Giza eta Gizarte Zientziak

Matematika II

3. ebaluazioa

- Probabilitatea
- Banaketa Normala eta Binomiala
- Lagin estatistikoak
- Inferentzia estatistikoa
- Hipotesiak

Ignacio Zuloaga B.H.I. (Eibar)

PROBABILITATEA

LAGIN-ESPAZIOA. GERTAERAK

a) 1-etik 6-rako zenbakiak dituen dado bat jaurti eta goiko aurpegian ateratzen den emaitza idazten badugu, esperimentu aleatorio horri lotutako lagin-espazioa zera da: $\Omega = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$

b) Bi txanpon jaurti eta ateratzen den emaitzaren lagin-espazioa $\Omega = \{aa , a+ , +a , ++\}$ izango da, non *A* aurpegia den eta + gurutzea.

Esperimentu aleatorio batean, **lagin-espazioa,** gerta daitezkeen emaitza posible guztien multzoari, deitzen zaio

Ariketa. Poltsa batean bola gorriak eta beltzak daude. Hiru bola elkarren segidan ateratzen badira, idatzi lagin-espazioa eta ondorengo gertaerak:

a) *A = "kolore berdineko hiru bola ateratzea"*
b) *B* = "*gutxienez bi bola gorri ateratzea*"

Soluzioa:
a) $A = \{(G,G,G);...\}$
b) $B= \{(G,G,G);(G,G,B);....\}$

Definizioak

ϕ : Ezinezko gertaera, sekula egiaztazen ez dena
Ω : Gertaera zihurra
$\overline{A}$: A-ren osagarria edo aurkakoa; hau da, A gertaera betetzen ez denean
$A \cup B$: Gertaeren bilketa; gutxienez bietako bat betetzen denean (*A* edo *B*)
$A \cap B$: Gertaeren ebaketa. Biak batera betetzen direnean (*A* eta *B*)
Gertaera *bateraezinak*: $A \cap B = \phi$

1.- A = " *Eibarkoa izatea*" eta B = "*ilehoria edukitzea*" gertaerak emanik, deskribatu ondoko gertaerak:

$A \cup B=$
$A \cap B=$
$A - B=$
$\overline{A}=$

2.- Zenbat da?:

$\overline{\Omega}$; $\overline{\overline{A}}$; $A \cup \overline{A}$
$A \cap \overline{A}$; $A \cup \phi$; $A \cap \phi$

3.- Bonbo batean 1etik 9rako zenbakiak dituzten bederatzi bola daude. Bertatik bola bat ateratzeko esperimentua egingo dugu eta honako gertaera hauek dauzkagu:

$$A = \{1,3,5,7\} \quad ; \quad B = \{2,3,4,5,6\} \quad ; \quad C = \{1,5,7,9\}$$

Aurki itzazu:

a) $\overline{A \cup B}$

b) $\overline{A} \cap B$

c) $(A \cup B) \cap \overline{C}$

d) B - C

<u>Propietateak:</u>

a) $(\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$. Egiazta ezazu grafikoki

Berdin, $(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}$

Bi formula hoiek *Morgan-en formulak* dira

b) $A \cup (B \cap A) = A$. Egiaztatu grafikoki

$A \cap (B \cup A) = A$

c) $A - B = A \cap \overline{B}$. Egiaztatu grafikoki

> Dado bat jaurtitzean har ditzagun ondoko gertaerak:
> A = {2 , 3} ; B = {1 , 2} eta C = {4 , 5}
> *2* zenbakia ateratzen bada, *A* eta *B* aldi berean gertatzen dira. Gertaera horiek **bateragarriak** dira. $A \cap B \neq \phi$
>
> Aldiz, *A* eta *C* ezin dira aldi berean gerta; **bateraezinak** dira. $A \cap C = \phi$

<u>PROBABILITATEA</u>

Txanpon bat 100 aldiz botatzen dugu airera. Demagun 55 aldiz aurpegia eta 45 gurutze atera direla.

"Aurpegia irtetzea" gertaeraren maiztasun absolutua 55 da eta maiztasun erlatiboa $\frac{55}{100} = 0{,}55$. Ordea, *"gurutze irtetzea"*-rena 0,45.

Txanpona, zenbat eta gehiagotan jaurti (1000, 10000,...), maiztasun erlatiboen balioak geroz eta gehiago hurbiltzen dira 0,5 zenbakira. Probak gehitu ahala, maiztasun erlatiboen balioak 0,5en inguruan egonkortzen dira.

Zenbaki horri, **probabilitatea** deitzen zaio

Laplace-ren definizioa: $p(A) = \dfrac{aldeko\ kasuak}{kasu\ \ posibleak}$

Zera betetzen da:

$0 \le p(A) \le 1$

$p(\Omega) = 1 \quad ; \quad p(A) + p(\overline{A}) = 1 \quad ; \quad p(\phi) = 0$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

> Gertaera **bateragarriak** direnean ondokoa betetzen da:
> $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
> Gertaera **bateraezinak** direnean, $A \cap B = \phi$ da eta $p(A \cap B) = 0$.
> Orduan, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

ARIKETAK 1

1.- Berrogei kartako baraja batetik karta bat ateratzean, zein da errege bat izateko probabilitatea?

2.- Dado bat jaurtitzean, zein da zenbaki bikoitia ateratzeko probabilitatea?

3.- Txanpon bat bi aldiz botatzean, zein da bi aurpegi ateratzearen probabilitatea?

4.- Berrogei kartako baraja batetik karta bat ateratzen da. Eman ditzagun gertaera hauek:

A="urrea atera" ; *B="batekoa atera"* ; *C="txanka, zaldia edo erregea atera"*

Kalkulatu:

p(A) ; p(B) ; p(C) ; p($\overline{A}$) ; p$(A \cup B)$; p$(A \cap B)$; p$(A \cap C)$

5.- Demagun A eta B gertaerak ditugula eta p(A) = 3/8 ; p(B)=1/2 eta $p(A \cap B) = 1/4$. Kalkulatu:

$a)\ p(A \cup B) \quad ; \quad b)\ p(\overline{A}) \quad ; \quad c)\ p(\overline{B}) \quad ; \quad d)\ p(\overline{A} \cap \overline{B}) \quad ; \quad e)\ p(\overline{A} \cup \overline{B})$

$f)\ p(A \cap \overline{B}) \quad ; \quad g)\ p(B \cap \overline{A})$

6.- Eman ditzagun bateraezinak diren A eta B gertaerak, *p(A)=0,3* eta *p(B)=0,12* direlarik. Kalkula itzazu $p(\overline{A})$; $p(A \cup B)$ *eta* $p(A \cap B)$

7.- Demagun A eta B gertaerak ditugula eta

$p(A \cup B) = 3/4$; $p(\overline{B}) = 2/3$ *eta* $p(A \cap B) = 1/4$. Kalkulatu

$p(A)$; $p(B)$ *eta* $p(\overline{A} \cap B)$

8.- $p(A) = 2/5$; $p(B) = 1/3$ *eta* $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1/3$ badira, kalkulatu $p(A \cup B)$ *eta* $p(A \cap B)$

9.- Inkesta batek azaldu duenez, 1000 biztanleko herri batean 350ek betaurrekoak erabiltzen dituzte eta 600ek ordenagailu bat dute etxean. Gainera, 120k betaurrekoak dauzkate eta ordenagailurik ez. Biztanle bat zoriz aukeratuz, zein da:

a) Ordenagailua edukitzekoaren probabilitatea
b) Betaurrekorik ez erabiltzekoaren probabilitatea
c) Ordenagailua eduki eta betaurrekoak erabiltzekoaren probabilitatea

Erabili kontingentzia-taula:

	Ordenagailua bai	Ordenagailua ez	
Betaurrekoak bai		120	350
Betaurrekoak ez			
	600		1000

10.- Denda batean, 200 bezeroen artean, bidai bat zozketatzen da. 125 andrazkoak dira, 155 ezkonduak eta 95 emakume ezkonduak

a) Zein da bidaia gizon ezkongabe bati irtetzekoaren probabilitatea?
b) Saria, ezkondutako bati irten zaiola jakinik, zein da andrazkoa izatearen probabilitatea? (Baldintzapeko probabilitatea)

	Ezkondua (E)	Ez ezkondua (EE)	
Andrazkoa (A)	95		125
Gizonezkoa (G)			
	155		200

a) $p(G \cap EE) =$

b)

Gertaera baldintzatuaren probabilitatea..

"B-k baldintzaturiko A gertaeraren probabilitatea". Formula: $\boxed{p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}}$;

$$p(A \cap B) = p(A/B).p(B)$$

Aurreko adibidean, <u>andrazkoa izatea ezkonduen artean</u>; hau da, *p(A/E)*. Formula aplikatuz, $p(A/E) = \dfrac{p(A \cap E)}{p(E)} = \dfrac{\frac{95}{200}}{\frac{155}{200}} = \dfrac{95}{155}$

11.- Baraja bateko urre guztien atzealdeak markatuta daude. Jokalari batek karta bat hartze du eta markatuta dagoela ikusten du. Zein da karta hori erregea izateko probabilitatea?

Gertaera independenteak

Txanpon bat eta dado bat botatzen ditugu. Argi dago baten emaitzak ez duela bestearengan eraginik; independenteak dira

Baraja batetik bi karta ateratzen ditugu (barajara birsartu gabe). 2.aren emaitza 1.aren menpekoa da. Lehenengoa batekoa bada, bigarrena ere batekoa izatearen probabilitatea txigiagoa da; ez dira independenteak, menpekoak baizik

A eta B gertaerak, independenteak dira baldin $p(A \cap B) = p(A).p(B)$ betetzen denean. Baita, $p(A/B) = p(A)$ denean

ARIKETAK 1

1.- Ze ezberdintasun dago gertaera bateraezinak eta gertaera independenteen artean?

2.- A eta B gertaera independenteak dira, non $p(A)=0{,}6$ eta $p(B)=0{,}3$ delarik. Kalkulatu $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$ eta $p(A/B)$

3.- $p(A)=0{,}7$; $p(B)=0{,}6$ eta $p(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}58$ izanik, A eta B gertaerak, independenteak al dira? Zein da probabilitatea ez gertatzea ez A ez B?

4.- Dado bat bi aldiz jaurtitzen da. Demagun bi gertaera hauek:

A: guztira 7 puntu atera

B: gutxienez batean 3-ren multiploa atera.

Independenteak al dira *A* eta *B* gertaerak

ARIKETAK 2

1.- *1*etik *6*rako zenbakiak dituen dado bat trukatuta dago. Horrela, aurpegiak lortzeko probabilitateak, aurpegien puntuekiko proportzionalak dira. Kalkula itzazu:

a) Aurpegi bakoitza azaltzeko probabilitatea
b) Jaurtiketa batean, zenbaki bakoitia lortzeko probabilitatea

2.- Aurrekoa bezalakoa baina ondorengo erara trukatuta: “Zenbaki bikoitia duen aurpegi bakoitza, zenbaki bakoitia duena baino hiru aldiz gehiago ateratzen da”

3.- Herri batean, %60a neurotikoa da, depresio-arazoekin %30a eta gaitz biekin %10a . Herri horretako bizilagun bat zoriz aukeratzen badugu, zein da:

a) Gaitzen bat jasatzeko probabilitatea?
b) Gaitz bakar bat edukitzeko probabilitatea?
c) Gaitz bat ere ez edukitzekoaren probabilitatea?

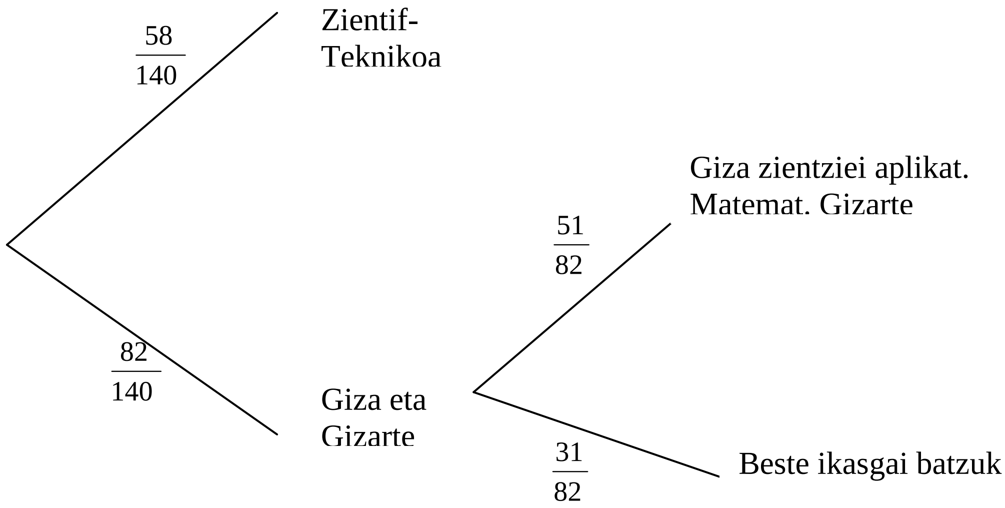
4.- Ikastetxe baten ikaslegoaren %25ak Matematika suspenditu du, %15ak Literatura suspenditu du eta %10ek biak suspenditu dituzte. Ikasle bat zoriz aukeratuz, zein da:

a) Matematika edo Literatua suspendituta izateko probabilitatea?
b) Ez bata ez bestea suspendituta ez izateko probabilitatea?
c) Literatura suspendituta badu, zein da Matematika ere suspendituta izateko probabilitatea?

Zuhaitz-diagrama

1. adibidea

Institutu batean matrikulaturik dauden batxilergoko bigarren mailako ikasleetatik 58k Zientifiko- Teknikoa batxilergoa aukeratu dute eta 82k Giza eta Gizarte Zientziena. Azken aukera hori egindakoen artean, 51k Gizarte Zientziei aplikatutako Matematika aukeratu dute. Ikastetxe horretako bigarren mailako ikasle bat zoriz aukeratzen badugu, zein da aipatutako ikasgaia ikasteko probabilitatea?

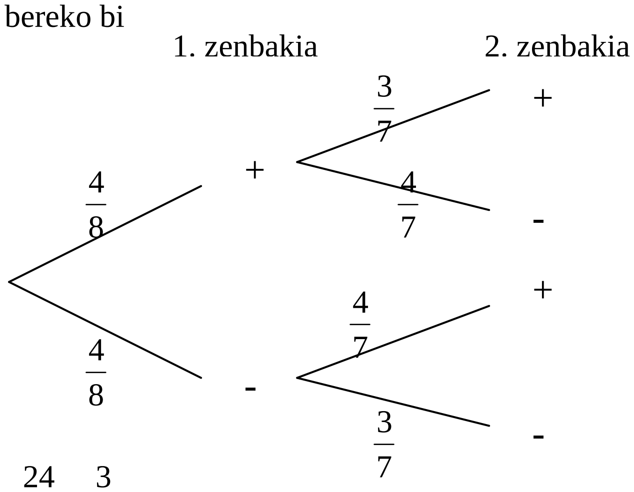


Zera da nahi dugun probabilitatearen balioa = $\frac{82}{140}\cdot\frac{51}{82}=\frac{51}{140}$

2. adibidea

Zortzi zenbaki hartuko ditugu, lau positibo eta lau negatibo. Horietako bi zoriz aukeratu eta biderkatu egiten ditugu. Zein da emaitza zenbaki positiboa izateko probabilitatea?

Emaitza zenbaki positiboa izan dadin, zeinu bereko bi zenbaki biderkatu behar dira.



$P_1\,(+.+) = \frac{4}{8}.\frac{3}{7}=\frac{12}{56}$

$P_2\,(-.-) = \frac{4}{8}.\frac{3}{7}=\frac{12}{56}$

P(emaitza positiboa ateratzea) = $\frac{12}{56}+\frac{12}{56}=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$

ARIKETAK

1.- Kutxa batean hiru bola urdin eta lau berde daude. Zoriz ateratzen baditugu bi bola aldi berean, zein da kolore berekoak izateko probabilitatea?

2.- Kajoi batean lau galtzerdi beltz, sei marroi eta bi urdin daude. Bi galtzerdi hartzen baditugu zoriz, zein da biak beltzak izateko probabilitatea ? Eta biak kolore berekoak izatekoa ?. Ebatzi problema zuhaitz-diagrama bat erabiliz.

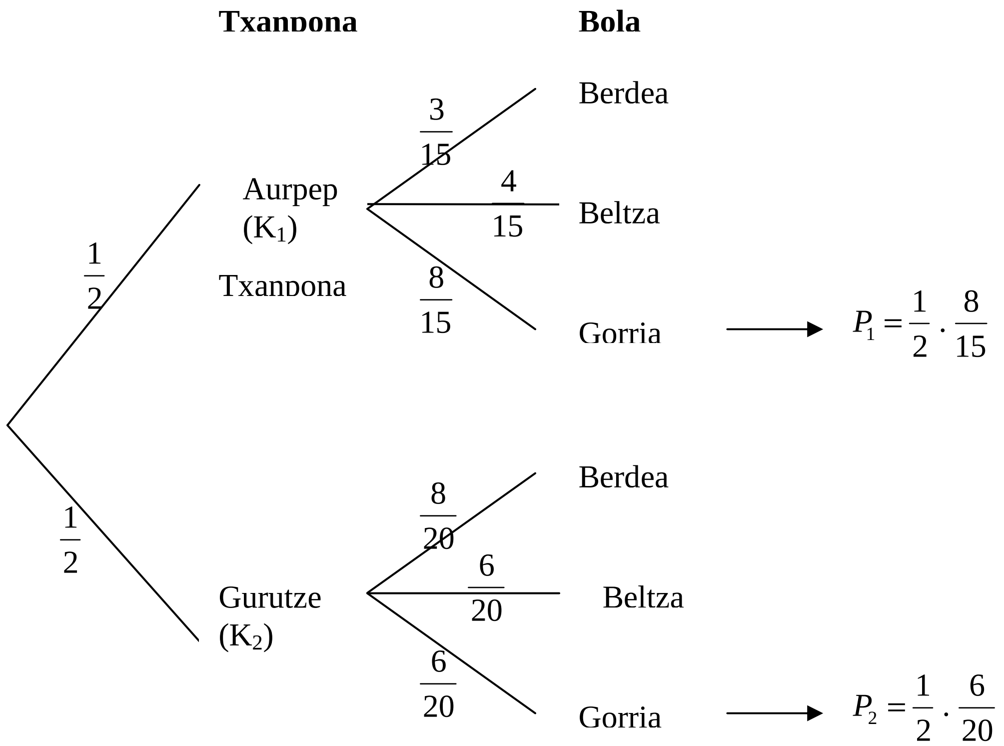
3.- Bi dado jaurti dira. Aurkitu: a) Puntuazio bat bikoitia eta bestea bakoitia izateko probabilitatea. b) Bi puntuazioen batura 7 dela jakinik, puntuazioren bat bikoitia izateko probabilitatea

4.- 80 gaiz osaturiko oposizio batean bi aukeratuko dira zoriz. Oposiziogile batek 18 baino ez baditu prestatu, zein da bat ondo eta bestea gaizki erantzuteko probabilitatea?

5.- Txanpon bat hiru aldiz jaurtitzen dugu. Zein da bi aurpegi elkarren segidan ateratzearen probabilitatea?

Adibidea

K_1 kutxa batean hiru bola berde, lau bola beltz eta zortzi bola gorri daude. K_2 beste kutxa batean zortzi bola berde, sei beltz eta sei gorri daude.
Txanpon bat jaurtiko dugu; aurpegi irtetzen bada, bola bat aterako dugu K_1 kutxatik, eta gurutze irtenez gero K_2 kutxatik aterako dugu bola bat.
Txanpona eta ateraldia eginez gero, zein da ateratzen den bola gorria izateko probabilitatea?



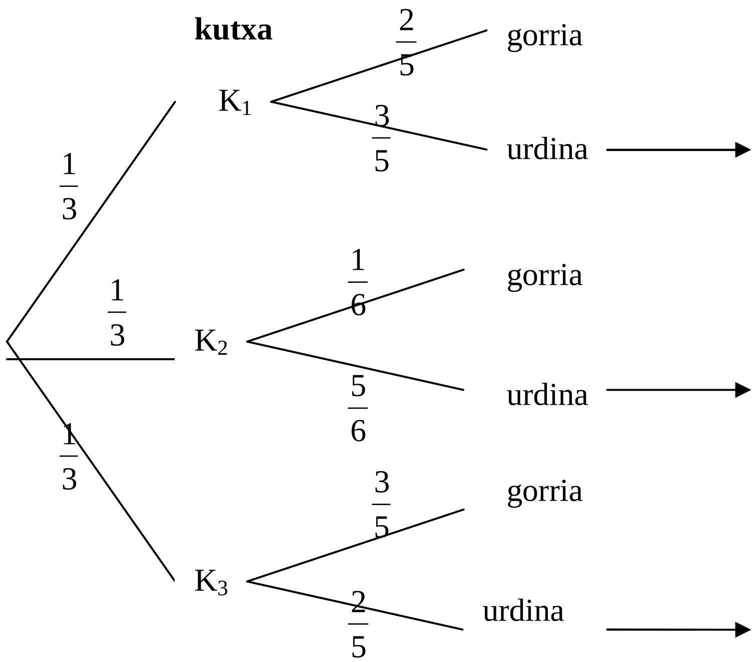
$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{20} = \frac{4}{15} + \frac{3}{20} = \frac{16+9}{60} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$$

ARIKETA

Hiru kutxa berdin-berdinek honakoak dituzte: lehendabizikoak urrezko hiru lingote eta zilarrezko bi; bigarrenak urrezko bi eta zilarrezko bost, eta hirugarrenak urrezko sei eta zilarrezko zazpi. Zein da kutxa batetik zoriz lingote bat ateratzean, hura zilarrezkoa izateko probabilitatea?

Adibidea

K_1 kutxa batean 2 bola gorri eta 3 bola urdin daude. K_2 beste kutxa batean gorri 1 eta 5 urdin daude. K_3 kutxan, ordea, 3 gorri eta 2 urdin.
Zoriz kutxa bat aukeratzen da eta bola bat atera; bola hura urdina baldin bada, zein da K_2 kutxatik ateratakoa izatearen probabilitatea?



$$P_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$P_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{18}$$

$$P_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

<u>Baldintzapeko probabilitatea</u> : Jakina da (gertaera ziurra) ateratako bola urdina dela; hau da: $P \;=\; P_1 + P_2 + P_3 \;=\; \frac{1}{3}.\frac{3}{5} + \frac{1}{3}.\frac{5}{6} + \frac{1}{3}.\frac{2}{5}$

Horietatik, aldeko kasua, K_2-tik ateratako gertaera da; hau da: $P_2 = \frac{1}{3}.\frac{5}{6}$

Soluzioa: $P = \dfrac{P_2}{P_1 + P_2 + P_3} = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}} \;=\; \dfrac{5}{11}$

ARIKETAK 1

1.- Institutu bateko ikasleen %58 neskak dira. Matrikulaturiko ikasle guztietatik %88 ikastetxea dagoen herriak jaioak dira. Ikasle bat zoriz zukeratu eta herrian jaiotakoa bada, zein da mutila izateko probabilitatea?

2.- Apalategi bateko hiru apalek honako liburuak dituzte: goiko apalak 3 nobela eta 7 ipuin, erdiko apalak 8 nobela eta 6 ipuin, eta behekoak 5 nobela eta 9 ipuin. Zoriz apal bat aukeratu eta liburu bat atera dugu. Liburua nobela bada, zein da erdiko apaletik aterea izateko probabiliatatea?

ARIKETAK 2

1.- Espainiar karta-sorta batetik bi karta aterako ditugu aldi berean. Aurkitu bi kartak palo berekoak izateko probabilitatea

2.-Txirrindulari batek egun euritsu batean lasterketa bat irabazteko probabilitatea 0,08 da, eta egun lehor batean lasterketa irabaztekoa 0,3 da. Lasterketa egun euritsua izateko probabilitatea 0,25 bada, zein da txirrindulariak lasterketa irabazteko probabilitatea?

3.- Luziak kajoi batean dauka gordeta dantza-eskolarako arropa: bi maillot beltz, beste bi urdin, maillot bat gorria eta beste bat arrosa; bi pare galtzerdi zuri, bi pare beltz eta bi pare galtzerdi arrosa.
Eskolarakoan zoriz hartzen baditu maillot bat eta galtzerdi pare bat, zein da eskolara beltzez jamtzita joateko probabilitatea? Eta beltz eta arrosaz joateko probabilitatea?

4.- Hiru kutxa berdin-berdinetak honakoak daude:

A kutxan: urrezko txanpon 1 eta brontzezko 4
B kutxan: urrezko 2 txanpon eta brontzezko 6
C kutxan: urrezko 3 txanpon eta brontzezko 7

Zoriz aukeratutako kutxa batetik txanpon bat zotiz ateratzean, zein da txanpona urrezkoa izateko probabilitatea?

5.- Modelo-eskola batean gizonezkoen %80ek eta emakumezkoen %30ek 1,76 metro gora neurtzen dute. Emakumezkoak gizonezkoen hirukoitza dira. Modelo bat zoriz aukeratu dugu eta 1,76 metro baino gehiago neurtzen du. Zein da emakumea izateko probabilitatea?

6.- Kutxa batean 4 bola hori eta 6 berde daude. Aldi berean bi bola ateratzen baditugu, zein da gutxienez bat horia izateko probabilitatea?

7.- *A* kutxa batean sei bola zuri eta lau beltz daude; *B* bigarren kutxa batean bost zuri eta bi beltz. Kutxa bat zoriz aukeratu eta bertatik bi bola aterako ditugu, kutxara itzuli gabe. Kalkulatu honakoak gertatzeko probabilitateak:

a) Bi bolak zuriak izatea
b) Bi bolak kolore berekoak izatea
c) Bi bolak kolore desberdinetakoak izatea

8.- Honelako bolak dituzten bi kutxa dauzkagu:

A kutxa: 4 bola gorri eta 6 zuri
B kutxa: 7 bola gorri eta 3 zuri

Zoriz kutxa bat aukeratu, bertatik bola bat atera eta beste kutxan sartuko dugu; azkenik, bola bat aterako dugu bigarren kutxa horretatik. Zein da gorria izatearen probabilitatea ?

9.- Hiri batean bi egunkari irakurtzen dituzte: A eta B. Pertsona batek A egunkaria irakurtzeko probabilitatea 0,1 da, B irakurtzeko probabilitatea 0,1 eta biak irakurtzekoa 0,02.

a) Kalkula ezazu pertsona batek egunkari bat ere ez irakurtzeko probabilitatea.
b) Aurkitu egunkarietako bat irakurtzen duen pertsona batek bestea ere irakurtzeko probabilitatea.

10.- Oposizio bateko ikasgaiak 100 dira. Oposiziogile batek 40 baino ez dakizki, eta 100 horietatik hiru zozketatuko dira.

a) Kalkula ezazu oposiziogileak bat ere ez jakiteko probabilitatea.
b) Zein da gutxienez bat jakiteko probabilitatea?

11.- Ikasle bat test erako azterketa batetara aurkeztu da. Azterketa 100 galderaz osatuta dago, galdera bakoitzaren azpian lau erantzun daudelarik (eta bakarrik bat zuzena). 60 galdera ikasleak prestatu duen programaren zatiari buruzkoak dira eta galdera horietan erantzun zuzena aukeratzeko duen probabilitatea %80koa da. Beste galdera guztietan lau erantzunen artean zoriz bat aukeratuko du. Galdera bat zoriz aukeratzen bada, zein da ikaslearen erantzuna zuzena izateko probabilitatea?

12.- Bi jokalari, A eta B, norbere dadoak jaurti eta puntuaziorik altuena nork atera jokatzen ari dira. Dadoek honako puntuazioak dituzte:

- *A dadoaren* lau aurpegik 6na puntu dituzte eta beste biek 10na.
- *B dadoaren* aurpegi batek 3 puntu ditu, bik 4na puntu, beste bik 6na puntu eta azkenak 12.

Zer jokalarik du irabazteko aukera gehien? Arrazoitu zeure erantzuna.

13.- Kutxa batean 4 bola zuri, 2 gorri eta 5 beltz daude. Bola bat atera da eta bere kolorea begiratu gabe kendu egin da. Ondoren beste bola bat atera da. a) Zein da bigarren bola hau zuria izateko probabilitatea? b) Bigarren bola zuria izan bada, zein da kendutako bola gorria izateko probabilitatea?

14.- Kutxa batean 12 bola daude, eta horietako bi gorriak dira. Gorriak direnak aurkitu nahian, bolak bata bestearen atzetik ateratzen dira. Zein da lana laugarren saioan bukatzeko probabilitatea?

15.- Kutxa batean bi bola zuri eta hiru beltz daude. Bi jokalarik zoriz eta txandaka bola bana aterako dute. Irabazlea bola zuri bat ateratzen duen lehena bada, zein da jokatzen hasten den jokalariak irabazteko probabilitatea? Arrazoitu zeure erantzuna.

16.- Globo zunda bat berreskuratzeko probabilitatea 1/9 da. Espaziora hiru globo jaurtitzen badira, zein da horietako bat bakarra berreskuratzeko probabilitatea?
Eta lau globo jaurtitzen badira? Eta bost…..? (“Konbinatoria” erabiltzea gomendatzen da).

17.- Herrialde bateko biztanleen %12ak gaixotasun jakin bat du. Gaixotasunaren diagnostikoa egiteko guztiz fidagarri ez den prozedura erabiltzen da, izan ere, benetan gaixorik dauden pertsonen artean positibo ematen dueneko portzentaia %90a da eta, bestalde, osasuntsu daudenen artean %5ak ere positibo ematen du. Zein da prozedurak positibo eman dioneko pertsona bat osasuntsua izateko probabilitatea?

KONBINATORIA

Matematikako arlo hau, elementu batzurekin egin daitezkeen taldeak kontatzeko erabiltzen da. hiru kasu aztertuko ditugu:

ALDAKUNTZAK

n elementu ditugu eta beraiekin *k* elementuz osaturiko taldeak egin nahi dira, talde bakoitzean elementuen arteko ordenak eragina duelarik. Zenbat egin daiteke?:

$$ {}_{n}^{k}A = n.(n-1).(n-2).\ldots.(n-k+1) $$

Adibidea. 1 , 2 , 3 , 4 , 5 zifrekin, zenbat zenbaki egin daitezke bi zifrakin, zifrak errepikatu gabe?

ALDAKUNTZAK ERREPIKADUNAK

Talde bateko elementuak errepikatu ahal dira

$$ {}_{n}^{k}A' = n^{k} $$

Adibidea. 1 , 2 , 3 , 4 , 5 zifrekin, zenbat zenbaki egin daitezke bi zifrakin?

Ariketak

1.- 21 letra dituen alfabeto batekin, zenbat silaba egin daitezke hiru letrakin:

a) silabako hiru letrak desberdinak izanik
b) “ “ “ berdinak izan daitezkelarik

2.- Literatura sariketa batean 3 sari ezberdin daude eta 12 idazlan aurkezten dira. Zenbat modu ezberdinetan egin daiteke sari banaketa?

3.- Txanpon bat hiru aldiz jaurtitzen da. Zenbat emaitza desberdin lor daitezke?

4.- Zenbat zutabe bete beharko genituzke futbol-kiniela batetan, hamabostekoa ziur asmatzeko?

5.- Lasterketa batean 12 korrikalarik parte hartzen dute. Zenbat modutan bana ditzakete urrezko, zilarrezko eta brontzezko dominak?

PERMUTAZIOAK

n elementu ditugu eta guztiak erabiliz, zenbat talde ezberdin egin daitezkeen jakin nahi da:

$$_nP = n! = n.(n-1).(n-2). \ ... \ .2.1$$

Zenbat zenbaki egin daitezke 1 , 2 , 3 , 4 eta 5 zifrekin, bostak erabiliz eta zenbaki bakoitzean zifra bakar bat ere errepikatu gabe?: $_5P = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$

Ariketak

1.- Lasterketa batean sei txirrindularik ihes egin dute eta helmugara seirak ailegatzen dira, bata bestearen atzean. Zenbat modu ezberdin daude?

2.- *Neska* hitzaren letrekin, zenbat 5 letra ezberdineko hitz egin daitezke?. Hauetatik, zenbatek izango dituzte bokal biak muturretan?

PERMUTAZIO ERREPIKADUNAK

Oro har, *n* elementuren permutazio errepikadunak, non n_1, n_2, ...,n_k errepikatzen diren hauxe da: $_nP^{n_1,n_2,\dots n_k} = \dfrac{n!}{n_1!.\,n_2!.\ ...\ .n_k!}$

Zenbat hitz desberdin idatz daitezke (esanahidunak zein esanahirik gabeak) BIRIBILA hitzaren letra guztiak erabilita?

KONBINAZIOAK

n elementu ditugu eta beraiekin *k* elementuzko taldeak egin nahi dira. Hortaz gain, taldearen elementuen ordena aldatuz gero, konbinazio bera lortuko genuke; hau da, elementuen ordenak ez luke eraginik edukiko.

$$_n^kK = \frac{_n^kA}{P_k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

Lerrokaturik ez dauden lau punturekin, zenbat zuzen eraiki daitezke?

Ariketak

1.- Bost lagunez osaturiko talde batek mendi-martxa batera joan nahi du. Martxaren arautegiaren arabera, taldeak 3 lagunekoak izan behar direla jakinik, zenbat modutara eman dezakete izena?

2.- Exagono baten erpin bakoitzean bonbila bana ipintzen da. Zenbat argijoku desberdin egin daitezke, bakoitzean 3 bonbila bakarrik piztuz?

3.- Zenbat jokaldi desberdin atera daitezke 40ko karta-sorta batetik lau karta hartuz gero?

KONBINATORIA ETA PROBABILITATEA

Gertaera kopurua oso handia denean, *aldeko kasuak* eta *kasu guztiak* kontatzeko konbinatoria erabiltzea gomendatzen da.

Ariketak

1.- Urna batean 1etik 6ra zenbakiturik dauden 6 bola daude. Zein da bolak, banan banan atareaz, 2-3-1-4-5-6 sekuentzia ateratzeko probabilitatea?

2.- Lotoa dela eta , apostu bat eginez gero, zein da asmatzeko dagoen probabilitatea?

3.- Txanpon bat aidera botatzen da 6 aldiz. Zein da seirak aurpegiak ateratzeko probabilitatea?

4.- Udaletxe batean *A* alderdiko 5 zinegotzi daude, *B* alderdiko 4 zinegotzi eta C alderdiko 4 zinegotzi . Zoriz eta bata bestearen atzetik hiru zinegotzi aukeratzean, zein da hirurak *A* alderdikoak izateko probabilitatea? Eta alderdi bakoitzetik bat izateko probabilitatea?

5.- 1 , 2 eta 3 zenbakiekin osa daitezkeen hiru zifratako zenbaki guztien artean (zifrak errepikatu ahal dira), zoriz bat aukeratzen da. Kalkulatu zenbaki horren zifren batura 6 izateko probabilitatea

6.- A, B, C, D, E eta *F* hizkien permutazio guztien artean, zoriz bat aukeratu da. Kalkulatu bokalak ondoz-ondo gelditzeko probabilitatea.

7.- Dado bat hiru aldiz jaurtitzen da aidera. Zein da puntuazioen batura 4 izateko probabilitatea?

8.- Dado bat hiru aldiz jaurtitzen da. Lehen bi jaurtiketen puntuazioen batura A da , eta hirugarrenaren jaurtiketarena B da. Zein da A eta B berdinak izateko probabilitatea?

BANAKETA BINOMIALA ETA NORMALA

Ariketa 1

Kaxa batean 3 bola gorri eta 7 berde daude. Zoriz bola bat ateratzen da eta ondoren birsartzen da kaxara. Gauza bera, bost aldiz eginda, zein da 3 bola gorri ataratzeko probabilitatea?

Kasu bat GGGBB litzateke. Bere balioa: $\frac{3}{10}\frac{3}{10}\frac{3}{10}\frac{7}{10}\frac{7}{10}$

Bosteko multzo horretan, zenbat modutara aurkeztu daitezke hiru bola gorri? : $C_{5,3}$

Beraz, soluzioa: $\binom{5}{3}\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^2$

Ariketa 2

Herri bateko biztanleen %20 ilehoriak dira. Sei pertsonako lagin bat hartu eta kalkula itzazu probabilitate hauek:

a) Ilehori bi egotea
b) Gutxienez lau ilehori

a) Ilehori bi egotearen kasu bat, RRMMMM litzateke, bere balioa (0,2).(0,2).(0,8).(0,8).(0,8).(0,8) izanik.
Guztira, zenbat kasu? : $C_{6,2}$
Beraz, soluzioa: $\binom{6}{2}(0,2)^2(0,8)^4$

b) Gutxienez lau ilehori::
4 ilehori: Adibide bat RRRRMM da eta bere balioa $(0,2)^4.(0,8)^2$
Kasu guztiak: $C_{6,4}$
Soluzioa: $\binom{6}{4}(0,2)^4(0,8)^2$
5 ilehori: Adibide bat RRRRRM da eta bere balioa $(0,2)^5.(0,8)^1$
Zenbat kasu?: $C_{6,5}$
Soluzioa: $\binom{6}{5}(0,2)^5(0,8)^1$
6 ilehori: RRRRRR. Balioa: $(0,2)^6$
Kasu kopurua: $C_{6,6}$; hau da, bakarra
Soluzioa: $\binom{6}{6}(0,2)^6(0,8)^0 = (0,2)^6$

Azken soluzioa: $\binom{6}{4}(0,2)^4(0,8)^2 + \binom{6}{5}(0,2)^5(0,8)^1 + \binom{6}{6}(0,2)^6(0,8)^0$

BANAKETA BINOMIALA

Adibidea : Matematikako irakasle batek 25 urte darama bere asignatura gainditzen duten ikasleen kopurua apuntatzen, eta ikusi du %65 ikaslek gainditu ohi duela. 20 ikaslek osaturiko lagin bat hartuz gero, zein da probabilitatea

- 5-ek gainditzea
- 4 baino gutxiagok gainditzea

♦ Esperimentu honek (aurreko biek bezalaxe) ezaugarri hauek ditu:

- Ikasle bakoitzarentzat bi emaitza hauek baino ez dira posible:
  A = {ikasgaia gainditzea} eta A' = {ez gainditzea}
- Ikasle bakoitzat ateratzen duen emaitza ez da besteek ateratzen dutenen menpekoa
- *A*-ren probabilitatea, *p*-ren bidez adierazten duguna, ez da frogaldi batetik bestera aldatzen eta p = p(A) = 0,65 da. Eta, aurkako gertaeraren probabilitatea ere (deitu diezaiogun "*q*") konstantea da: : q = p(A') = 0,35

♦ Jo dezagun esperimentuaren *n* frogaldi egin ditugula eta *p* dela *A* gertaeraren probabilitatea; orduan, esperimentu horri lotutako *aldagai aleatorio binomialari*, **B(n,p)** deituko diogu ; adibide honetan, *B(20,0.65)* izango da Aldagai hori **diskretua** da, *0 , 1 , 2 , 3 ,......, 20* balioak har baitezake bakarrik

♦ Aldagai horrekin lotuta, bi kalkulu hauek egingo ditugu:

I) "*r*" ikaslek gainditzea: $\binom{n}{r} p^r . q^{n-r}$. "*Probabilitate-funtzioa*"

Esaterako, 20tik 5ek gainditzea: $\binom{20}{5}(0,65)^5(0,35)^{15}$

II) 4 ikasle baino gutxiagok gainditzearen probabilitatea:
p(x=3)+p(x=2)+p(x=1)+p(x=0) "*Banaketa-funtzioa*
Bere balioa zera da:

$$\binom{20}{3}(0,65)^3(0,35)^{17} + \binom{20}{2}(0,65)^2(0,35)^{18} + \binom{20}{1}(0,65)^1(0,35)^{19} + \binom{20}{0}^5(0,35)^{20}$$

Adibidea 2
Test moduko azterketa batek hiruna erantzun dituzten hamar galdera dauzka, eta erantzunetako bat bakarra da zuzena. Ezer ikasi ez duen ikasle batek, zoriz erantzungo duela erabaki du

a) Zein da sei galdera asmatzeko probabilitatea?
b) Eta bat ere ez asmatzekoa?

Ikusten denez, asmatutako erantzunak adierazten duen *X* aldagaiak, banaketa binomialaren eredua betetzen du, eta berorren ezaugarriak *n=10* eta *p=1/3* dira. Beraz:

a) Sei galdera asmatzeko probabilitatea: $P(X=6) = \binom{10}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0{,}0569$

b) Galdera bat ere ez asmatzeko probabilitatea: $P(X=0) = \binom{10}{0}^6\left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 0{,}0173$

ARIKETAK

1.- Makina batek egiten dituen mila piezako 12 akastunak dira. Aurki itzazu 40 pieza aztertu eta honakoak gertatzeko probabilitatea:

a) Bi akastunak agertzea
b) Akastunik ez agertzea

2.- Azterketa baten emaitzen arabera, eskualde jakin bateko biztanleen %20-ren bizi-baldintza sozioekonomikoak onartezinak dira. Populazio horretako 8 kide hartuta, aurki ezazu lau baldintza onartezinetan bizitzeko probabilitatea.

3.- Tiratzaile batek eskopetaz tiroa asmatzeko probabilitatea 0,8 da. Hiru tiro eginda, zein da:

a) Gutxienez tiro batekin asmatzea
b) Bi tirokin asmatzea
c) Eta 6 tiro eginda, zein da 4 aldiz asmatzearen probabilitatea?

4.- Lehiaketa bat irabazteko probabilitatea 1/5 da. Horrelako sei leihaketetan parte hartuz gero, zein da lautan irabazteko probabilitatea?

PROBABILITATEA (Errepaso ariketak)

1.- Bi dado jaurtitzen dira aidera. Zein da puntuen batura 7 izatearen probabilitatea? Eta bigarren jaurtialdian lorturiko puntuazioa lehenengoan baino handiagoa izatearena?

2.- Bi dado jaurtitzen dira. Kalkulatu:

a) Puntuazio bat bikoitia eta bestea bakoitia izateko probabilitatea
b) Bi puntuazioen batura 7 dela jakinik, puntuazioren bat bikoitia izateko probabilitatea

3.- Berrogei karta dauzkan baraja batetik zoriz eta aldi berean bi karta atera dira. Zein da bateko bat eta errege bat ateratzearen probabilitatea?

4.- Adin bera duten gizon bat eta emakume bat 20 urterekin ezkondu dira, eta 70 urtera ailegatzeko probabilitateak hauexek dira: 0,76 gizonarentzat eta 0,82 emakumearentzat.

70 urterekin, kalkula ezazu:

a) Biak bizirik egoteko probabilitatea
b) Bat ere bizirik ez egoteko probabilitatea
c) Bakarrik emakumea bizirik egoteko probabilitatea
d) Gutxienez bietatik bat bizirik egoteko probabilitatea.

5.- Lantegi baten 200 langile daude, 100 gizonezko eta 100 emakumezko. Erretzaileak 40 gizonezko eta 35 emakumezko dira. Langile bat zoriz aukeratzen badugu, kalkulatu:

a) Gizonezkoa izateko probabilitatea
b) Ez erretzailea izateko probabilitatea
c) Gizonezkoa eta erretzailea
d) Aukeratutakoak ez badu erretzen, zein da emakumezkoa izateko probabilitatea?
e) Aukeratutakoak erretzen badu, zein da gizonezkoa izateko probabilitatea?

6.- A kutxan zortzi bola daude 1etik 8ra zenbakituta, eta B kutxan 5 bola daude 1etik 5era zenbakituta. Kutxa bakoitzetik bola bat ateratzen da eta bi bolen zenbakien batura 3ren multiploa izan da. Zein da A kutxatik ateratako bolen zenbakia 1 izateko probabilitatea?

7.- Hiri baten %55 gizonezkoa da eta hauetatik % 15 paroan dago. Eta emakumeen artean %25 paroan dago. Pertsona bat hautatuz, zein da paroan egoteko probabilitatea? Eta paroan dagoela jakinik, zein da gizonezkoa izateko probabilitatea?

8.- Demagun *A* eta *B* gertaerak ditugula eta p(A) = $\frac{2}{7}$, p(B) = $\frac{1}{2}$ eta $p(A \cap B) = \frac{1}{5}$ direla. Kalkulatu:

$a)\ p(\overline{A} \cap B)$; $b)\ p(A \cap \overline{B})$; $c)\ p(A \cap (A \cup B))$; $d)\ p(A \cup B)$

$e)\ p(A/B)$; $f)\ p(B/A)$; $g)\ p(A - B)$; $h)\ p(\overline{A \cap B})$

i) *A* eta *B* gertaerak independenteak al dira?

9.- A eta B gertaerak independenteak dira. A gertatzeko probabilitatea 2/5 da, eta A eta B biak batera gertatzeko probabilitatea 1/5 da. Zein da ez A ez B gertatzeko probabilitatea? Eta, A bai eta B ez gertatzearen probabilitatea?

10.- Hiru ontzi ditugu: *A*, *B* eta C.
A ontzian bainilazko 3 gaileta eta txokolatezko 2 gaileta daude; *B*-n 3 txokolate eta 2 bainilakoak eta *C*-n 2 txokolate eta 1 bainilazkoa.

a) Ontzi bat zoriz aukeratzen dogu eta gaileta bat hartu. Zein da txokolatezkoa izateko probabilitatea?
b) Pertsona bati txokolatezko gaileta bat eman diote. Zein da 2. ontzikoa izateko probabilitatea?

11.- Ikastetxe bateko batxilergoko ikasleek atzerritar hizkuntza ikasterakoan, ingelesa ala frantsesa aukera dezakete. Kurtso batean, %90 ingelesa ikasten ari da eta gainerakoa frantsesa. Ingelesa ikasten ari direnen artean %30 mutilak dira, eta frantsesa ikasten ari direnen artean %40 mutilak dira. Ikasle bat zoriz hautaturik, zein da neska izateko probabilitatea?

12.- Bi poltsa ditugu *A* eta *B*.
A poltsan 7 bola zuri eta 3 beltz daude , eta *B* poltsan 1 zuria, 2 beltz eta 7 gorri. Dado bat jaurtiz, 1 edo 3 ateratzen bada *A*tik aterako dugu bola, eta 2, 4, 5 edo 6 ateraz *B* poltsatik. Kalkulatu bola gorria ateratzeko probabilitatea. Bola beltza dela jakinda, zein da *A* poltsakoa izateko probabilitatea?

13.- Torlojuak egiten dituen lantegi batean A makinatik kopuru osoaren %40a ateratzen da eta B makinatik %60a. A makinak egindako torlojuetatik %10a akastuna da eta B makinak egindakoetatik %20a. Zoriz torloju bat aukeratuz gero akastuna dela gertatzen bada, zein da A makinak egina izateko probabilitatea?

14.- Poltsa batek 2 bola zuri eta 5 beltz ditu. Beste poltsa batek 5 bola zuri eta 2 beltz. Lehenengo poltsatik bola bat ateratzen da eta bigarren poltsan sartzen da. Ondoren, bola bat ateratzen da bigarren poltsatik. Zein da beltza izatearen probabilitatea?

15.- Demagun A kutxak 2 bola zuri eta 2 beltz dituela eta B kutxak, aldiz, 4 bola beltz. A eta B kutxetatik zoriz bola bana ateratzen da eta trukatu egiten dira. Ondoren A kutxatik bola bat ateratzen bada, zein da bola hori zuria izateko probabilitatea?

16.- Ikastetxe bateko ikasleen %55 futbolean jokatzen dute, %30 pilotan eta %15 bietan jokatzen dute. Zoriz ikasle bat aukeratuko bagenu, zein da geratera hauen probabilitateak?:

a) Bietako batean jokatzekoa
b) Pilotan bakarrik jokatzekoa
c) Futbolean jokatzen badu, pilotan ere jokatzekoa

17.- Kaxa batean 5 bola gorri eta 4 zuri daude. Bi bola ateratzen dira elkarren segidan, birsartu gabe.

a) kalkulatu biak kolore berekoak izateko probabilitatea
b) Badakigu bigarrena zuria dela. Zein da lehenengoa ere zuria izateko probabilitatea?
c) Eta hiru bola ateratzen badira, zien da bi gorri eta zuri bat ateratzearen probabilitatea?
d) Eta bost bola ateratzen badira, hiru gorri izatearena?

18.- Ospitale batean 10 gaixo daude: 3 neurotiko, 5 psikopata eta 2 eskizofreniko. Hiru gaixo zoriz aukeratzen baditugu, zein da:

a) Hirurak gaixotasun desberdina edukitzeko probabilitatea?
b) Eta hirurak gaixotasun bera edukitzeko probabilitatea?

19.- Azterketa batek 10 galdera ditu. Horiei bai ala ez bakarrik erantzun daiteke. Eman dezagun azterketa egin behar duenak ez dakiela galdera bat bera ere ez. Kalkulatu:

a) Lau galdera asmatzeko probabilitatea
b) Gutxienez bat asmatzea

20.- Txanpon bat aidera botatzen da 6 aldiz. Zein da bi aurpegi ateratzeko probabilitatea?

21.- Berrogei karta dauzkan baraja batetik zoriz eta aldi berean lau karta ateratzen dira. Zein da laurak palo desberdinekoak izatearen probabilitatea?

22.- 1etik 6ra zenbakituta dauden hiru dado jaurtitzen dira. Kalkula ezazu ateratzen diren puntuazioen batura 6 baino txikiagoa izateko probabilitatea. Eta hiruretan puntuazio bera ateratzearena?

23.- 1, 2, 3, 4 eta 5 zenbakiak zoriz ordenatzen dira, Zein da 2 eta 3a elkar ondoan eta ordena horretan egotearen probabilitatea?

24.- Dado bat hiru aldiz jaurtitzen da, eta hirugarren jaurtiketan 5 atera da. Zein da lehenengo jaurtiketan ere 5 ateratzearen probabilitatea?

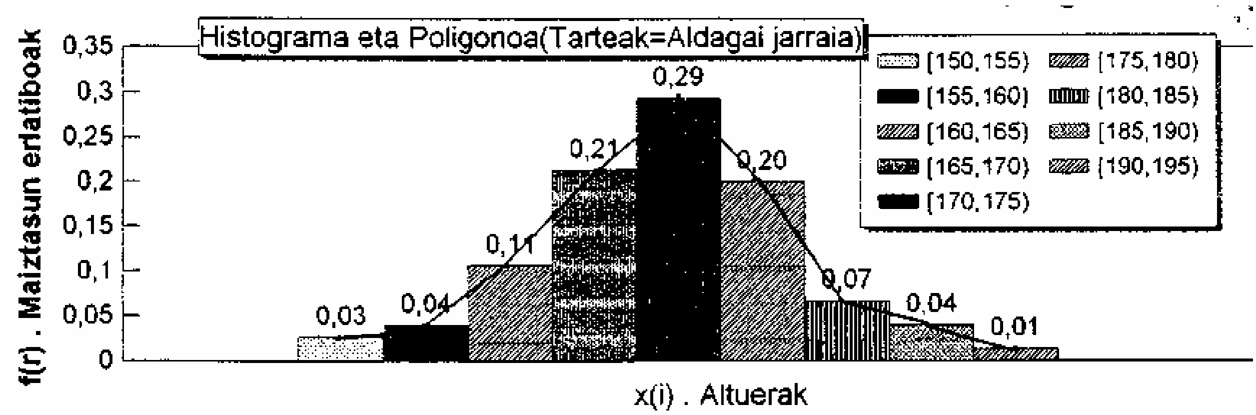
ALDAGAI ALEATORIO JARRAIEN BANAKETA

Batxilergoko 2. mailako 75 ikasleen altuerak ondoko taulan dituzue:

x(i)	f(i)	f(r)
[150,155)	2	0,03
[155,160)	3	0,04
[160,165)	8	0,11
[165,170)	16	0,21
[170,175)	22	0,29
[175,180)	15	0,20
[180,185)	5	0,07
[185,190)	3	0,04
[190,195)	1	0,01
	75	1

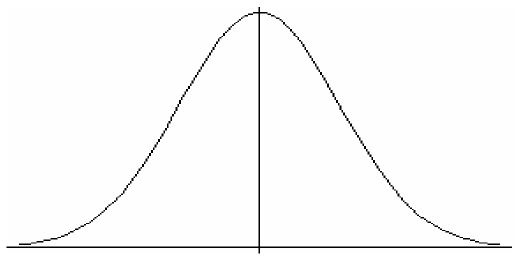
Altuera, aldagai aleatorio jarraia da.

Hona, banaketa horren maiztasun erlatiboen histograma eta poligonoa.



Laukizuzen bakoitzaren azalerak tarte horren maiztasun erlatiboa adierazten du, eta laukizuzen guztien azaleren baturak banaketako maiztasun erlatiboen batura; beraz, **1** izango da.

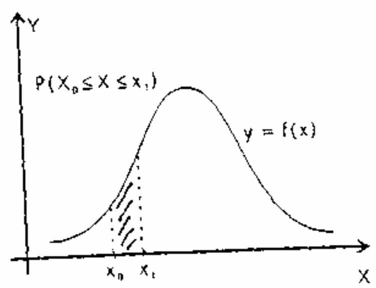
Lagintzat hartzen dugun populazioa handitzen doanean, esaterako Euskal Herriko batxilergo 2. mailako ikasleak,..., eta aldagaiaren tarteak txikiagotzen, esaterako [155,156], [155,155.5],..., maiztasun erlatiboen histogramaren poligonoa honako kurba bat izatera iritsiko da.



75 ikasleen altuerakin lortutako maiztasun erlatiboen histograma eta poligonoa, kurba horren kasu konkretu bat dela har genezake. Probabilitatearen kontzeptua, maiztasun erlatiboen limitea dela kontutan hartuz, azken kurba hau ez da maiztasun- banaketa, <u>aldagai aleatorio jarraien probabilitate-banaketa baizik</u>

Maiztasun erlatiboen edo laukien batura **1** den bezala, $y = f(x)$ kurbak mugatzen duen azalera ere **1** da.

Aldagaiak, $[x_o , x_1]$ tarteko balioak hartzeko duen probabilitatea eta tarte horri dagokion kurba zatiaren azpian dagoen azalera gauza bera da.



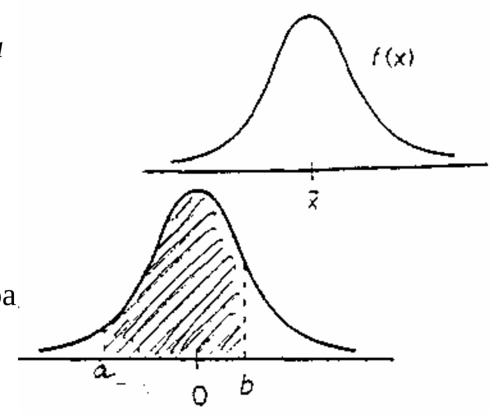
BANAKETA NORMALA

Denbora luzean, banaketa-kurba guztiak antzerakoak zirela pentsatu zen eta banaketa normala edo kurba normala izena hartu zuen. Kurba edo funtzio horren formula hauxe da:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} \qquad \bar{x} = batezbestekoa \quad \sigma = desbidazio\ estandarra$$

Bizitzako hainbat arlotan (Pedagogia, Psikologia, Biologian,...), fenomeno askok lege normal hau jarraitzen dute

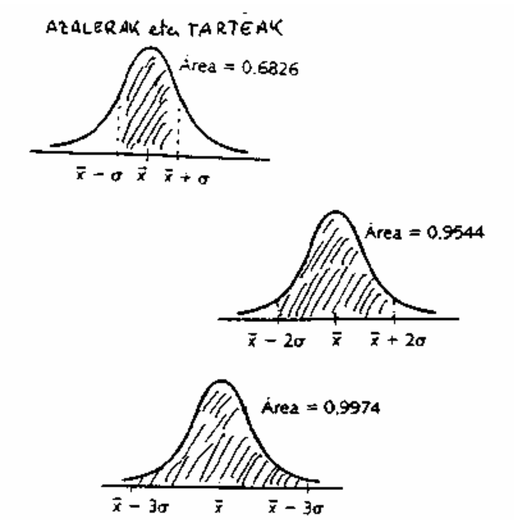
Banaketa normalaren grafikoa, *Gauss-en kanpaia* izenarekin ezagutzen da. Bi parametro hauen bidez determinatzen da: *batezbestekoa* $(\bar{x})$ eta *desbidazio estandarra* (σ) eta honela adierazten da: $N(\bar{x},\sigma)$



f(x) funtzioak, *OX* ardatzak eta *x=a* eta *x=b* zuzenek mugatzen duten azalera, *X* aldagai aleatorioa *[a,b]* tartean aurkitzearen probabilitatea da.

Gauss-en kanpaia:

- Zuzen erreal osoan dago definituta eta jarraia da
- Maximoa du batezbeste aritmetiko $(\bar{x})$ puntuan
- Simetrikoa da
- Inflexio-puntuak, $\bar{x}-\sigma$ eta $\bar{x}+\sigma$ dira



Jarrai dezagun 75 ikasleen altueren adibidearekin.

Kalkula ditzagun $\bar{x}$ = 171,7 eta σ = 7,8

N(171.7 , 7.8) banaketa normalaren legea jarraitzen du.

$(\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma)$ tartean, gutxi gorabehera populazioaren %68,26a dago

$(\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma)$ tartean %95,4a

$(\bar{x}-3\sigma, \bar{x}+3\sigma)$ tartean %99,7a

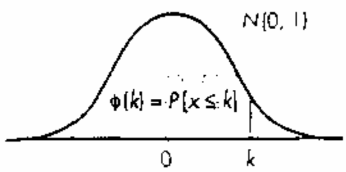
<u>Banaketa normal estandarra: *N(0,1)*. Taulak</u>

Banaketa normal guztien artean, badago bat interes berezia duen, *banaketa normal estandar* izenaz ezagutzen duguna. Berorren abantailarik handiena tabulaturik egotea da, eta horri esker, erraz kalkula ditzakegu aldagaiaren balio desberdinei lotutako probabilitateak

$N(\bar{x},\sigma)$ banaketa, $\bar{x}=0$ eta $\sigma=1$ denean ; hau da **N(0,1)**

■ *N*(0, 1) TAULA NORMALAREN ERABILERA

N(0, 1) banaketan, aldagaia *z* letraren bitartez adierazten da. Ondoren agertzen diren taulek $P[z \le k]$ probabilitateak emango dizkigute 0 eta 4 bitarteko *k*-ren balioentzat, ehunenetik ehunenera. Probabilitate horiei $\phi(k)$ esaten zaie:



$$\Phi(k) = P[z \le k], \quad z \text{ banatuko da } N(0,\ 1)$$

UNITATEAK ETA HAMARRENAK	EHUNENAK									
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6065	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,9485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,9962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

k-ren balioa honela aurkitzen da:

Unitateak eta hamarrenak ezkerreko zutabean.

Ehunenak goiko lerroan.

Taulak ematen digun zenbakia honen balioa da:

$$\phi(k) = P[z \le k]$$

■ Adibideak

$P[z \le 0{,}45] = \phi(0{,}45) =$
$= 0{,}6736$

$P[z \le 1{,}2] = \phi(1{,}20) =$
$= 0{,}8849$

$P[z \le 1] = \phi(1{,}00) =$
$= 0{,}8413$

Modu berean, $\phi(k)$ probabilitatearen balioa ezagututa, *k*-ren balioa jakin dezakegu.

■ Adibideak

$P[z \le k] = \phi(k) =$
$= 0{,}7190 \rightarrow k = 0{,}58$

$P[z \le k] = \phi(k) =$
$= 0{,}8643 \rightarrow k = 1{,}1$

$P[z \le k] = \Phi(k) =$
$= 0{,}5560 \rightarrow k \simeq 0{,}14$

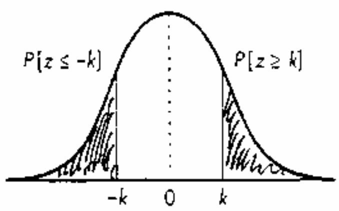
Gogoan izan aldagai jarraia duen banaketan probabilitate puntualak nuluak direla:

$$P[x = k] = 0. \text{ Beraz, } P[x \le k] = P[x < k]$$

■ PROBABILITATEEN KALKULUA $N(0, 1)$ BANAKETAN

- $k \geq 0$ bada, $P[z \leq k] = P[z < k] = \Phi(k)$ probabilitateak zuzenean aurki daitezke tauletan.
- $P[z \geq k] = 1 - P[z < k] = 1 - \Phi(k)$
- Abzisa negatiboen kasuan $P[z \leq -k] = P[z \geq k] = 1 - \Phi(k)$

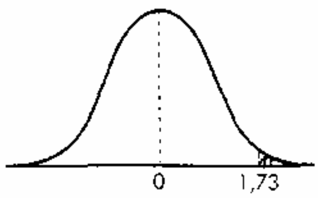
Gainerako probabilitateak goiko horietatik abiatuta lortu daitezke hurrengo adibideetan ikusten den moduan.



ADIBIDEAK

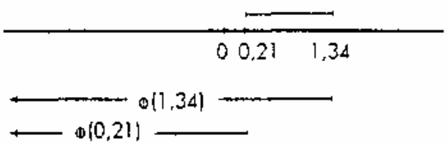
1. $P[z \geq 1{,}73] = 1 - P[z < 1{,}73] =$

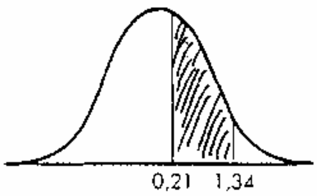
$= 1 - \Phi(1{,}73) = 1 - 0{,}9582 = 0{,}0418$



2. $P[0{,}21 < z \leq 1{,}34] = \Phi(1{,}34) - \Phi(0{,}21) =$

$= 0{,}9099 - 0{,}5832 = 0{,}3267$





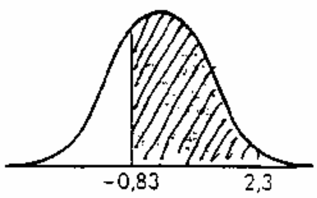
3. $P[-0{,}83 < z \leq 2{,}3] = P[z \leq 2{,}3] - P[z \leq -0{,}83]$

$P[z \leq -0{,}83] = P[z \geq 0{,}83] = 1 - \Phi(0{,}83) =$

$= 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033$

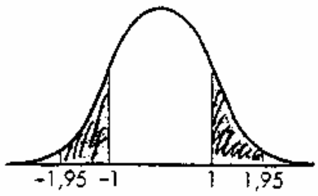
$P[-0{,}83 < z \leq 2{,}3] = \Phi(2{,}3) - 0{,}2033 = 0{,}9893 - 0{,}2033 =$

$= 0{,}7860$



4. $P[-1{,}95 < z < -1] = P[1 < z < 1{,}95] = \Phi(1{,}95) - \Phi(1) =$

$= 0{,}9744 - 0{,}8413 = 0{,}1331$



ARIKETAK

1 Aurkitu: a) $P[z > 1{,}3]$ b) $P[z < -1{,}3]$ c) $P[z > -1{,}3]$
d) $P[1{,}3 < z < 1{,}96]$ e) $P[-1{,}96 < z < -1{,}3]$ f) $P[-1{,}3 < z < 1{,}96]$
g) $P[-1{,}96 < z < 1{,}96]$ h) $P[-1 \leq z \leq 1]$ i) $P[-2 \leq z \leq 2]$
j) $P[-3 \leq z \leq 3]$ k) $P[-1{,}64 \leq z \leq 1{,}64]$ l) $P[-2{,}57 \leq z \leq 2{,}57]$

Aldagaiaren tipifikazioa. Probabilitateen kalkulua $N(\bar{x},\sigma)$ banaketan

$N(\bar{x},\sigma)$ edozein banaketa normal batean probabilitateak kalkulatzeko, N(0,1) banaketa normal estandarrerako eman berri ditugun kalkuluak erabili ahal izango ditugu, hori baita, esan den bezala, banaketa normal tabulatu bakarra.

Horretarako, *aldagaiaren tipifikazioa* egingo dugu; hau da, $N(\bar{x},\sigma)$ banaketako *X* aldagaia N(0,1) banaketara pasatuko dugu *Z* aldagai berri baten bidez

Formula:

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

Adibidea 1

Emanik N(10 , 2) banaketa normaleko X aldagai bat. Kalkula dezagun $P(X \leq 11)$

X aldagaia tipifikatuz: $Z = \frac{X - 10}{2}$ zera gertatzen da:

$$P(X \leq 11) = P(Z \leq \frac{11-10}{2}) = P(Z \leq \frac{1}{2}) = P(Z \leq 0{,}5) = 0{,}6915$$

Adibidea 2

Demagun *N(66 , 8)* banaketa. Kalkulatu:

a) P(x < 70) ; b) P(x > 80) ; c) P(70 < x < 80)

$x \; da \; N(66\,,8) \quad \leftrightarrow \quad z \; da \; N(0\,,1)$

$70 \quad \leftrightarrow \quad \frac{70-66}{8} = 0{,}5$

$80 \quad \leftrightarrow \quad \frac{80-66}{8} = 1{,}75$

$P(x < 70) \quad \leftrightarrow \quad P(z < 0{,}5) = 0{,}6915$

$P(x < 80) \quad \leftrightarrow \quad P(z < 1{,}75) = 0{,}9599 \quad ; \quad P(z > 1{,}75) = 1 - 0{,}9599 = 0{,}0401$

$P(70 < x < 80) \quad \leftrightarrow \quad P(0{,}5 < z < 1{,}75) = 0{,}9599 - 0{,}6915 = 0{,}2684$

Soluzioak:

a) $P(x < 70) = 0{,}6915$; b) $P(x > 80) = 0{,}0401$; c) $P(70 < x < 80) = 0{,}2684$

Adibidea 3

Automobil batek arabiltzeko moduan iraun dezakeen denborari buruzko azterketa batean, 16 urteko batezbestekoa eta bi urte eta erdiko desbidazio estandarra atera dira. Aldagaia normal banatzen dela pentsatu eta kalkulatu:

a) 19 urtetik gorako iraupena izateko probabilitatea.
b) 14 eta 17 urte bitarteko iraupena duten automobilen portzentaia

Ebazpena:

N(16 , 2’5) banaketa, estandarra ez denez, tipifikatu egin beharko dugu:

a) 19 $\leftrightarrow$ $\dfrac{19-16}{2'5}=1'2$

$P(z\geq 1'2)=1-p(z\leq 1'2)=1-0'8849=0'1151$

b) 14 $\leftrightarrow$ $\dfrac{14-16}{2'5}=-0'8$

17 $\leftrightarrow$ $\dfrac{17-16}{2'5}=0'4$

$P(z\leq 0'4)-P(z\leq -0'8)=0'6554-(1-0'7881)=0'4435$

Portzentaietan **%44,35**

ARIKETA

N(173 , 6) banaketan, aurkitu ondoko probabilitateak:

a) $P(x\leq 173)$; b) $P(x\geq 180'5)$

c) $P(161\leq x\leq 180'5)$; d) $P(161\leq x\leq 170)$

Bitarte karakteristikoak

Orain arte N(0 , 1) probabilitatean *z* bitarte finitu edo infinituan dagoenean, zein probabilitate duen kalkulatzen ikasi dugu; hau da, tauletara zuzen jotzen ikasi dugu.

Orain kontrakoa egingo dugu: bitarte mota edo bere probabilitatea emanda, bitartearen muturrak aurkitu beharko ditugu. Ikus ditzagun adibide batzuk.

1. adibidea. *k*-ren zein baliorekin betetzen da *p(z < k) = 0,85* ?

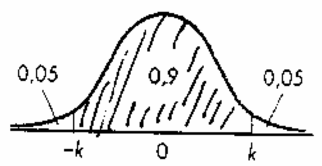
Taula barruan, 0,85 balioa aurkitzera joanda, $\varphi(1'03)=0'8485$ eta $\varphi(1'04)=0'8508$ balioen artean dagoela ikusten da. Hurbilen dagoena bigarrena da; beraz, soluzioa zuzenean eman daiteke, modu honetan: $P(z<k)=0'8508 \quad \rightarrow \quad beraz,\ k=1'04$

2. adibidea *k*-ren zein baliorekin betetzen da *p(-k < z < k) = 0,9* ?

Bitartearen barruan 0’9ko azalera badago, kanpoan 0’1ekoa egongo da. Bitartea simetrikoa denez, mutur bietako bakoitzaren azalera 0’05 izango da. Beraz:

$P(z>k)=0'05 \quad \rightarrow \quad P(z\leq k)=0'95$

Taulan zera aurkitzen dugu: $\varphi(1'64)=0'9495$ eta $\varphi(1'65)=0'9505$.



Beraz, *k*-ri 1’64 eta 1’65 balioen erdiko balioa emango diogu; hau da, *k = 1’645*

p(-1’645 < z < 1’645) = 0,9

[-1’645 , 1’645] bitartea aurkitu dugu, simetrikoa 0-rekiko, eta bitarte horren barruan guztiaren azaleraren *%90* dago.

3. adibidea

Matematikako azterketa bat 0,1,2,...,10 puntuatzen da, 10 galderen erantzun zuzen kopuruaren arabera. Batezbesteko nota 6,7 izan da eta desbidazio tipikoa 1,2. Jakinik banaketa normalari jarraitzen zaiola, aurkitu:

a) gelako %10 nota kaskarrenen arteko notarik altuena
b) gelako %10 nota hoberenen arteko notarik baxuena

a) $0'10 = p[X \leq x] = p[Z \leq \frac{x-6'7}{1'2}]$

0´1 probabilitate-balioa ez da agertzen N(0,1) banaketa taulan. Horregatik, 1-0´1=0´9 balioa hartzen dugu eta beronek (zehatzago esanda, $0'8997 \approx 0'9$), Z aldagaiak, 1´28 baino balio txikiagoa edo berdina hartzearen probabilitatea adierazten du. Hau da, $p(z \leq 1'28) = 0'9$, N(0,1) banaketan

0´1-i dagokiona 1´28ren simetrikoa litzateke; hau da, z= -1´28

Hori dela ta, $\frac{x-6'7}{1'2} = -1'28 \rightarrow x = 5{,}16$

Gelako %10 nota okerrenen notarik altuena, gutxi gorabehera, **5,16** da.

b) Gelako %10 nota hoberenen notarik txikiena.
Ezker aldean, gelako %90ak gelditzen dira.
0´9 edo 0´8997 probabilitate-balioa, N(0,1) banaketaren taulan, z=1´28-ri dagokio

Beraz, $\frac{x-6{,}7}{1{,}2} = 1{,}28 \rightarrow x = 8{,}24$

Gelako %10 hoberenen notarik baxuena **8,24** da.

ARIKETAK

1.- *X* zorizko aldagaia , N(20,4) banaketari dagokion izanik, kalkula itzazu:

$$p(15 \leq x \leq 21) \quad ; \quad p(x \leq 26)$$

2.- *X* aldagai aleatorio jakin batek *N(500 , 100)* banaketari jarraitzen dio. Aldagai horren zer baliok uzten du bere eskuinean populazioaren %40a ?

3.- Populazio batean, gizonen eta emakumeen pisuak N(70,8) eta N(60,6) banaketa normalei jarraitzen zaizkie hurrenez hurren. Zoriz aukeratzen dira gizon eta emakume bat. Kalkulatu ondorengo probabilitateak:

a) Gizonak 78 kg. baino gehiago pisatzea
b) Emakumeak 51 kg. baino gutxiago pisatzea
c) Emakumearen pisua 57 kg baino txikiagoa edo 72 kg baino handiagoa izatea
d) Gizonaren pisua "*a*" kg. baino txikiagoa da 0,73-ko probabilitateaz. Zenbat da "*a*"?

Sol.: a) 0,1587 ; b) 0,0668 ; c) 0,3313 ; d) 74,8

4.- Demagun umeei lehenengo hortza atera arte igarotzen den denbora (hilabetetan) neurtzen duen zorizko aldagaia N(7´5,1´5) banaketari jarraitzen zaiola. Kalkula ezazu ume baten hortzak:

a) Urtebete pasatu ondoren ateratzeko probabilitatea
b) 5 hilabete baino lehenago
c) Zazpigarren hilabetean (probabilitate puntuala)

5.- Telebista baten iraupena 4´6 urtekoa da, desbidazio tipikoa 1´6 urtekoa delarik. Saltzaileek urtebeteko garantia ematen dute, hots, epe horretan telebista hondatzen bada, aldatuko dizute aparailua errekargurik gabe.
Zenbatekoa da erreklamazioa egiteko dagoen probabilitatea?. Kontsidera dezagun telebistaren iraupena banaketa normalari darraiola. (Sol.: 0,0122)

6.- Enpresa batek, astean 1.000.000 botila ekoizten ditu. Botilen pisuak $\bar{x} = 1.200$ gr. eta $\sigma = 10$ gr. parametroetako banaketa normalari jarraitzen zaizkio. Kalkula ezazu astebetean

a) 1225 gr. baino gehiago pisatzen duten botilen kopurua
b) 1195 eta 1215 gr. tarteko pisua duten botilen kopurua

7.- Oposaketa- azterketa baten kalifikazioen batezbestea 6´5 da eta desbidazio tipikoa 1´6. Oposaketa honetan %10 hoberenak soilik lor dezake plaza. Zein da plaza lortzeko atera behar den gutxienezko nota?

8.- Herrialde jakin batean, urteko diru-sarrerek batezbestekoa 200.000 euro eta desbideratze tipikoa 8.000 euro duen banaketa normala jarraitzen dute. Pobreen proportzioa %4 bada eta aberatsena %2a, zein dira pobreziaren muga eta aberastasunaren muga zehazten dituzten urteko diru-sarrerak?

BANAKETA BINOMIALA, NORMALARI HURBILTZEN ZAIONEAN

Txanpon bat 200 aldiz jaurtiz gero, 80 aurpegi baino gehiago ateratzearen probabilitatea honela lortuko genuke:

P(X=81) + P(X=82) + ... + P(X=200)

Ikusten denez, banaketa binomialaren bidezko kalkulu hori luzeegia da, ia ezinezkoa:

$$\binom{200}{81}0{,}5^{81}.0{,}5^{119}+\binom{200}{82}0{,}5^{82}.0{,}5^{118}+\ldots+\binom{200}{200}0{,}5^{0}.0{,}5^{200}$$

Modu errazago bat aurkitu nahi dugu, normalaren bidez hain zuzen.

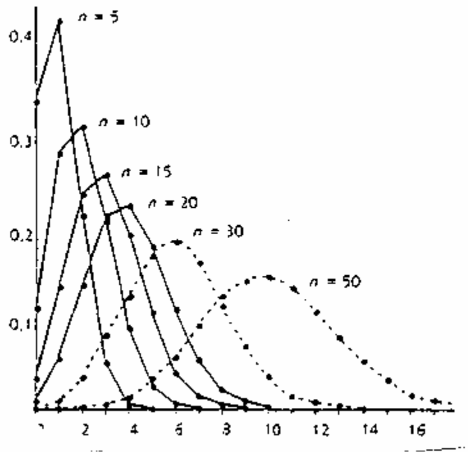
Aurreko adibidean 200 frogaldi egin dira *(n = 200*). Baiezkoa gertatzearen probabilitatea *p = 0,5* da eta kontrakoa gertatzearena *q = 1-p = 1- 0,5 = 0,5*.

Banaketa binomialaren parametroak hauek dira:

Batezbestekoa: $\bar{x} = n.p = 200.0{,}5 = 100$

Desbidazio tipikoa: $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{200.(0.5).(0.5)} = 7.07$

Banaketa binomial batek, normalaren geroz eta antz handiagoa hartuko du, baldin *n.p* biderkadura handituz badoa



np eta *nq*, biak 3 baino handiagoak direnean, hurbilketa nahiko ona da. 5etik gorakoak badira, hurbilketa ia-ia osoa da

Ezker aldean, *B(n, 0.2)* banaketari dagokion hurbilketa ikus dezakegu grafikoki. *n*-ren bailoak handituz gero, kurbek, Gauss-en kanpaiaren itxura hartzen dute

np>3 denean hurbilketa ona da eta *np>=5* denean oso ona.

Gogora ditzagun banaketa binomialaren parametroak:

$Batezbestea = \bar{x} = n.p$ eta $Desbidazio\_tipikoa = \sigma = \sqrt{n.p.q}$. Beraz, $N(\bar{x},\sigma)$ kurba normalari hurbiltzen zaionez, binomialaren osagaiak $\underline{N(np,\sqrt{npq})}$ izango dira

Bi banaketa horien hurbilketan, kontutan izan behar da binomiala diskretua dela eta normala jarraia.

1. adibidea

Ipar aldeko hiri batean egindako azterketa baten arabera, %25ak gizonezkoak dira. 1000 bizilagun zoriz aukeratuz, zein da horietatik gutxienez 260 gizonezkoak izateko probabilitatea?

X deitzen badiogu gizonezko kopurua adierazten duen aldagai aleatorioari, *X*-ek *B(1000 , 0´25)* banaketa bat segituko du; beraz, honakoa aurkitu beharko genuke:

P(X >= 260) = P(X = 260) + P(X = 261) + ... + P(X = 1000)

Baina, guzti hori kalkulatzea ezinezkoa da. Horregatik, kasu kopurua handia (n=1000) eta *n.p>=5* (n.p=1000.0´25=250) denez gero, kalkulu binomial hori asko erraz dezakegu $N(np, \sqrt{npq})$ banaketa normalera hurbilduz. Hau da:
n.p=250 ; $\sqrt{1000.0'25.0'75} = 13'7$. Beraz, *N(250 , 13´7)*

P(X >= 260):

$$z = \frac{260 - 250}{13'7} = 0'73$$

$$P(z \geq 0'73) = 1 - P(z \leq 0'73) = 1 - 0'7673 = 0{,}2327$$

2. adibidea

Dado bat 100 aldiz botatzen da. Zein da 5 aurpegia 20 aldiz baino gutxiagotan ateratzearen probabilitatea?

Kasu honetan, *n.p = 100.(1/6)=16,666*. Beraz, normalari egiten dion hurbilketa oso ona da.

$$\bar{x} = n.p = 16{,}66 \qquad \text{eta} \qquad \sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{100.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}} = 3'73$$

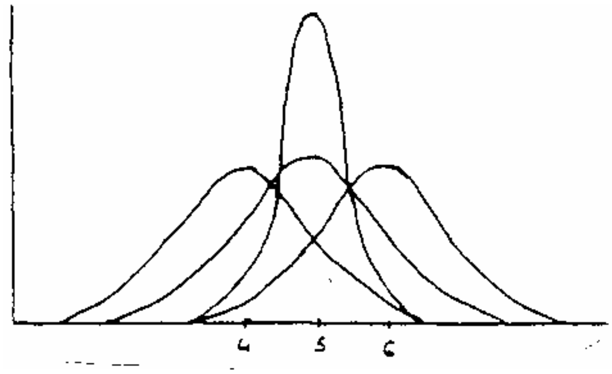
$p(x < 20)$ aurkitu behar da.

$$z = \frac{20 - 16{,}66}{3'73} = 0{,}89$$

$$p(z \leq 0'89) = 0{,}8133$$

ARIKETAK

1.- Egokitu banaketa bakoitzari dagokion $N(\bar{x}, \sigma)$



N(5,1) ; N(4,1) ; N(6,1) ; N(5, 0´5)

Nolakoa da lau kanpai hauek mugatzen duten azalera? Zenbatekoa da?

2.- Makina bateko pieza mota jakin bat akastuna izateko probabilitatea %6 da. Biltegi batean 2000 pieza jaso dituzte. Batezbeste, zenbat dira akastunak? Zein izango da desbidazio estandarra?.

3.- Espainiar karta-sorta (40 karta) batetik 50 aterako ditugu, ateraldi bakoitzaren ostean sortara itzuliz. Binomialetik normalerako hurbilketa erabiliz, aurkitu honakoak gertatzeko probabilitateak:

a) Sei kartatik gora urreak izatea
b) Zortzi urre ateratzea

4.- Herrialde batean egindako hauteskundeetan abstentzioa hautesle-erroldaren %25 izan da.

a) Hautesle-erroldako hiru pertsona zoriz aukeratzen badira, zein da inork ere botoa ez izanaren probabilitatea? Eta bakar bat izatea abstenitu dena?
b) Hautesle-erroldatik zoriz harturiko 100 pertsonatatik gutxienez 30 abstenitu izanaren probabilitatea aurkitu

5.- Demagun saio jakin baten entzule-indizea %53 dela. 1000 teleikusle zoriz aukeratzen baditugu, zein da gutxienez 550ek saio ikusten ari izateko probabilitatea?

6.- Jaioberria mutikoa izateko probabilitatea 0,515 da. Ospitalean, 184 ume jaio dira aste honetan, Zein da 100 mutiko edo gehiago jaiotzearen probabilitatea?

7.- Txanpon bat 100 aldiz jaurtiz gero, kalkula itzazu probabilitate hauek:

a) 40 aurpegi ateratzea
b) 40 aurpegi baino gutxiago
c) aurpegi kopurua, 40 eta 70 bitartekoa

8.- Test moduko azterketa bateko 100 galderek launa erantzun eskaintzen dituzte, baina horietako bat baino ez da zuzena. Kalkula ezazu, zoriz erantzuten duen ikasle batek 30 galdera baino gehiago asmatzeko probabilitatea.

9.- Baldintza berberetan egindako %5 termostatok ez dituzte eskakizun teknikoak betetzen. 2000 termostatoko lagin bat ateraz gero, aurki ezazu, akastun kopurua 120 baino gehiago izatearen probabilitatea.
Zein da zehazki 100 termostato akastun izateko probabilitatea?

10.-Azterketa bat 0tik 10era puntuatzen da modu honetan:

[0 , 2) = Oso gutxi ; [2 , 5) = Gutxi ; [5 , 6) = Nahiko ;
[6 , 7) = Ongi ; [7 , 8´5) = Oso ongi ; [8,5 , 10) = Bikain

Azterketaren notak banaketa normalari segitzen zaizkio, batezbestea 5 eta desbidazio tipikoa 2 delarik. Aurkitu kalifikazio-tarte bakoitzean sartuko diren ikasleen portzentaia

11.- Unibertsitateko eskola batean, hainbat proba egin ondoren, puntuazio hoberenak dituzten %20ak onartuko dituzte.
Proba horietako notak N(100 , 15) banaketa normalari segitzen badio, zein da gutxiengo nota Unibertsitatean sartzeko?

12.- Oposaketa bat gainditzeko, gutxienez 100 puntu atera behar dira. Puntuaketak, banaketa normalari jarraitzen dio, batezbestea 110 eta desbidazio tipikoa 15 izanik.

a) Partehartzaile bat zoriz aukeratuz, zein da oposaketa gainditzeko probabilitatea?
b) 300 lanpostu betetzeko 1000 partehartzaile daudela jakinik, zein da atera behar den gutxienezko puntuazioa lanpostua lortzeko?

13.- Maiatzeko azterketen notak ikusita (batezbestea 3´5 eta desbidazio tipikoa 1´5), irakasle batek, ekainean egingo den deialdirako, kalifikazio hauek aurreikusten ditu: ikasleen %40a “*Gutxi*”, %30a “*Nahiko*”, %20a “*Oso ongi*” eta %10a “*Bikain*”. Ekaineko proban *Gutxi* ateratzeko, zein izango da notarik altuena? Eta “*Nahiko* ateratzeko? Eta “*Oso ongi”*?

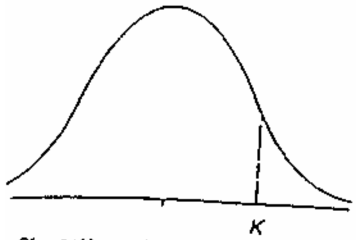
14.- Herrialde jakin bateko biztanleen altuerak batezbestekoa 1,75m-koa duen banaketa normala jarraitzen du. Herrialde horretan 1,90 m. baino gehiago neurtzen duten biztanleak totalaren %6,68 dira. Zein da desbideratze tipikoa? Zein da 1,60 m. baino altuera handiagoko gizabanakaren proportzioa?

15.- Jaioberrien altuerak banaketa normala jarraitzen duela jakina da. *A* autonomia-erkidegoan banaketaren batezbestekoa 52 zm da eta desbideratze tipikoa 3 zm, eta *B* autonomia-erkidegoan aldiz, batezbestekoa 53 zm eta desbideratze tipikoa 5 zm.

a) Kalkulatu, lehenengo kasuan, batezbestearekiko simetrikoak diren zein balioren artean dagoen jaioberrien altueren %50a (zentrala)
b) Zehaztu bi erkidegoen artean zeinek daukan 50 zm baino altuera handiagoko jaioberrien proportziorik handiena

16.- Herri jakin bateko biztanleei kultura orokorreko test bat egin ondoren, lortutako puntuaketek batezbestekoa 68 eta desbideratze tipikoa 18 duen banaketa normala jarraitzen dutela ageri da. Biztanleak hiru taldetan sailkatuko dira (kultura orokor baxukoak, kultura orokor nahikokoak eta kultura orokor bikainekoak), lehenengo taldeak populazioaren %20a duelarik, bigarrenak %65a eta hirugarrenak %15a. Zein dira taldeen arteko mugak zehazten dituzten puntuaketak?

17.- *A* jokalari batek txanpon orekatu bat 400 aldiz jaurtitzen du. *B* jokalariak txanpon trukatu bat 200 aldiz jaurtitzen du, azken txanpon honetan aurpegia irteteko probabilitatea 0,4 delarik. Zer da probableena, *A* jokalariak 175 aurpegi baino gutxiago lortzea ala *B* jokalariak 100 gurutze baino gutxiago lortzea ? Erantzuna arrazoitu



$P[z \leq K] = \Phi(K)$

N(0,1) KURBAK $-\infty$ -TIK K-RAINO MUGATUTAKO AZALERAK

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6005	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

LAGIN ESTATISTIKOAK

> Gogora ezazu:
> **Populazioa** edo **unibertsoa**, ikerketa baten helburu izango diren indibiduo guztiak dira
> **Lagina,** populazioaren azpimultzo bat da.
> Praktikan, sarritan jotzen dugu laginetara populazio oso bati buruzko datuak ateratzeko; beraz, laginaren azterketak populazio osoaren ezaugarriak ateratzeko balioko digu.

Populazio osoaren ordez lagina aztertzerakoan, akatsak egiten ditugu. Hori, aldez aurretik dakigu baina kontrola ditzakegu.

Lagina aukeratzeari **laginketa** esaten zaio. Ikus dezagun orain zelan hartu lagin adierazgarriak.

ZORIZKO LAGINKETA

Ikus ditzagun zorizko laginketa motak:

Zorizko laginketa bakuna

Indibiduoak zenbakitu eta zozketaz aukeratuko dira. Esaterako, indibiduoak kutxan godeta dauden torlojuak badira, zoriz aukeratzen dira, kutxatiz ateraz

Laginketa sistematikoa

Indibiduoak zenbakitu, lehenengoa zoriz aukeratu eta gainerakoak "*salto*" baten bidez. Esaterako, lehena 5a bada eta "*saltoa*" 13koa bada, 5, 18, 31, 44,... zenbakiak aukeratuko ditugu

Laginketa geruzatua

Populazioa, maila ezberdinetan banatu ahal bada (adibidez, adinaren arabera: 18 urtetik beherakoak; 18 eta 25 urte artekoak; 35 eta 50 artekoak; 50 urtetik gorakoak), batzutan komenigarria izaten da maila edo geruza bakoitzetik lagin aleatorio bat aukeratzea.

Geruza bakoitzean, berorren proportzionala den lagin aukeratzen badugu, *lagin geruzatu proportzionala* izango dugu: $\frac{n}{N}=\frac{n_1}{N_1}=\frac{n_2}{N_2}=\frac{n_3}{N_3}=\frac{n_4}{N_4}$

					Guztira
Populazioko indibiduo kop.	N_1	N_2	N_3	N_4	N
Lagineko indibiduo kop.	n_1	n_2	n_3	n_4	n

Geruza bakoitzean, laginaren n_i indibiduoak zoriz aukeratzen dira.

ADIBIDEA.

Ikastetxe bateko 1300 ikaslek zenbat ordu ikasten duten jakin nahi dugu eta horretarako 100 ikasleen lagin bat hartzen dugu

Ikus ditzagun azaldutako hiru metodoak:

- **Zozketa bakunaren** bitartez, aldez aurretik ikastetxeko ikasle guztiei zenbaki bana eman ondoren

> Esate baterako, aukeraketa egiten bada ikastetxera lehenago heldu diren 100 ikasleekin, lagina ez litzateke adierazgarria, *kutsatuta* egon daiteke, ikastetxera garaiz etortzeak lotura izan dezakeelako ikasle horien ardura edo errespontsabilitatearekin eta, beraz, ikasteko erabiltzen duten denborarekin

- **Laginketa sistematikoa.** Egin 1300/100 = 13. Ondoren, 1etik 13ra bitarteko zenbaki bat zozketaz aukeratuz; pentsa dezagun 5 zenbakia atera dugula. Laginketa egiteko, 5, 18, 31, 44, 57,..., 1292 zenbakidun ikasleak hartuko ditugu

- **Laginketa geruzatua.** Pentsa dezagun ikastetxean 1. mailan 426 ikasle daudela, 2.ean 359, 3.an 267, 4.an 133 eta 5.ean 115. Honako hau egingo dugu:

$$\frac{100}{1300}=\frac{n_1}{426}=\frac{n_2}{359}=\frac{n_3}{267}=\frac{n_4}{133}=\frac{n_5}{115}\rightarrow n_1=\frac{426.100}{1300}=33$$

Modu berean lortzen dira $n_2=28$; $n_3=20$; $n_4=10$; $n_5=9$

Zoriz, 1. mailakoak 33 ikasle aukeratzen baditugu, 2.eko 28, 3.eko 20, 4.eko 10 eta 5.eko 9, lagin bat lortuko dugu, **laginketa geruzatua proportzionalaren** bitartez.

Lagin bat populazioaren adierazgarri izan dadin, bere elementuak zoriz aukeratzea ezinbestekoa da.

Laginketa zorizkoa dela esaten da indibiduo guztiak zoriz aukeratzen direnean; hau da, aukeratuak izateko probabilitate berbera dute populazioko indibiduo guztiak.

LAGINEN BATEZBESTEKOEN BANAKETA

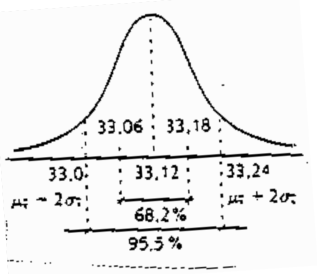
Adibidea.

Garagardo enpresa batean, 33zl.ko latak erabiltzen dira. Edukina hori den ala ez zihurtatzeko, fabrikatzaileak 10 lata aukeratzen ditu zoriz eta emaitza hauek ateratzen zaizkio: $\bar{x}=33{,}07zl.$ eta $\sigma=0{,}22\ zl.$

Horrelako 12 proba egiten ditu, bakoitzean 10 lata harturik. Emaitzak, taulan azaltzen dira

LAGINKETA	$\bar{x}$	σ
1	33.07	0.22
2	33.10	0.18
3	33.16	0.19
4	33.17	0.20
5	33.20	0.15
6	33.00	0.17
7	33.14	0.13
8	33.18	0.21
9	33.06	0.16
10	33.15	0.14
11	33.05	0.15
12	33.16	0.13

Ondoren, taulako 12 $\bar{x}$ batezbestekoen batezbestea eta desbidazio tipikoa kalkulatzen ditu eta hauxe ateratzen zaio: $\mu_{\bar{x}}=33{,}12$ eta $\sigma_{\bar{x}}=0{,}06$.



Batezbestekoen lagin-banaketak, *N(33´12 , 0´06)* lege normala jarraitzen du. Laginen batezbestekoen batezbestekoa $\mu_{\bar{x}}$ izendatuko dugu eta desbidazio tipikoa $\sigma_{\bar{x}}$

Zera betetzen da: $\mu_{\bar{x}} = \bar{x}$ eta $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Ezberdintasuna, desbidazio tipikoan dago; hau da:

- Nola banatzen dira enpresako garagardo lata guztiak?: $N(\bar{x}\ ,\ \sigma)$
- Nola 12 laginen batazbesteak (12 $\bar{x}$-ak)?: $N(\bar{x}\ ,\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$

<u>Adibidea</u>

Makina batek azufre poltsak egiten ditu, batazbeste 500 gr. pisukoak eta desbidazio tipikoa 35 gr. Poltsa horiek 100 unitateko laginetan biltzen dira kutxetan sartzeko. Kutxetan, nola daude banatuta poltsen pisuen batezbesteak?

Makinak egiten dituen poltsa <u>guztien</u> banaketa N(500 , 35) da.

Kutxa edo lagin bakoitzean 100 poltsa biltzen badira, lagin hoien batazbesteko pisuen banaketa honela kalkulatzen da:

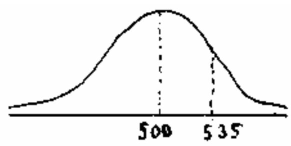
n = 100

Batezbestea: $\mu_{\bar{x}} = \bar{x} = 500$

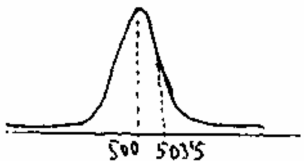
Desbidazio tipikoa: $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{35}{\sqrt{100}} = 3{\acute{}}5$

Hau da, <u>kutxetan</u>, poltsen pisuen batezbesteak N(500 , 3´5) banatzen dira

Poltsa guztien banaketa:



Laginen batazbestekoen banaketa:

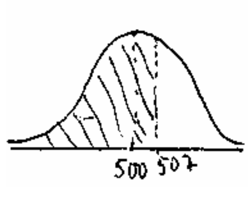


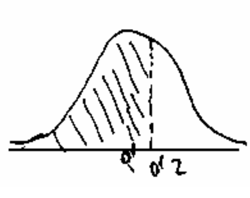
Aurreko adibidea jarraituz:

a) Makinak egiten dituen poltsa guztietatik bat zoriz aukeratuz, zein da probabilitatea bere pisua 507 gr. baino gutxiago izatea?
b) 100 unitateko lagin edo kutxa bat zoriz aukeratuz, zein da probabilitatea bere batezbestekoaren pisua 507 gr. baino gutxiago izatea?

a) Banaketa: N(500 , 35)

$z = \dfrac{507 - 500}{35} = 0{,}2$; p[z<0,2] = <u>0,5793</u>

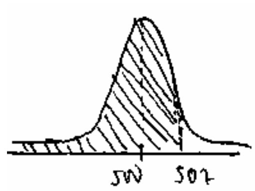


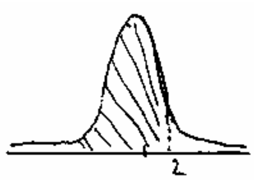


b) Ez du axola zenbat lagin diren; bai, ordea, laginen tamaina (100)

Banaketa, $N(500\ ,\ \dfrac{35}{\sqrt{100}}) = N(500\ ,\ 3{\acute{}}5)$

$z = \dfrac{507 - 500}{3{\acute{}}5} = 2$; p[z<2] = <u>0,9772</u>





n tamainako laginen banaketan, honakoa froga daiteke (**Limitearen teorema zentrala**):

- $\mu_{\bar{x}}$ batezbestekoa, populazioaren batezbestekoaren berdina da: $\mu_{\bar{x}} = \bar{x}$
- $\sigma_{\bar{x}}$ desbidazio tipikoa, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ izango da. Beraz, txikitu egiten da n handitzen denean: $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $n \geq 30$ denean, asko hurbilduko da banaketa normalera

Adibidea.

N(100,15) banaketari jarraitzen dion populazioa dugu eta lagin bat hartzen da, tamaina 36koa. Zein da lagin horren batezbestekoa 105 baino txikiagoa izatearen probabiliatatea ?

$\mu_{\bar{x}} = \bar{x} = 100$; $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{15}{\sqrt{36}}$. Beraz, N(100 , $\dfrac{15}{\sqrt{36}}$) = N(100,2´5)

Kalkula dezagun p($\bar{x} \leq 105$) :

$$z = \frac{105-100}{2´5} = 2 \rightarrow\rightarrow p(z \leq 2) = 0{,}9772$$

Ariketa

Unibertsitateko hauta-probako matematikako notek N(5,2) banaketa bati jarraitzen diote eta 100 ikasleko lagin bat zoriz aukeratzen dugu. Zein da 100 ikasle horien matematikako batezbesteko notak 4´5 eta 5 bitartean egoteko probabilitatea?

PROPORTZIOEN LAGIN-BANAKETA

Populazio batean, ezaugarri jakin bat duten indibiduoen proportzioa "*p*" da.

Populazio batetik atera daitezkeen *n* tamainako lagin posible guztiak hartuko ditugu kontutan. Lagin bakoitzean ezaugarri hori duten indibiduoen proporzioa "*pr*" jakin bat egongo da.

Nola banatzen dira *pr*-ren balio posible guztiak?.

Lagin proportzioen banaketa. Populazio batean *C* ezaugarri bat duten indibiduoen proportzioa *p* bada, *n* tamainako laginaren barruan ezaugarri hori duten indibiduoen proportzioak "*pr*" honela banatzen da:

Batezbestekoa = *p*

Desbidazio tipikoa = $\sqrt{\frac{pq}{n}}$

pr-en banaketa: $N(p, \sqrt{\frac{pq}{n}})$

Baldintza: $np \geq 5$ eta $nq \geq 5$ bete behar du

Adibidea

Makina batek torlojuak egiten ditu eta badakigu %5 akastunak direla. Kutxetan banatzen dira, bakoitza 400 torlojukin. Kutxetan, nola dago banatuta *pr* akastun torlojuen proportzioa ?

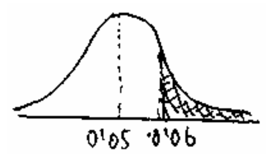
Populazioa, makinak egiten dituen torloju guztien kopurua da eta akastun torlojuen proportzioa *p=0,05*

Kutxa bakoitza 400 elementuko lagina da : *n=400*

Kutxetako akastun torlojuen proportzioek banaketa normala segitzen dute:

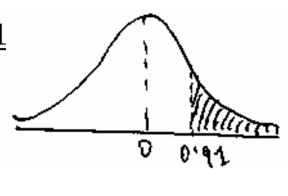
Batezbestea: *p=0´05* Desbidazio tipikoa: $\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0´05.0`95}{400}} = 0{,}011$

Hau da : N(0´05 , 0´011)



Kutxa bat aukeratuz, zein da akastunen proportzioa %6a baino handiago izatearen probabilitatea?

$z = \frac{0{,}06 - 0{,}05}{0{,}011} = 0{,}91$; p[z > 0,91] = 1-p[z<0,91] = 1- 0,8159 = <u>0,1841</u>



Ariketa

Pentsa ezazu 18 eta 25 urte bitarteko gazteen %15a miopea dela. n = 40 tamainako laginetan, nola dago banatuta gazte miopeen proportzioa?

PROBABILITATEAREN BITARTE SIMETRIKOAK

Egin dezagun alderantzizko kalkulua; hau da, probabilitatearen balioa emanik, horri dagokion bitarte simetrikoa aurkitu

Batezbestekoen lagina denean

Adibidea

Jaioberrien haurren pisuen batezbestea 3100 gr. da eta desbidazio tipikoa 150 gr. 100 jaioberrien laginak hartuz gero, zein bitarte simetrikoan aurkituko dira lagin hoien %90a? Edo, zenbateko pisutik pisura edukiko dute 100 tamainako jaioberrien laginen %90ak?

Eta laginen %95ak?

Bitartetari dagokion probabilitate-balioa $1-\alpha = 0{,}9$ da . Hurrengo ikasgaian, balio honi **konfiantza-maila** deituko diogu.

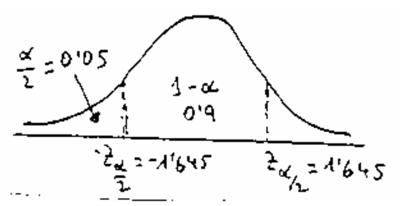
Beraz, zein da 0,9ko konfiantza-mailarekin kalkulatu behar den bitartea?

a) $1-\alpha = 0{,}9 \;\Rightarrow\; \alpha = 0{,}1$ eta $\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$

N(0,1) taulan, 0,95 probabilitateari *Z=1,645* balioa dagokio

N(0,1) banaketan, bitartea zera da (-1´645 , 1´645)

Laginen batezbestekoen banaketara $N(\bar{x}\ ,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ pasatu



beharko da; hau da N(3100 , $\frac{150}{\sqrt{100}}$) = $N(3100{,}15)$ banaketara.

-1,645 = $\frac{x-3100}{15} \Rightarrow x = 3075{'}23$; 1,645 = $\frac{x-3100}{15} \Rightarrow x = 3124{,}67$

Sol.: (3075´23 , 3124´67)

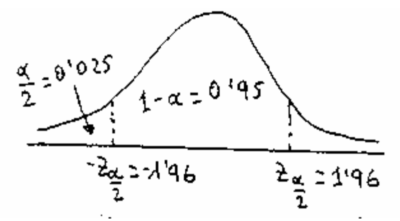
a) Eta 0,95 probabilitateari dagokion bitartea?

$1-\alpha = 0{,}95 \;\Rightarrow\; \alpha = 0{,}05$ eta $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$

N(0,1)ean, 0,975 probabilitateari *Z=1,96* dagokio

Beraz, N(0,1)ean, bitartea (-1´96,1´96) da

Eta, N(3100,15) banaketan?:



-1,96 = $\frac{x-3100}{15} \Rightarrow x = 3070{'}6$; 1,96 = $\frac{x-3100}{15} \Rightarrow x = 3129{,}4$

Sol.: (3070´6 , 3129´4)

Esanahia:

“ n tamainako laginen %90ak, batezbestekotzat (3075´23 , 3124´67) tarteko pisua dute. Eta, laginen %95ak, (3070´6 , 3129´4) tartekoa. Ohar zaitez, arriskua gutxitzeko edo ziurtapen handiagoarekin jokatzeko hobe dela tarte zabalagoa hartzea”

ARIKETAK

1.- Aukeratu 20ko lagina 500 pertsonako multzotan:

a) Zorizko laginketa sistematikoaren bidez
b) Lagingeta bakuna erabiliz

Erabili kalkulagailuaren **RAN** tekla

2.- Herri bateko 4000 bililagunei astialdian zer egitea gustatzen zaien egitea aztertu nahi da eta biztanlegoa lau auzotan banatuta dago modu honetan:

	A auzoa	**B** auzoa	**C** auzoa	**D** auzoa
Gizonezkoak	370	460	620	520
Emakumeak	340	500	650	540

Horretarako 400 indibiduoen laginketa geruzatua egin nahi da, bai sexua eta auzoa kontutan hartuz. Esan zein den geruza bakoitzari dagokion laginketa tamaina.

3.- Ikastetxe bateko ikasleen adimen koefizientea *"A.K."* N(110 , 15) banatuta dago. n=25 tamaina duen zorizko lagina ateraz gero,

a) Zein da laginari dagokion banaketa?
b) Zein da lagin horretan. A.K. 115 baino handiagoa izatearen probabilitatea?
c) Aurkitu $1-\alpha = 0{\acute{}}95$ probabilitate bati dagokion laginen batezbestekoen bitarte karakteristikoa.

4.- Koartel bateko soldaduen altuera, zentimetrotan, N(173,6) banaketa normalari jarraitzen dio. Koarteleko goardiak 12 soldaduk egiten dituzte. Zoriz aukeratzen direla pentsatuta, aurkitu zein bitartean dagoen goardiak egiten dituztenen batezbesteko altueraren %95.

5.- Herri bateko biztanleen %42a alkatearen lanaren aurka dago eta gainerakoak alde. 64 indibiduoen lagin batean, zein da gehienak alkatearen aurka egotearen probabilitatea?

6.- Badakigu dado bat botatzean 5 aurpegia ateratzearen prportzioa 1/6=0,167 dela. Aurkitu 100 dado botatzean $1-\alpha = 0{,}9$ probabilitateari dagokion proportzioaren bitarte karakteristikoa.

INFERENTZIA ESTATISTIKOA

Aurreko gaian, populazio baten batezbestekoa eta desbidazio tipikoa jakinda, *n* tamainako laginen batezbestekoak nola dauden banatuta ikasi dugu. Eta, lagin horietako batek, baldintza jakin bat betetzearen probabilitatea ere aurkitu dugu.

Hau da, populaziotik abiatuta, laginen jokabideari buruzko ondorioak atera ditugu.

Unitate honetan kontrakoa ikasiko dugu, hori baita guri benetan interesatzen zaiguna; hau da, lagin bat hartuta, populazioari buruzko ondorioak atera. Lagin jakin bat erabiliz, populazioaren parametroen balioak **inferitu** edo **estimatu** ahal izango ditugu

Adibidez, mota honetako ondorioak aterako ditugu:

- Aurtengo soldaduen batezbesteko altuera 174´3 eta 175´1 cm. artean dago. Eta, horren "ziurtasun maila" %90ekoa da.
- Alderdi jakin baten botoen portzentaia %46 eta %50 bitartean egongo dela estimatzen da. Datu hori ez da ematen ematen ziurtasun osoz, baizik %98ko "konfiantza mailarekin"

Hau da, lagin batetik abiatu eta populazioaren parametro bat baloratzen denean **estimazio** hori **tarte baten bidez** egiten da. Zenbat eta zabalagoa izan tartea, handiagoa izango da estimazioan egin dezakegun akatsa. Eta, gainera, estimazioa ez da ziurra izango, aldez aurretik ezarritako **konfiantza maila** batekin (%90, %95,...) baizik.

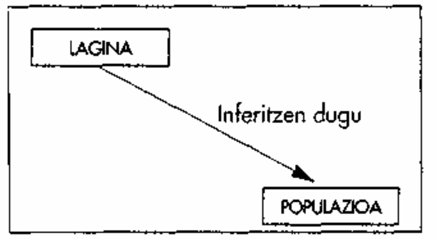
Beraz, hiru aldagai hauek daude:

- **Laginaren** tamaina**:** bertatik abiatuta egiten den inferentzia
- Estimazioa egiteko erabiltzen den **bitartearen luzera**. Luzera horren erdiari **errore maximoa** esaten zaio
- **Konfiantza-maila:** estimazioa zein "ziurtasun mailarekin" egin den adierazten diguna.

Hurrengo unitatean beste estimazio mota bat ikasiko dugu, **hipotesien egiaztapena** izenarekin ezagutzen dena.

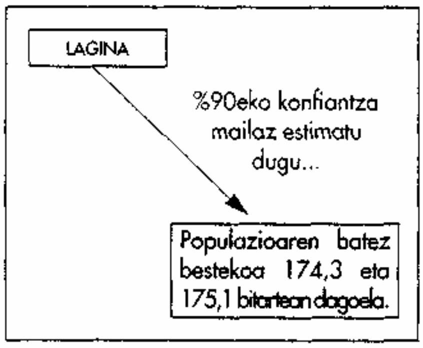
LABURPEN GISA

Estatistika inferentzialaren teknika zera da: lagin batetik lortutako datuetatik abiatuta, populazio baten parametroen balioa ezagutu edo egiaztatu. Metodo horrekin lortzen diren emaitzek, ziurgabetasun maila batekin ateratzen dira, probabilitate terminoetan neurtzen dena.

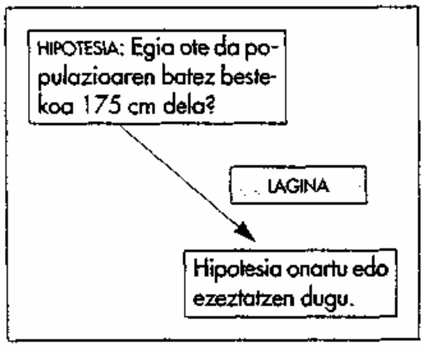


Estatistika inferentzialak bi adar nagusi ditu:

- **Estatistika induktiboa,** helburutzat populazio baten parametroak estimatzea duena. Parametroaren balioa **konfiantza bitarte** baten eta **konfiantza maila** baten bidez estimatzen da.



- **Estatistika hipotetiko-deduktiboa.** Populaziotik ateratako zorizko lagin batetik abiatu eta, metodo matematikoak erabiliz, populazioko parametro baten hipotesiak ezagutzea da bere helburua

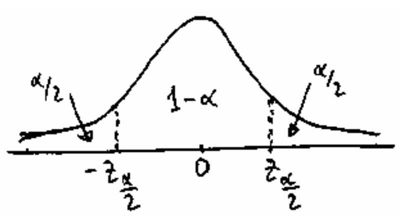


POPULAZIO BATEN BATEZBESTEKOAREN ESTIMAZIOA

♦ Batezbestekoarentzat, konfiantza-tartea

Populazio baten batezbestekoa ezezaguna da eta kalkulatzea nahi dugu. Horretarako, aurreko gaian ikasitakoa erabiliko dugu.

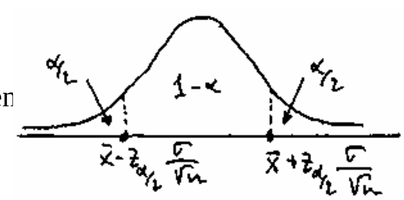
Badakigu, batezbestekoen lagin-banaketa, $N(\mu_{\bar{x}}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ banaketa normal batera hurbiltzen dela, eta, beraz, $z = \dfrac{x-\mu_{\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ banaketa tipifikatuak N(0,1) banaketa normal estandar bati segituko dio



Alboan duzun adierazpen grafikoan, zera azaltzen zaizu:

- $1-\alpha$ probabilitate-balioa, **konfiantza-maila** da. Ehunekotan, $100(1-\alpha)$%
- $(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2})$ tartea, **konfiantza-tartea** da N(0,1) banaketan; hau da, aldagaia tipifikatu eta gero.
- Orokorrean, lagin baten $\bar{x}$ batezbestekotik abiatzen bagara eta $(1-\alpha)$-ko konfiantza-mailarekin, populazioaren batezbestekoa **konfiantza-bitarte** honekin estima daiteke:

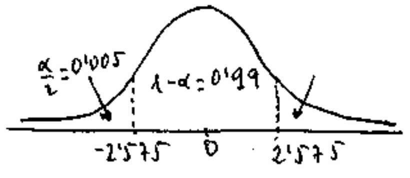
$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$



(Formula hori, ez dago buruz ikasi beharrik. Hurrengo adibideen arrazonamendua jarraituz, erraz kalkula daiteke tarte hura)

Adibidea.

Aldagai estatistiko baten desbidazio tipikoa zein den badakigu, $\sigma = 8$, baina batezbestekoa ez dakigu. Bere balioa estimatzeko, n = 60 tamainako lagin bat hartuko dugu %99ko konfiantza-mailarekin, eta batezbestekoa $\bar{x} = 37$ dela jakinda.



$1-\alpha$=0´99 ; α=0´01 ; $\frac{\alpha}{2} = 0´005$

0´995 probabilitate-balioari, *k=2´575* dagokio

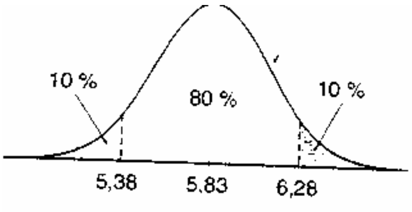
N(0,1)ean, tartea (-2´575 , 2´575) da. Pasatu dezagun batezbestekoen $N(\mu_{\bar{x}}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ banaketara:

$$-2´575 = \frac{x-37}{8/\sqrt{60}} \rightarrow x = 37 - 2´575\frac{8}{\sqrt{60}} = 37 - 2´66 = 34´34$$

$$2´575 = \frac{x-37}{8/\sqrt{60}} \rightarrow x = 37 + 2´575\frac{8}{\sqrt{60}} = 37 + 2´66 = 39´66$$

Hau da, %99-ko konfiantza-mailarekin, populazioaren batezbestea (34´34 , 39´66) bitartean egongo dela esan dezakegu, Adibidea

30 ikasleen lagin batean, matematikako azken azterketaren noten batezbestea $\bar{x}$ =5´83 da eta desbidazio tipikoa $\sigma = 1'92$. Determina ezazu konfiantza-tartea, %80ko ziurtasun-mailarekin. Azaldu lortzen den emaitzaren esanahia



$1-\alpha$ =0´8 ; $\frac{\alpha}{2} = 0'1$

N(0,1) banaketan, tartea zera da: (-1´28 , 1´28)

$N(\mu_{\bar{x}}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ banaketara pasatuz:

$$'28 = \frac{x - 5'83}{\frac{1'92}{\sqrt{30}}} \rightarrow x = 5'38 \quad ; \; 1'28 = \frac{x - 5'83}{\frac{1'92}{\sqrt{30}}} \rightarrow x = 6'28$$

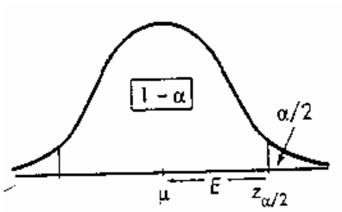
Sol.: (5´38 , 6´28) KONFIANTZA TARTEA

Soluzio-tartekatu honen esanahia:

- Populazioaren batezbestekoaren estimazioa 5´83 da
- Onartzen den gehiengo errorea $\pm 0{,}45$ da. Beraz, 5´38 eta 6´28 bitarteko edozein balio ontzat ematen da
- Populazioan mateko notak 5,38tik 6,28ra artekoak direla estimatzen da. Aurreko guztia, %80ko segurtasunarekin baieztatzen dugu; hau da, egia izatearen probabilitatea 0´8 da eta gezurra izatearena 0´2.

Konfiantza-maila, errore maximoa eta laginaren tamainaren arteko erlazioa

Grafikoan azaltzen den ***E*** balioari, ontzat ematen den edo **errore maximoa** esaten zaio.



Ikusten denez, bere balioa $x - \mu_{\bar{x}}$ da.

$z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{x - \mu_{\bar{x}}}{\sigma / \sqrt{n}}$ denez gero, errore maximoaren formula zera da:

$$\boxed{E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

σ eta *n*-ren menpekoa da

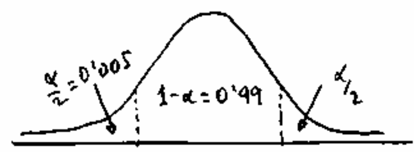
- Zenbat eta handiagoa izan *n* laginaren tamaina, *E* errorea gutxituz doa (bitartea estuagoa izango da, eta, beraz, estimazio zehatzagoa egingo da)
- Zenbat eta handiagoa izan $1-\alpha$ (hau da, estimazio ziurragoa egin nahi), *E* ere handituz doa.
- Zenbat eta handiagoa izan $1-\alpha$ konfiantza-maila, handiagoa izango da $z_{\frac{\alpha}{2}}$ eta, beraz, *E* ere handituz doa.

E eta α-ren balioak emanda, aurkitu lagin baten tamaina

Adibidea.

Erreakzio denborak neurtzean, psikologoak badaki neurketaren desbidazio tipikoa 0´5 segundukoa dela. Zenbat neurketa egin beharko ditu %99ko konfiantzarekin baldin estimazioaren errorea 0´1 segundokoa baino handiagoa izan ez dadin?

$1-\alpha = 0{'}99$; $\alpha = 0{'}01$; $\dfrac{\alpha}{2} = 0{'}005$



0´995 probabilitate-balioari, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{'}575$ dagokio

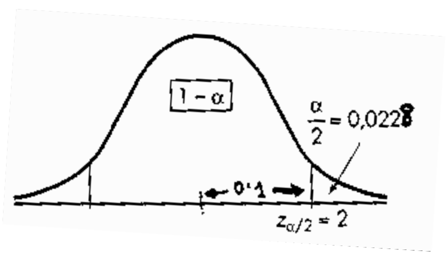
n lortzeko: $2{'}575 = \dfrac{E}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$; $\sqrt{n} = \dfrac{2{'}575 . 0{'}5}{0{'}1} = 12{,}875 \rightarrow n = 165{,}76$

166 neurketa egin behar dira (165,76 baino handiagoa den zenbaki oso txikiena)

E eta *n*-ren balioak jakinik, aurkitu konfiantza-maila

Adibidea.

Erreakzio denbora neurtzean, psikologo batek badaki desbidazio tipioa 0´5 segundukoa dela. Errore maximoa 0´1 segundukoa izanik, erreakzioaren batezbesteko denbora estimatu nahi du, eta horretarako 100 esperientzia egiten ditu. Zein izango da estimazioaren konfiantza-maila?



$$z = \frac{x - \mu_{\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{0{'}1}{\frac{0{'}5}{\sqrt{100}}} = 2$$

$P(z \leq 2) = 0{'}9772$

1 - 0´9772 = 0´0228

0´0228 . 2 = 0´0456

1 – 0´0456 = 0´9544

$1-\alpha = 0{,}9544$. Konfiantza maila = **%95,44**

PROPORTZIO EDO PROBABILITATE BATEN ESTIMAZIOA

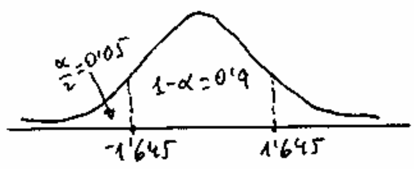
Orain, ezezaguna *p* proportzioa da; hau da, populazio batean, ezaugarri bat duten indibiduoen proportzioa. Horren estimazioa edo konfiantza-bitartea kalkulatu nahi dugu.

Adibidea.

Hiri batean, 15 urtetik gorakoen artean, 300 pertsonako lagin bat aukeratu dugu. Horietatik 104 pertsonak, egunkaria egunero irakurtzen dutela dakigu. Aurki ezazu %90eko konfiantza mailarekin, hiri horretako 15 urtetik gorakoen artean, egunkari irakurleen proportzioa.

$1-\alpha = 0{,}9 \quad ; \quad \frac{\alpha}{2} = 0{,}05$

$0'95 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'645$



N(0,1) banaketan, tartea (-1´645 , 1645) da

n tamainako laginen *pr* proportzioaren banaketa zera da: $N(p, \sqrt{\frac{p.q}{n}})$

Laginaren proportzioa: $pr = \frac{104}{300} = 0{,}347 = p$

Aldagaiaren tipifikazioa: $z = \frac{x-p}{\sqrt{\frac{p.q}{n}}}$; Errore maximoa = *x*-*p*

$$-1'645 = \frac{x-0'347}{\sqrt{\frac{0'347.0'653}{300}}} \rightarrow x = 0'302 \quad ; \; 1'645 = \frac{x-0'347}{\sqrt{\frac{0'347.0'653}{300}}} \rightarrow x = 0'392$$

Ondorioa: %90eko konfiantza mailaz, 15 urtetik gorakoen egunkari irakurleen proportzioa 0´302 eta 0´392 bitartekoa dela

Errore maximoa: $x - p = 1'645.\sqrt{\frac{0'347.0'653}{300}} = 0'045$

= 0’392 – 0’347 = 0’045

Adididea

Jarraitu dezagun aurreko adibidearekin. Ariketa errepikatu nahi dugu 0´01eko errore maximoa lortu nahian eta %90eko konfiantza-maila berberaz. Zenbat indibiduoko lagina hartu beharko dugu?

$1-\alpha = 0{,}9 \quad ; \quad \frac{\alpha}{2} = 0{,}05 \quad ; \quad 0'95 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'645$

Laginaren proportzioa: p = 0´347

$z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{x-p}{\sqrt{\frac{p.q}{n}}}$; Errore maximoa: *E* = *x*-*p* = $z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{p.q}{n}}$

Beraz, $E = 1'645.\sqrt{\frac{0'347.0'653}{n}} \quad ; \quad n = \left(\frac{1{,}645}{0{,}01}\right)^2 .0{,}347.0{,}653 = 6131{,}6$

6132 pertsonako lagina hartu beharko da

ARIKETAK

1.- Zezen ganaduzale batek bere ganadutegiko zezenen batezbesteko pisua estimatu nahi du %95eko konfiantza mailarekin. Horretarako, 30 zezen hartzen ditu lagintzat eta pisatu egiten ditu, batezbestekoa 507 kg. eta desbidazio tipikoa 32 delarik. Zein da populazioaren batezbestekoaren konfiantza-tartea?. Azaldu emaitzaren esanahia.

Sol.: (495´45 , 518´45)

2.- Hiri bateko 16 urteko nesken batezbesteko pisua estimatzeko, 100 nesken zorizko lagina hartzen da. Parametro hauek lortzen dira: $\overline{x} = 52{,}5$ kg. eta $\sigma = 5{,}3$ kg.
Ondoko baieztapena egiten da: hiri horretako 16 urteko nesken batezbesteko pisua 51 eta 54 kg. bitarteako da. Zein konfiantza-mailaz egin da baieztapena?

(Sol.: 99,54%)

3.- Multzo jakin baten adimen-koefizientearen batezbestekoa ezezaguna da eta desbidazio tipikoa $\sigma = 8$
Batezbestekoa estimatzeko hartu den behar den laginaren tamaina kalkula ezazu, baldin konfiantza-maila %99koa bada eta errore maximoa 3 bada.

(Sol.: 48 indibiduoko lagina)

4.- Txanpon bat 100 aldiz bota dugu eta 62 “*aurpegi*” atera dira. Estimatu “*aurpegia”* ateratzearen probabilitatea %90 eta %99ko konfiantza-mailekin

Sol.: - %90az, (0´54 ,0´70)
- %99az, (0´4495 , 0´745)

5.- Jarraitu dezagun aurreko problemarekin. Orain, *“aurpegia”* ateratzearen probabilitatea estimatu nahi dugu, errorea 0,002 baino txikiagoa eta konfiantza-maila %95ekoa izanik. Zenbat aldiz bota beharko dugu txanpona?

(Sol.: 226.271 aldiz)

6.- Hauteskunde aurreko inkesta baten arabera, alderdi politiko jakin batentzako boto-asmoa %42tik %48ra bitartean dago. Konfiantza tarte bat dugu aurrekoa, baina fitxa teknikoan ez da ageri laginaren tamaina ez eta erabilitako konfiantza-maila ere.

a) Laginaren tamaina 1056 gizabanako izan dela suposatuz, zein da konfiantza-maila?
b) Lagina txikiagoa izango balitz, konfiantza-maila aurrekoa baino handiagoa ala txikiagoa izango litzateke?. Erantzuna justifikatu

7.- Eskualde jakin bateko nekazarien hileko batezbesteko sarrerak jakiteko, gizartearen ikerketarako kabinete batek zoriz aukeratutako 900 nekazariri ikerketa estatistiko bat egin zien. Hileko batezbesteko sarrerak 1800 eurokoak gertatu ziren eta desbidazio tipikoa 300 eurokoa. %99ko konfidantza-mailaz, zein balioren artean egongo dira nekazal populazio osoaren hileko batezbesteko sarrerak?

HIPOTESIAK KONTRASTATU

HIPOTESI ESTATISTIKOAK

Adibide bat aztertuz hasiko gara (1.kasua):

Ontzat ematen dugun dado bat daukagu, hau da akats gabekoa. 100 aldiz bota eta 25 "BOSTEKO" ateratzen dira. Lortutakoaren arabera, uste genuena (dadoa zuzena zela) baiezta dezakegu ala hobe akastuna dela esatea?

Adibide honetan, zalantzan jartzen dugu *p*(5) parametroak 1/6 balioa hartzen ote duen. Zalantza hori argitzeko **test estatistikoa** egiten dugu 100 botaldietako esperimentu batetik abiatuz.

> **Test estatistikoa** prozedura bat da, zorizko lagin batetik abiatu eta populazioan ezezaguna den parametroari buruzko aldez aurretik egindako hipotesia onartzeko edo ukatzeko balio duen prozedura hain zuzen

Ikus dezagun beste adibide bat (2. kasua):

Dela bost urte adimen proba bat egin zitzaien deialdi bateko soldadu guztiei. Emaitzaren batezbestekoa $\mu = 102$ *eta desbidazio tipikoa* $\sigma = 11$ *izan zen. Aurten ere test bera egin zaie 400 soldaduko lagin bati eta batezbestekoa* $\overline{x} = 101$ *puntu izan da.*
Bost urte hauetan, soldaduen adimena ez dela aldatu esan dezakegu?. Hau da, agertzen den aldea zorizkoa dela pentsa dezakegu?

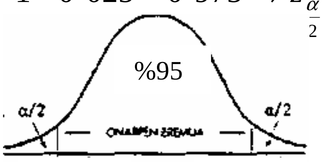
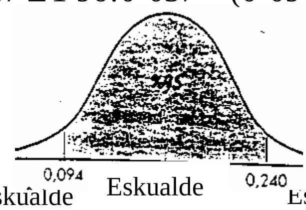
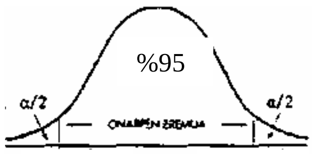
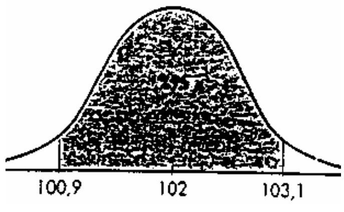
Bi adibide horietan, **abiapuntuko hipotesia** daukagu eta **lagin batetik ateratako emaitzak**. Aldea zorizkoa ote den jakin nahi dugu.

	HIPOTESIA	EMAITZA LAGINETIK ABIATUTA	GALDERA
1. kasua: dadoak	Dadoa ondo eginda dago. "BOSTEKOEN" probabilitatea: *p = 1/6 = 0,167*	"BOSTEKOEN" proportzioa laginetan: *pr = 0,25*	Ateratzen den diferentzia zorizkoa da? Lagina hipotesia planteiatu dugun populaziotik atera dela pentsa dezakegu?
2. kasua: soldaduak	Aurten ere $\mu = 102$	Laginaren batezbestekoa: $\overline{x} = 101$	

Abiapuntuko hipotesia adierazteko $\mathbf{H_0}$ erabiltzen da eta **hipotesi nulua** esaten zaio. Kontrakoa adierazteko $\mathbf{H_1}$ eta **hipotesi alternatiboa** esaten zaio.

HIPOTESIA EGIAZTATU

Hipotesi estatistikoak egiaztatzeko pausuak: Har ditzagun aurreko bi adibideak:

	1. KASUA	2. KASUA
1. Enuntziatu	H_0: $p = \frac{1}{6} = 0'167$	$H_0 : \mu = 102$
2. Ondorioak atera	Hipotesia egia balitz, laginen proportzioek, *pr*, banaketa hau izango lukete: $N(p\,,\sqrt{\frac{pq}{n}}) = N(0`167\,,\sqrt{\frac{0`167\,.\,0`833}{100}}) =$ N(0’167 , 0’037) Har dezagun %95eko konfiantza maila , edo esangura maila: $\alpha = 0'05$ Kasu horretan, “BOSTEKOEN” laginen proportzioa %95eko bitarte simetrikoan egongo dira: $1-\alpha = 0'95 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'025$ $1-0'025 = 0'975 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$  -1’96 -1’96 N(0 , 1)ean, tarte simetrikoa (-1’96 , 1’96) da. Pasatu dezagun N(0’167 , 0’037) banaketara: $\pm 1'96 = \frac{x-0'167}{0'037}$. Hau da: $x = 0'167 \pm 1'96.0'037 = (0'094\,,0'240)$  Eskualde kritikoa Eskualde onartua Eskualde kritikoa Beraz, eskualde onartua: (0’094 ; 0’240)	Hipotesia egia balitz, 400eko tamaina duten laginen batezbestekoak, μ, banaketa hau izango lukete: $N(\mu_{\bar{x}}\,,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (102\,,\frac{11}{\sqrt{400}}) =$ N(102 ; 0’55) Esangura maila: $\alpha = 0'05$ %95ean ondoko bitarte simetrikoa lortzen da: $\alpha = 0'05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$  -1’96 -1’96 N(0, 1) eko (-1’96 , 1’96) tarte simetrikoa N(102 ; 0’55) banaketara pasatu behar da. $\pm 1'96 = \frac{x-102}{0'55}$. Hau da: $x = 102 \pm 1'96.0'55 = (100'9\,,103'1)$  Onarpen eremua: (100’9 ; 103’1)
3. Egiaztatu	Lagina atera eta parametroaren balioa kalkulatzen da: $pr = \frac{25}{100} = 0'25$	Lagina atera eta parametroaren balioa kalkulatzen da: $\bar{x} = 101$
4. Erabaki	0’25 ez dago onarpen eremuan. Beraz, **hipotesia ukatu** egiten da %5eko esangura mailaz edo %95eko konfiantza mailaz. Dadoa ez dago ondo eginda	101 badago onarpen eremuan. **Hipotesia onartu** egiten da %5 esangura mailaz. Soldaduen ezagutzak duela bost urtekoak dira

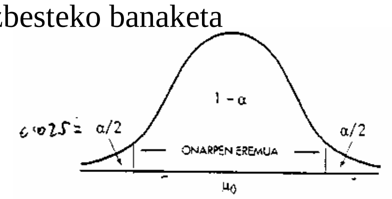
3. adibidea

Unibertsitate bateko ikasleen adimen koefizientearen batezbestekoa 113 dela uste da, desbideratze tipikoa 7 izanik. Hipotesia egiaztatzeko, 180 ikasleko lagina hartzen da eta beraietatik lortzen den batezbesteko adimen koefizientea 115 da. Onar dezakegu aurreko hipotesia %5eko esangura mailaz?

<u>1. Hipotesia:</u> $H_0 : \mu = 113$

<u>2. Ondorioak atera. Onarpen eremua lortu</u>

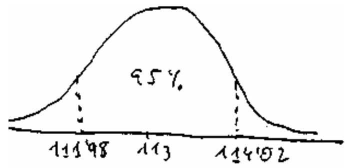
Laginaren tamaina n = 180 denez, hipotesia egia balitz, laginen batezbesteko banaketa ondokoa litzateke: $N(\mu_{\bar{x}}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(113, \frac{7}{\sqrt{180}}) = N(113, 0`52)$



Adierazgarritasun maila: $\alpha = 0'05$ eta $1-\alpha = 0'95 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'025$

0’975 probabilitatearen balioari zera dagokio: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$ eta (-1’96 , 1’96) tartea.

Beraz, $\pm 1'96 = \frac{x-113}{0'52}$; $x = 113 \pm 1'96.0'52 = (111'98, 114'02)$



Eskualde onartua: $(111'98, 114'02)$

<u>3. Egiaztatu.</u> Hartutako laginean, batezbestekoa 115 izan da

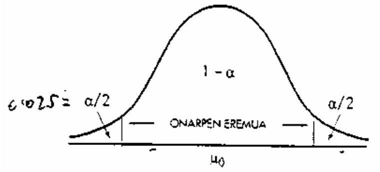
<u>4. Erabaki.</u> 115 ez dagoenez onarpen eremuaren barruan, hipotesia ukatu egiten dugu. Hau da, ezin dugu ontzat hartu unibertsitate horretako ikasleen batezbesteko adimen koefizientea 113 dela.

4. adibidea

Dentista batek 10 urteko umeen %40ak txantxarra duela haginetan baieztatu du. 100 umeko lagin bat hartu eta 30ek txantxarra dutela ikusi dugu. Emaitza horren arabera, egiaztatu dentistak esandakoa gezurra den ala ez, adierazgarritasun-maila %5ekoa izanik.

<u>1. Hipotesia:</u> H_0: $p = 0'4$

<u>2. Onarpen eremua lortu.</u> Hipotesia egia balitz, laginen proportzioek, *pr*, banaketa hau izango lukete: $N(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}) = N(0`4, \sqrt{\frac{0`4 . 0`6}{100}}) =$ N(0’4 , 0’049)



$\alpha = 0'05$ eta $1-\alpha = 0'95 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'025 \rightarrow (-1'96, 1'96)$

$\pm 1'96 = \frac{x-0'4}{0'049} \rightarrow x = 0'4 \pm 1'96.0'049 = (0'3039, 2'0560)$

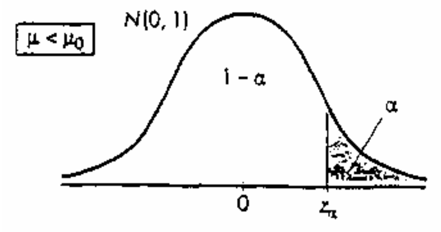
Eskualde onartua: $(0'3039, 2'0560)$

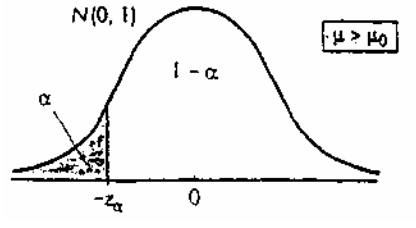
<u>3. Egiaztatu.</u> Hartutako laginean $p = \frac{30}{100} = 0'30$ da

<u>4. Erabaki</u>. Dentistak esandakoa gezurtzat hartzen da %95eko konfiantza mailarekin.

Aldebateko egiaztapena

Kasu hauetan, onartzen den eremua ez da bitarte simetrikoari dagokiona, alde batekoa baizik, ezkerrekoa edo eskuinekoa

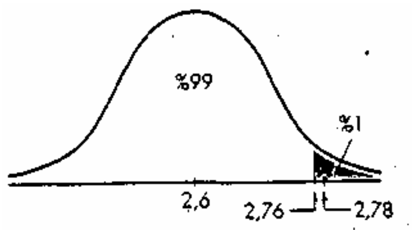




1. adibidea

Baserri bateko oiloen pisuak batezbestekoa 2’6 kg-koa eta desbideratze tipikoa 0’5 dituen banaketa normala dugu. Beste era bateko jatekoa ematen zaie 50 txitari. Handi egiten direnean, pisatu eta lortzen dugun batezbestekoa 2’78 kg, da. Populazio osoaren pisua <u>handitzen ez dela</u> dioen hipotesia egiaztatuko dugu , esangura maila %1 izanik.

Hipotesia: $H_0 : \mu \leq 2{,}6$



Onarpen eremua: $N\,(\mu_{\bar{x}}\ , \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(2'6\ , \frac{0'5}{\sqrt{50}}) = N(2'6\ , 0`071)$

“Handitzen ez dela” egiaztatu nahi bada, onartu behar da gutxitzea.

$\alpha = 0'01$ eta $1-\alpha = 0'99 \rightarrow z_\alpha = 2'33$

N(0 , 1)ean, onarpen eremua $(-\infty\ , 2'33)$ da. Eta $N(2'6\ , 0`071)$ banaketan?

$+2'33 = \frac{x-2'6}{0'071} \quad \rightarrow \quad x = 2'765$. Beraz, onarpen eremua $(-\infty\ , 2'765)$

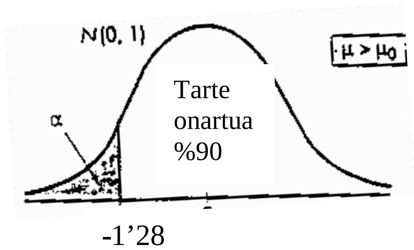
n = 50 tamainako laginean 2’ 78 kg. atera da. Onarpen eremutik kanpo dagoenez, ez da onartzen hipotesia

2. adibidea

Duela urte batzuk, herri bateko %53 lagunek alkatearen alde egin zuten. Azken egunotan, zoriz aukeratutako 360 pertsonari galdeketa egin zaie eta 176-k adierazi dute alkatearen alde daudela. Alkateak dio herritarren babesa ez zaiola gutxitu. Egiazta dezagun esandakoa egia ala gezurra den %10-eko konfiantza mailaz.

Hipotesia: p = 0’53

Hipotesia egia balitz, n =360 tamainako laginen banaketa:



$N(p\ , \sqrt{\frac{pq}{n}}) = N(0`53\ , \sqrt{\frac{0`53\ .\ 0`47}{360}}) =$ *N(0’53 , 0’026)*

“Ez zaiola gutxitu” adierazi badu, onartu behar da gehitzea

$\alpha = 0'10$ eta $1-\alpha = 0'90 \rightarrow z_\alpha = 1'28$

N(0 , 1)ean, onarpen eremua $(-1'28\ ,\ \infty)$ da. Eta $N(0'53\ , 0`026)$ banaketan?

$-1'28 = \frac{x-0'53}{0'026} \quad \rightarrow \quad x = 0'4967$. Beraz, tarte onartua: $(0'4967\ ,\ \infty)$

Hartutako laginean, alkatearen aldeko proportzioa $p_r = \frac{167}{360} = 0'4639$ atera da. Balio hori tarte onartuaren kanpo dagoenez, ez da egitzat hartzen alkateak esandakoa.

3. adibidea

Hauteskunde batzuetara *A*, *B* eta *C* alderdiak aurkeztu dira. Komentarista politiko batek hautesleen banaketa hau dela esan du:

A-ren alde %40 ; *B-ren alde %40 edo gehiago* ; *C-ren alde %40 edo gutxiago*

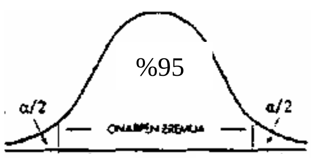
Hipotesi horiek 250 hautesleren lagina hartuta egiaztatu nahi dira

a) Aurkitu hipotesi bakoitzaren onarpen eremua, esangura maila %5 izanik

b) Lagina atera ondoren, A-ren alde 132 hautesle, B-ren alde 88 eta C-ren alde 30 agertu dira. Hartu hiru hipotesi horiei buruzko erabakiak

	A-rentzat	B-rentzat	C-rentzat
Hipotesiak	H_0: p = 0,4	H_0: $p \geq 0{,}4$	H_0: $p \leq 0{,}4$

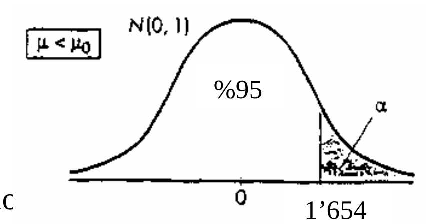
Onarpen eremuak aurkitzeko, kontutan izan behar dugu hiru kassuetan laginen proportzioen banaketa $N(p\,,\sqrt{\frac{pq}{n}}) = N(0`4\,,\sqrt{\frac{0`4\,.\,0`6}{250}}) =$ N(0’4 , 0’031) izango dela. Kasu bakoitzean, onarpen eremua hauek izango dira:



-1’96 -1’96

Aldebiko egiaztapenean , $\alpha = 0'05 - i$ dagokion balio karakteristikoa $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$ da.

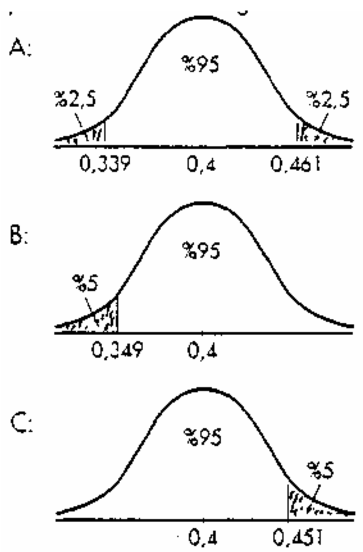
$x = 0'4 \pm 1'96 . 0'031 = (0'339\,,\,0'461)$



Aldebateko egiaztapenean, $\alpha = 0'05 - i$ dagokion balio karakteristikoak hauek dira $z_{\alpha} = -1'645$ eta $z_{\alpha} = 1'645$

$x = 0'4 - 1'645\ .0'031\,,\,\infty) = (0'349\,,\,\infty)$

$x = (-\infty\ ,\ 0'4 + 1'645 . 0'031) = (-\infty\ ,\,0'451)$



	A	B	C
Laginean lortutako proportzioak	$\frac{132}{250} = 0'528$	$\frac{88}{250} = 0'352$	$\frac{30}{250} = 0'12$
Onarpen eremuak	$(0'339\,,\,0'461)$	$(0'349\,,\,\infty)$	$(-\infty\ ,\,0'451)$
Erabakia	Hipotesia ukatu egiten da	Onartu egiten da	Onartu egiten da

ARIKETAK

1.- Enpresa batek egiten dituen 100 watioko bonbilen iraupenak banaketa normala jarraitzen du, desbidazio tipikoa 120 ordukoa izanik. Enpresak dioenez, batezbesteko iraupena gutxienez 800 ordukoa da.

Egia ote den frogatzeko, zoriz 50 bonbilako lagin bat hartu eta iraupena 750 ordukoa dela ikusten da. Adierazgarritasun-maila 0,01 izanik, enpresak esandakoa ez dela betetzen esan dezakegu?

2.- Botika-produktuak egiten dituen enpresa batek, bere iragarkietan dioenez, botika batek udaberriko alergiaren sintomak murriztu egiten ditu populazioaren %90ean.

Kontsumitzaile elkarte batek, botika hori 200 kideko laginean probatu eta iragarkian esaten dena 170 pertsonengan bete dela ikusi du. 0,05eko adierazgarritasun-maila izanik, zuzentzat hartu al da enpresak egiten duen propaganda?

3.- Osagai elektronikoak egiten dituen lantegi batean, osagai akastunen proportzioa %20a izan zen. Errendimendua hobetzeko zenbait ekintza eta inbertsio egin ondoren, 500 osagaiko zorizko lagina aztertu zen eta horien artean 90 akastunak gertatu ziren. Zein konfiantza-maila hartu behar da errendimendua aldatu ez dela onartzeko?

4.- Herrrialde jakin bateko biztanleen altuerak, desbideratze tipikoa 4 zm duen banaketa normala jarraitzen du, batezbestekoa ezezaguna delarik. Zoriz aukeratutako 400 pertsonetako lagin batean, batezbesteko altuera 1,75 mkoa gertatu da. Duela 10 urte batezbesteko altuera 1,68 mkoa bazen, batezbesteko hori handitu ez dela esan al daiteke %95eko konfiantza-maila erabilita? Erantzuna arrazoitu

5.- 1970. urteko errolda bateko datuen arabera, herrialde jakin bateko populazioaren %40a analfabetoa da. Duela gutxi 800 pertsonetako lagin baten gainean burututako inkestaren emaitzak, horietatik 300 analfabetoak direla dio. Esan al daiteko %95eko konfidantza-mailaz, analfabetismo-maila jaitsi dela?

6.- Herrialde jakin bateko hauteskunde-legeak, alderdi batek legebiltzarrean ordezkaririk lortzeko, dagokion hauteskundeetan gutxienez botuen %5a lortu behar duela dio. Hauteskunde horiek heltzear daudela, zoriz aukeratutako 1.000 herritarri egindako inkesta batek horietako 36-k *P* alderdiari botua emango diotela ezagutarazi du. Estima al daiteke %5eko esangura-mailaz *P* alderdiak ordezkaririk izango duela? Eta %1eko esangura-mailaz?