kosinua.
   Em.: $\sin 2\alpha = -0,96\,;\ \cos 2\alpha = -0,28$

2. Kalkula ezazu cos 46°, jakinik sin 23° = 0,39 dela.
   Em.: 0,6958

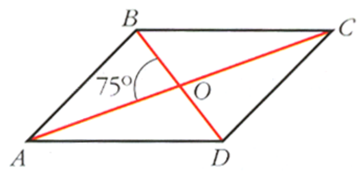
3. Egiazta ezazu: $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

4. $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$ eta $\cos\beta = -\dfrac{1}{5}$ izanik α eta β angeluak hirugarren kodrantekoak direla jakinik, kalkula itzazu $\sin(\alpha+\beta)$ eta $\cos(\alpha-\beta)$
   Em.: $\sin(\alpha+\beta) = 0,9038$; $\cos(\alpha-\beta) = 0,7479$

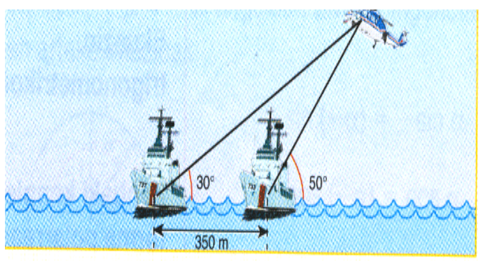
5. Froga ezazu ondoko berdintza: $\cos\alpha = \dfrac{1 - tg^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$

6. Ebatz itzazu ondoko ekuazio trigonometrikoak
   $a)\ \cos 2x = 1 + \sin x$; $b)\ tg\,(45° + x) = -1$

7. Paralelogramo baten diagonalak 6 cm eta 14 cm luze dira eta 75°-ko angelua eratzen dute. Aurkitu paralelogramoaren aldeak eta angeluak.

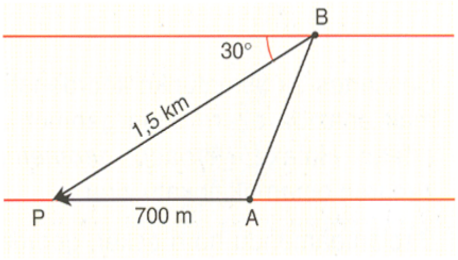


8. Bi hegazkin-ontzietako radaristak beren plano bertikalean higitzen ari den helikoptero baten hegaldia behatzen ari dira. Irudiko datuen arabera, zein altueratan doa helikopteroa?
   Em.: 391,96 m



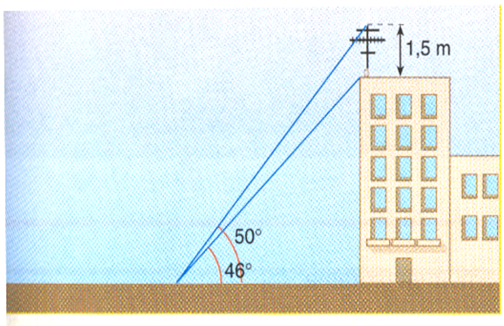
9. *P* puntura joateko, *A* eta *B* puntuetan zeuden bi ibiltarik irudian azaldutako ibilbideak egin dituzte. *A* puntuan zegoenak 700 m egin ditu eta *B* puntuan zegoenak 1, 5 km. Zein distantziatara zeuden hasieran?

Em.: 0,96 km



10. 1,5 m-ko altuera duen antena bat etxe baten gainaldian jarri da. Aletik begiratuta, antenaren oinarriaren eta goi-muturraren gorapen-angeluak neurtzean, 46º eta 50º-koak ikusi dugu, hurrenez hurren. Zein altueratakoa da etxea?

Em.: 9,94 m



11. Irudiari buruz jarraian adierazitako datuak kontuan izanik, kalkula ezazu A eta B puntuen arteko distantzia.
$\alpha = 40^o$, $\beta = 72^o$, $\gamma = 50^o$, $\delta = 60^o$, $DC = 70\,\text{m}$

Em.: 34,43 m