Giza eta Gizarte Zientziak

Matematika II

2. ebaluazioa

- Funtzioak: Limiteak, Deribatua…
- Integralak

Ignacio Zuloaga B.H.I. (Eibar)

FUNTZIOAK (II)

x-k har ditzakeen balioen multzoari funtzioaren **existentzia-eremua** esaten zaio, eta **D(f)** eran adieraziko dugu. Adibidez, $y=\frac{3}{1-x}$ funtzioan *x*-k ezin du *1* balioa hartu; beraz, existentzia-eremua *R – {1}* da.

a) $f(x)=3^{\frac{1}{x}}$ $x \neq 0$ Existentzia- eremua: D(f) = *R*- {0}

b) $f(x)=\sqrt{-x^2+4}$ $-x^2+4\geq 0$ Existentzia-eremua: D(f) = [-2 , 2]

Funtzioak (*y*) hartzen dituen balio guztien multzoari **ibiltartea** esaten zaio. Adibidez, $y = x^2$ funtzioaren ibiltartea $[0\,,\,\infty)$ da.

```
Ariketa.

Aurki itzazu ondoko funtzioen existentzia-eremua:
```

$$y=\frac{5}{x^2-100} \quad ; \quad y=\frac{5}{x^2+100} \quad ; \quad y=\sqrt{x^2-9}$$

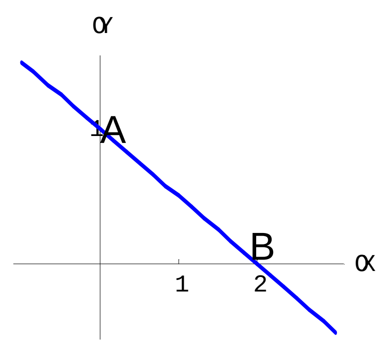
$$y=\sqrt{9-x^2} \quad ; \quad y=\frac{x-1}{x^2-6x+5} \quad ; \quad y=x^3-4x$$

1. mailako funtzio polinomikoak: y =ax+b (zuzenak)

a, zuzenaren malda da.
b=0 denean, zuzena (0,0) puntutik pasatzen da.

OX ardatza **y = 0** zuzena da, eta OY ardatza **x = 0** zuzena.
y = k zuzena, horizontala da; **x= k** , ordea, bertikala.

Zein da irudiko zuzenaren adierazpen analitikoa?



$$\boxed{a = malda = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-1}{2-0}=-\frac{1}{2}}$$

A(0,1) eta B(2,0) puntuetatik pasatzen da.

Bi eratan egingo dugu:

I) y=ax+b forma du.
A(0,1) puntua zuzenean dago; hots, **1=a(0)+b**
Berdin (2,0) puntua: **0=a(2)+b**.
Beraz, b=1 eta a=-1/2. Zuzenaren ekuazioa: $\boxed{\mathbf{y = -x/2 + 1}}$

II) P(x_1,y_1) puntu bat eta *m* malda ezagutuz,

zuzenaren ekuazioa $y - y_1 = m(x - x_1)$ da.

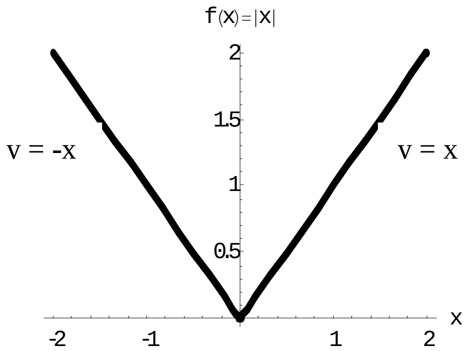
Puntua, A(0,1) da eta m = -1/2 . Beraz,
y -1 = -1/2(x - 0) ; $\boxed{\mathbf{y = -x/2 +1}}$

Balio absolutuak

y = | x |

$$y=|x|=\begin{cases} x & ; \; x\geq 0 \\ -x & ; \; x<0 \end{cases}$$

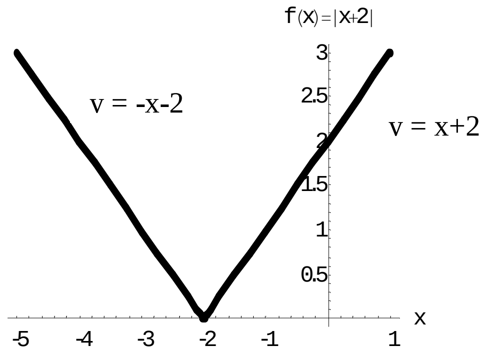
x	y
0	0
-1	1
-2	2
1	1
2	2



y = | x + 2 |

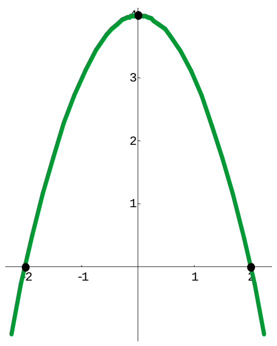
$$y=|x+2|=\begin{cases} x+2 & ; \; x\geq -2 \\ -(x+2) & ; \; x<-2 \end{cases}$$

x	y
-2	0
-1	1
0	2
-3	1
-4	2

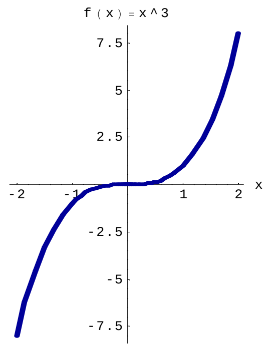


2., 3. eta 4. mailako funtzio polinomikoak

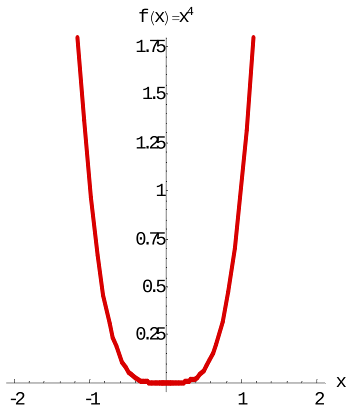
$y = 4 - x^2$



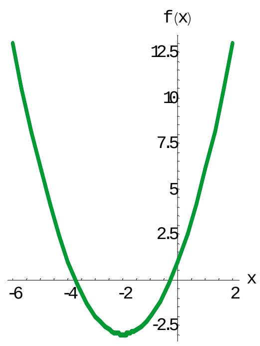
$y = x^3$



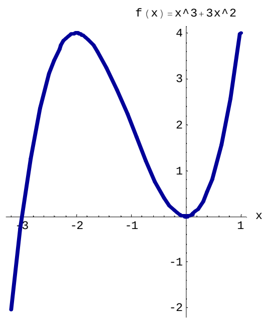
$y = x^4$



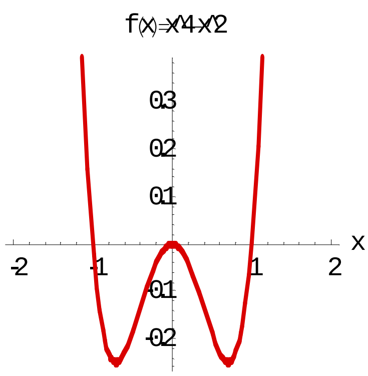
$y = x^2 + 4x + 1$



$y = x^3 + 3x^2$



$y = x^4 - x^2$

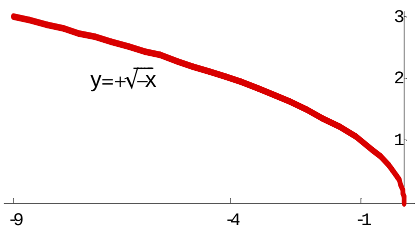


1. mailako funtzio irrazionalak

$y = \sqrt{-x}$

Existentzia-eremua: $\{x \leq 0\}$

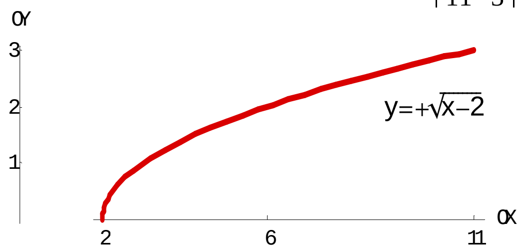
x	y
0	0
-1	1
-4	2



$y = \sqrt{x-2}$

Existentzia-eremua: $\{x \geq 2\}$

x	y
2	0
6	2
11	3

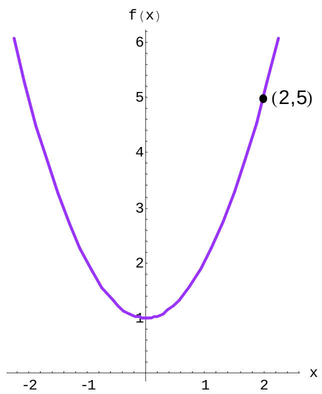


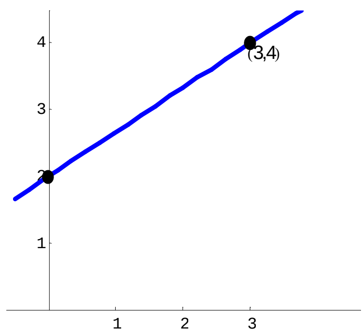
Ariketak

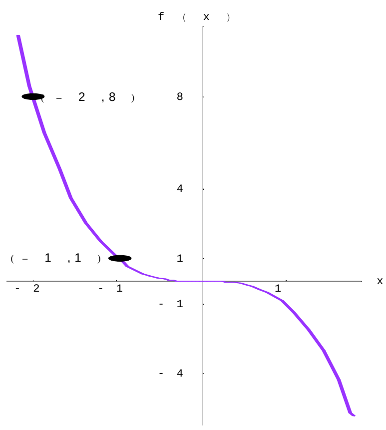
1. Adierazi grafikoki ondoko funtzioak:

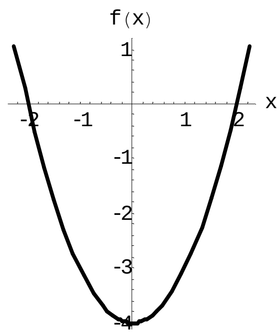
$y = x^2 - 1$; $y = 2 - x^2$; $y = 1 + x^3$; $y = |x+3|$; $y = \sqrt{1-x}$

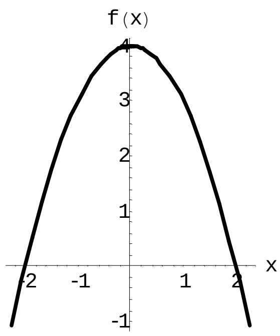
2. Zein da funtzio hauen adierazpen analitikoa?

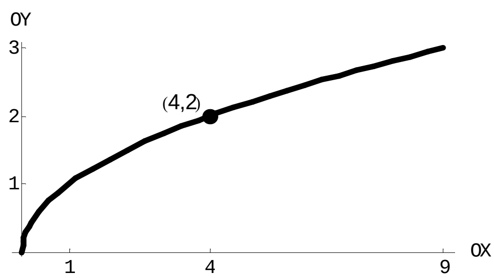


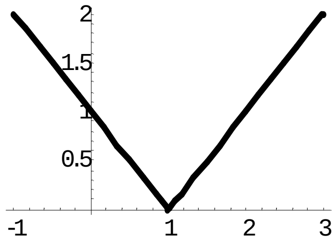


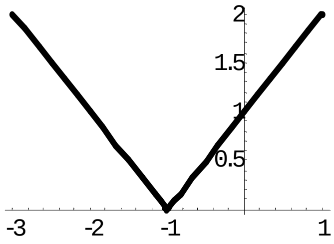












Alderantziz proportzionalak diren funtzioak

$$\boxed{\mathbf{y = -\frac{2}{x}}}$$

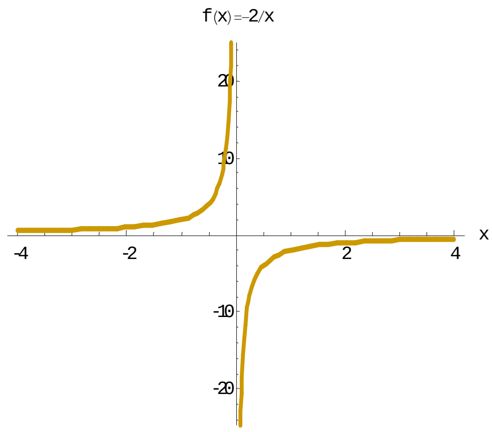
Existentzia-eremua: **D(f) = R – 0**
Asintota bertikala: **x = 0 zuzena** (OY ardatza).

x	-0,1	-0,01	...
y	20	200	...

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

x	0,1	0,001	...
y	-20	-2000	...

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$



Asintota horizontala: **y = 0 zuzena** (OX ardatza)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

$$\boxed{\mathbf{y = \frac{1}{x-1}}}$$

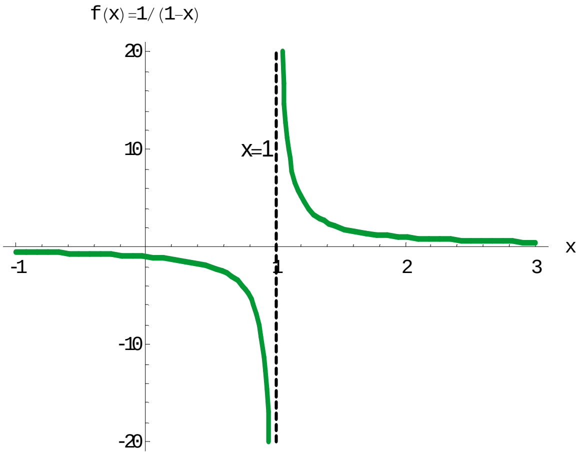
Existentzia-eremua: **D(f) = R – 1**
Asintota bertikala: **x = 1 zuzena**

x	0,9	0,999	...
y	-10	-1000	...

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

x	1,1	1,001	...
y	10	1000	...

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$



Asintota horizontala: **y = 0 zuzena** (OX ardatza)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

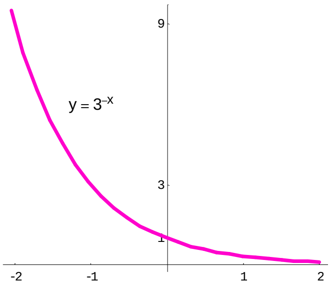
Funtzio esponentzialak:

$y = 3^{-x} = (1/3)^x$

<u>Asintota horizontala</u> (OX ardatza) eskuin aldetik

$$\lim_{x\to\infty} 3^{-x} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

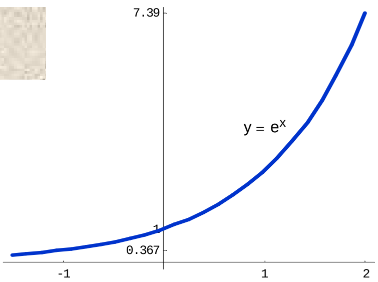
x	y
0	1
1	1/3
-1	3
-2	9



Edozein x (Existent
eremua:*R*), funtzioaren balioa , *y*, beti da positiboa;
Ibiltartea: $(0\,,\,\infty)$

Oinarria "e" zenbakia (2,711828...) duten funtzio esponentzialak

$y = e^x$

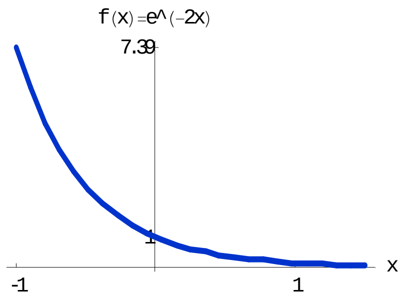


$$\lim_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

x	y
0	1
1	e = 2,71...
2	e^2 = 7,389...
-1	1/e = 0,3678...

<u>Asintota horizontala</u> (OX ardatza) ezker aldetik

$y = e^{-2x}$

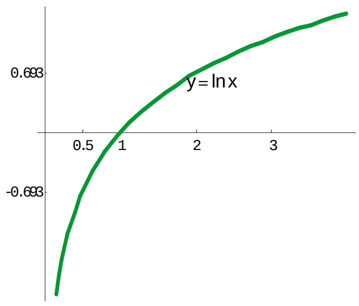


<u>Asintota horizontala</u> (OX ardatza) eskuin aldetik

$$\lim_{x\to\infty} e^{-2x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

x	y
0	1
-1	e^{-2} = 7,389...
2	e^{-4} = 0,018...
1	e^{-2} = 0,135...

Oinarria "e" zenbakia (2,711828...) duen funtzio logaritmikoa: $y = \ln x$



Ez dago zenbaki negatiboen logaritmorik

Existentzia-eremua: {x>0}

x	y
1	0
2	0,693
3	1,099
0,5	-0,693

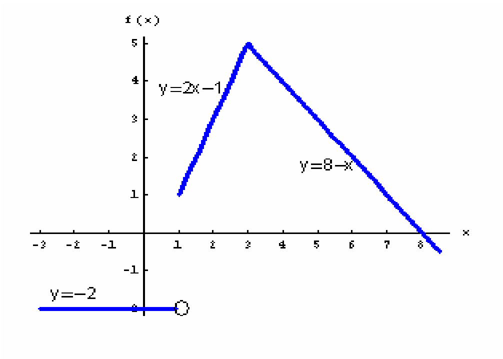
Zatika definituriko funtzioak

$$y=\begin{cases}-2 & ; \quad x<1\\ 2x-1 & ; \quad 1\le x<3\\ 8-x & ; \quad x\ge 3\end{cases}$$

$x<1$ denean, $y=-2$ zuzena irudikatzen da.

$1\le x<3$ denean, $y=2x-1$ funtzioa.

x	y
1	1
2	3
2,999	4,998



$x\ge 3$ denean, $y=8-x$ funtzioa.

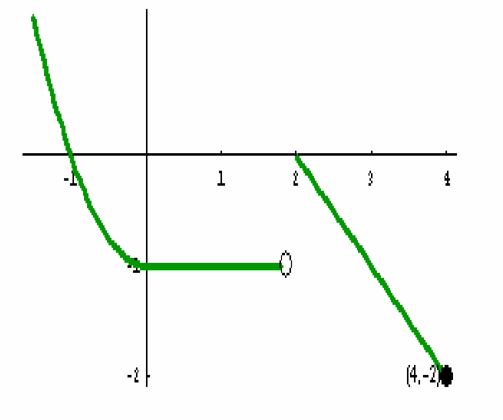
x	y
3	5
8	0

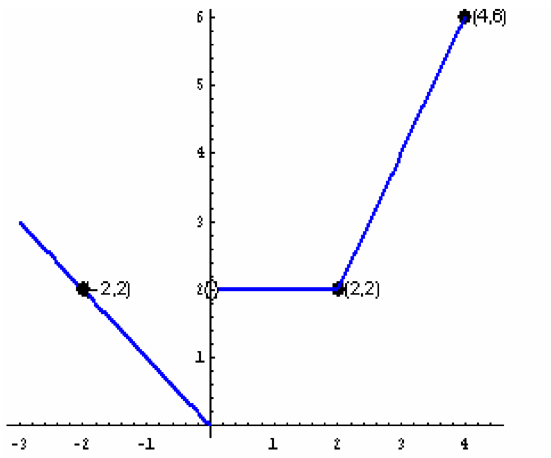
Ariketak

1. Irudikatu grafikoki ondoko funtzioak. Kasu bakoitzean seinalatu zein den existentzia-eremua eta, existitzen badira, asintotak.

$$y=\frac{1}{x} \quad ; \quad y=e^{2x} \qquad y=\begin{cases}-1 & ; \quad x\le 0\\ 2x & ; \quad 0<x<1\\ 2-x & ; \quad x\ge 1\end{cases} \qquad y=\begin{cases}2+x & ; \quad -2\le x\le 0\\ 1-x^2 & ; \quad 0<x\le 2\end{cases}$$

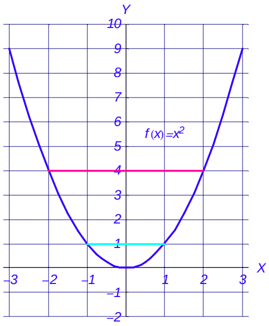
2. Zein da funtzio hauen adierazpen analitikoa?





Simetriak

➢ Simetria 0Y ardatzari begira



f simetrikoa da **y ardatzari** begira *x* eta –*x*ek irudi berdina dutenean, hots,

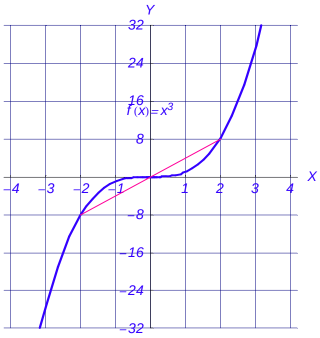
f(x)= f(-x) denean

Adibidez:

- 2 → 4 eta -2 → 4
- 1 → 1 eta -1 → 1

Mota horietako funtzioak **funtzio bikoitiak** direla esaten da.

➢ Simetria (0,0) puntuari begira



f simetrikoa da (0,0) **puntuari** begira x eta –xek irudi aurkakoa dutenean, hots, **f(x)=- f(-x)** denean

- 2 → 8
- -2 → -8

Mota horietako funtzioak **funtzio bakoitiak** direla esaten da.

Ariketa. Azter ezazu ondoko funtzioen simetriak:

$$y=x^4-3x^2+1 \qquad ; \qquad y=x^3-x \qquad ; \qquad y=\frac{1}{x} \qquad ; \qquad y=\frac{1}{x^2+1}$$

Funtzioen konposizioa

Adibidea :

Eman ditzagun $f(x)=\sqrt{x}$ eta $g(x) = x^2 - 1$ funtzioak. Kalkula ditzagun *(g o f)(x)* eta *(f o g)(x)* funtzio konposatuak.

- $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$

- *(f o g)(x)* kasuan, *f* funtzioa *g*-ren emaitzari aplikatu behar zaio:

$x \to g(x) \to f(g(x))$. Hau da, $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x^2-1] = \sqrt{x^2-1}$

(f o g) eta (g o f) ez dira berdinak

Ariketak

1. $f(x) = 2x+1$ eta $g(x)= x^2$ izanik , kalkula itzazu *f o g* eta *g o f* funtzio konposatuak . Betetzen al da trukatze propietatea? Kalkula itzazu *(f o g)(2)* eta *(g o f)(2)*

2. Egiazta ezazu $y = (4x2 - 1)^{10}$ funtzioa funtzio konposatua dela. Horretarako,har itzazu $f(x)=x^{10}$ eta $g(x)=4x^2 -1$ funtzioak eta kalkulatu *(f o g)(x).*

Limiteak

Albo-limiteak

Demagun $f(x)=\begin{cases} x+1 & ; \quad x<2 \\ -x+3 & ; \quad x\geq 2 \end{cases}$ funtzioa eta x = 2 abzisako puntua

x	f(x)
1,9	2,9
1,99	2,99
1,999	2,999
…	…

x	f(x)
2,1	0,9
2,01	0,99
2,001	0,999
…	…

f-ren albo-limitea *x* ezkerraldetik *2*rantz doanean *3* da, eta *x* eskuinaldetik *2*rantz doanean 1 da. Honela idatziko ditugu:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=3 \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=1$$

Funtzio batek *x* = *a* puntu batean limitea izango du baldin albo-limiteak berdinak direnean; hau da: $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$

Aurreko adibidean, *f* funtzioak ez du limiterik *x* = *2* puntuan.

Limitea existitzen bada, <u>bakarra</u> da. Ezin ditu bi balio ezberdin eduki.

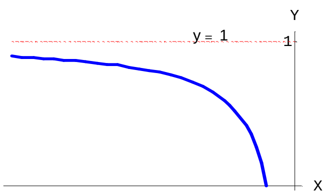
Adibidea

Demagun $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2}{x^2+1} & ; \quad x<1 \\ x+3 & ; \quad x\geq 1 \end{cases}$ funtzioa. Kalkulatu $\lim_{x\to 1} f(x)$ eta $\lim_{x\to 3} f(x)$

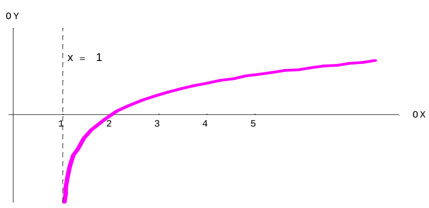
$a)$ $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\dfrac{2.1^2}{1^2+1}=1$; $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1+3=4$ $\Rightarrow$ Ez dago $\lim_{x\to 1} f(x)$

$b)$ $\lim_{x\to 3^-} f(x)=3+3=6$; $\lim_{x\to 3^+} f(x)=3+3=6$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 3} f(x)=6$

Limite infinituak puntu batean. Limiteak infinituan.



Ezkerreko grafikoan, funtzioa *1* baliora hurbiltzen da *x* aldagaia $-\infty$ rantz doanean. Hau da, $\lim_{x\to -\infty} f(x)=1$



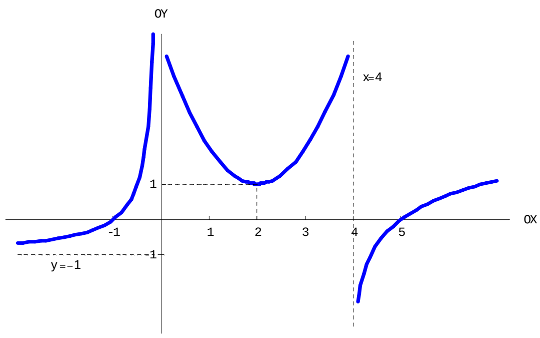
Aldiz, grafiko honetan, funtzioak $+\infty$ ra jotzen du *x* aldagaiak *1*erantz hurbiltzean eskuinetik. Hau da: $\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$

Ariketa. Demagun ondoko grafikoa. Zenbat da?

$\lim_{x\to -1} f(x)$; $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim_{x\to 2} f(x)$

$\lim_{x\to 4^+} f(x)$; $\lim_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim_{x\to \infty} f(x)$

$f(0)$; $f(2)$; $f(5)$



Limiteen kalkulua

$$\lim_{x\to -2}(3x^2+4)=3.(-2)^2+4=16$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-x^3}{5}=\frac{2-\infty}{5}=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{5}=\frac{1-1}{5}=\frac{0}{5}=0$$

<u>Indeterminazio kasuak</u>

a) $\frac{k}{0}$. Kasu horretan, limitearen balioa $+\infty$ edo $-\infty$ da. Adibidez,

$$f(x)=\frac{4}{x-3} \quad \text{funtzioan} \quad \lim_{x\to 3^-}f(x)=-\infty \quad \text{eta} \quad \lim_{x\to 3^+}f(x)=+\infty$$

b) $\frac{0}{0}$ indeterminazioa. Hori gainditzeko, deskonposatu faktoreetan zenbakitzailea eta izendatzailea, eta ondoren sinplifikatu. Adibidez,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1).(x^2+x+1)}{(x-1).(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

c) $\frac{\infty}{\infty}$ indeterminazioa. Baldin funtzioa $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a\,x^m+...}{b\,x^n+...}$ bada, hiru kasu hauek gerta daitezke:

- **m** > **n** izatea. Orduan, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\pm\infty$. Adibidez,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+1}{2x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+2x-x^3}{5x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{5x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{5}=-\infty$$

- **m** < **n** izatea. Kasu honetan limitearen balioa 0 da. Esate baterako,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{5x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{5x}=\frac{2}{\infty}=0$$

- **m = n** izatea. Orduan, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{a}{b}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x+1}{5x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{5x^3}=\frac{4}{5}$$

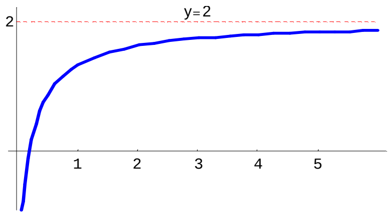
Ariketa. Kalkula itzazu:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-x-2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{2x^2-x} \quad ; \quad \lim_{x\to 3^-}\frac{x+2}{3-x} \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x+2}{1+x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{3-x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{x+3}{(x-1)^2} \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1+x-x^2}{3+x} \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty}2^x$$

Adar infinituak. Asintotak

Asintota horizontalak



Grafikoa *y = 2* zuzenera hurbiltzen da *x* aldagaia $+\infty$ rantz doanean. Hau da, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

y = 2 zuzena *f* funtzioaren asintota horizontala dela esaten da.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ betetzen bada, ***y = L*** zuzena *f* funtzioaren asintota horizontala dela esaten da.

Futzio arrazionalen kasuan, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, asintota horizontalak lortzeko, nahikoa da frakzioko zenbakitzaileko eta izendatzaileko polinomioen mailak aztertzea.

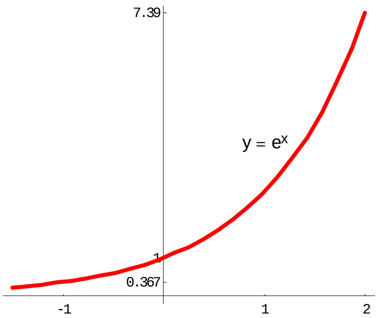
- ***P(x)*-ren maila *Q(x)*-ren maila baino txikiagoa bada, y = 0 zuzena** (OX ardatza) da asintota horizontala.
- **Biak, P(x) eta Q(x), maila berekoak** badira, maila hori daramaten koefizienteen arteko zatidura da asintota horizontala.

Adibidea. Lortu $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-2}$ eta $g(x) = \dfrac{3x}{x^2-2}$ funtzioen asintota horizontalak.

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$. Beraz, **y = 3 zuzena** *f*-ren asintota horizontala da, alde bietatik.

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Beraz, **y = 0 zuzena** (OX ardatza) *f*-ren asintota horizontala da, alde bietatik.

Funtzio esponentzialen kasuan ere agertzen dira asintota horizontalak.



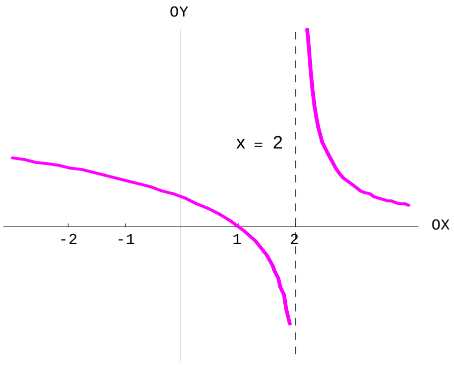
Demagun $y = e^x$ funtzioa.

$\lim_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

y = 0 zuzena (OX ardatza) da *f*-ren asintota horizontala, eta, kasu honetan, hurbilketa ezker aldetik soilik egiten da.

Funtzio esponentzialetan, berretzailea $-\infty$ egiten den kasuetan, OX ardatza du asintota horizontaltzat.

Asintota bertikalak



Ezkerreko grafikoan, funtzioak $-\infty$-rantz jotzen du *x* aldagaiak *2*rantz hurbiltzean ezkerretik, eta $+\infty$-rantz *x* aldagaia *2*rantz hurbiltzean eskuinetik. Hau da:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \text{eta} \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

***x* = *2* zuzena** *f* funtzioaren asintota bertikala dela esaten da.

Funtzio batek asintota bertikala izango du $x = a$ puntuan, baldin eta $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ bada.

Futzio arrazionalen kasuan, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$,asintota bertikala edukiko du *Q(x)* izendatzailea *0* egiten duten *x*-ren balioetan, baldin eta *x*-ren balio horietarako *P(x)* zenbakitzailea anulatzen ez bada.

<u>Adibidea.</u> *Lortu* $f(x) = \dfrac{5}{x^2-9}$ *eta* $g(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-2}$ *funtzioen asintota bertikalak.*

I) $x^2-9 = 0$; $x = +3$ eta $x = -3$

$\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to -3} f(x) = -\infty$

Beraz, ***x* = -*3*** eta ***x* = *3* zuzenak** dira *f*-ren asintota bertikalak.

II) x-2 = 0 ; x=2 $\qquad \lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x-2} = \lim_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x = 2$

Beraz, *g* funtzioak ez du asintota bertikalik *x* = *2* puntuan, ez inon.

Ariketa ebatzia

Demagun $y = \dfrac{2x}{x-1}$ *funtzioa. Aurkitu existentzia-eremua eta asintota bertikalak eta horizontalak. Ondoren, adierazi grafikoki.*

Existentzia-eremua: $R - \{1\}$

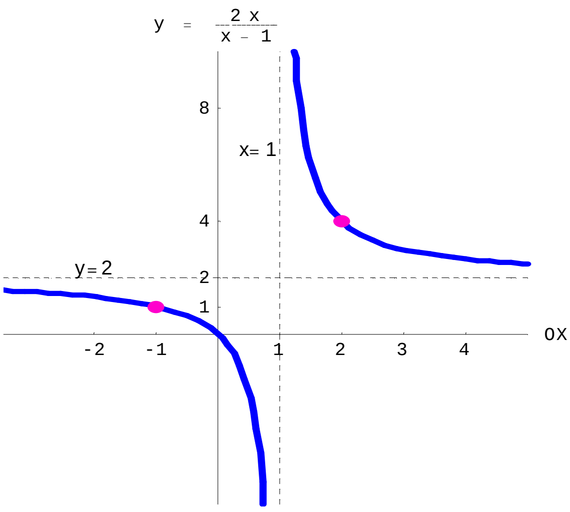
Asintota bertikala: *x* = *1* zuzena.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

Asintota horizontala*: y* = *2* zuzena.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$$

x	y
0	0
-1	1
2	4



Oharrak:

- Funtzio polinomikoek ez dute asintotarik
- Funtzio batek infinitu asintota bertikal eduki ditzake. Adibidez, $y = tg\ x$ funtzioak
- Funtzio batek gehienez asintota horizontal bat eduki dezake; batzutan alde batetik, eta beste batzuetan bi aldeetatik $(+\infty$ - rantz eta $-\infty$ - rantz).

Ariketak.

1. Lor itzazu ondoko funtzioen asintota bertikalak eta horizontalak.

$$a)\ y=\frac{x^2-1}{4} \quad ; \quad b)\ y=\frac{3x-1}{x+2} \quad ; \quad c)\ y=\frac{x-1}{x^2-5x+6}$$

$$d)\ y=\frac{4x^2}{x^2+1} \quad ; \quad e)\ y=\frac{1}{5-x} \quad ; \quad f)\ y=e^{\frac{x}{2}}$$

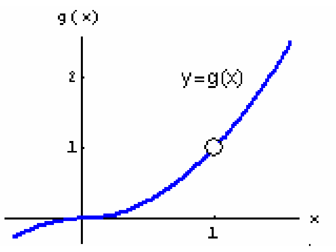
2. Kalkulatu *a* eta *b* parametroen balioak $f(x)=\dfrac{1-bx}{x-a}$ funtzioaren kasuan *x = 2* zuzena asintota bertikala eta *y = 3* zuzena asintota horizontala izan daitezen.

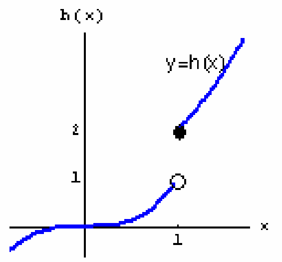
Jarraitutasuna

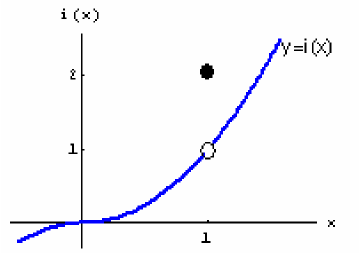
Definizioa. *f* funtzioa jarraitua da *x = a* puntuan, baldin hiru baldintza hauek betetzen badira:

- *f(a)* existitzen da.
- $\lim_{x \to a} f(x)$ existitzen da eta finitua da.
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ da.

Beraz, jarraitua ez bada punturen batean, ondoko arrazoi batengatik izango da:







- ***g*** funtzioa ez da existitzen *x = 1*puntuan; hau da, **ez dago *g(1)* baliorik**.
- ***h*** funtzioa eten egiten da *x = 1* puntuan, ezkeraldeko eta eskuinaldeko limiteak besberdinak direlako; hots, **ez da existitzen** $\lim_{x \to 1} h(x)$
- ***i*** funtzioa eten egiten da *x = 1* puntuan, zeren $\lim_{x \to 1} i(x)$ **existitzen den arren, horren balioa ez da *i(1)* balioaren berdina.**

<u>1. adibidea</u>

Aztertu ondoko funtzioaren jarraitutasuna: $y = \begin{cases} 1 + x^2 & ; \quad x \le -1 \\ 1 & ; \quad -1 < x < 0 \\ x + 1 & ; \quad x \ge 0 \end{cases}$

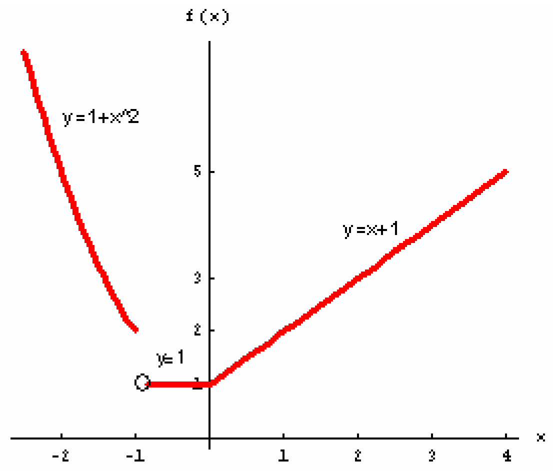
- Azter dezagun x = -1 puntuan:

f(-1) = 1+ (-1)^2 = 2

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1 + (-1)^2 = 2$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to -1} f(x)$ ez da existitzen . Beraz, **etena da x = -1 puntuan**.



- Azter dezagun x = 0 puntuan:

f(0) = 0 + 1 = 1

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + 1 = 1$

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ denez **jarraitua da x=0 puntuan**.

<u>2. adibidea</u>

Aztertu ondoko funtzioaren jarraitutasuna "a" parametroaren arabera

$$y=\begin{cases} 2x+a & ; \quad x\le 1 \\ x^2-ax+2 & ; \quad x>1 \end{cases}$$

$x\neq 1$ denean, *f* funtzioa puntuetan jarraitua da. Eta *x = 1*ean?

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2.1 + a = 2 + a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1^2 - 1.a + 2 = 3 - a$$

$$f(1) = 2 + a$$

x = 1 puntuan limitea edukitzeko, *2+a = 3-a* izan behar du; hau da, a = ½. Beraz:

- $a=\frac{1}{2}$ denean, f funtzioa jarraitua da puntu guztietan
- $a\neq\frac{1}{2}$ denean, f funtzioa etena da x = 1 puntuan

<u>3. adibidea</u>

Aztertu ondoko funtzioaren jarraitasuna: $y=\dfrac{2}{x-3}$

Ez du zentzurik jarraitutasunari buruz hitz egitea funtzioa existitzen ez den eremuan. Adib., $y=\sqrt{x-3}$ funtzioa ezin da jarraitua izan x<3 tarteko puntuetan.

f(3) ez da existitzen, x = 3 puntua ez baita *f*-ren existentzia-eremukoa. Beraz, ez da jarraitua x = 3an.
Zein motatako etena duen determinatzeko, x = 3 puntuko albo-limiteak kalkulatu behar ditugu.

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2}{x-3}=-\infty \qquad ; \qquad \lim_{x\to 3^+}\frac{2}{x-3}=+\infty$$

Beraz, *f* funtzioak **asintota bertikala du** eta jauzi infinituko etena du **x = 3** puntuan.

<u>4. adibidea</u>

Aurkitu k-ren balioa, $y=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & ; \quad x\neq 1 \\ k & ; \quad x=1 \end{cases}$ *funtzioa jarraitua izan dadin x = 1 abzisako puntuan.*

f(1) = k

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$$

f(1) = $\lim_{x\to 1} f(x)$ bete behar denez, **k = 2** izan beharko du

Jarraitutasuna tarte batean

Tarte batean jarraitua da funtzio bat baldin tarteko puntu guztietan jarraitua denean.

a) $y=\frac{1}{x}$ funtzioa ez da jarraitua [-1 , 1] tartean, barneko puntu batean (*x=0*) etena baita

b) $y=\begin{cases} x^2 & ; \quad x<1 \\ 2 & ; \quad x\geq 1 \end{cases}$ funtzioa ez da jarraitua [0 , 1] tartean. Zergatik?

c) $y=x^3-\frac{x}{4}$ eta funtzio polinomiko guztiak jarraituak dira *R* osoan.

Ariketak

1. Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna:

$$y=\frac{1}{x^2+49} \qquad y=\frac{1}{2x-1} \qquad y=e^{3x}$$

2. Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna eta aurkitu asintotak. Ondoren, egizu adierazpen grafikoa

$$y=|x-4| \qquad y=\begin{cases} x^2-1 & ; \quad x<0 \\ x-1 & ; \quad 0\leq x\leq 2 \\ 3 & ; \quad x>2 \end{cases}$$

3. Lortu a eta b parametroek izan behar duten balioa funtzio hau jarraitua izan dadin R multzoak.

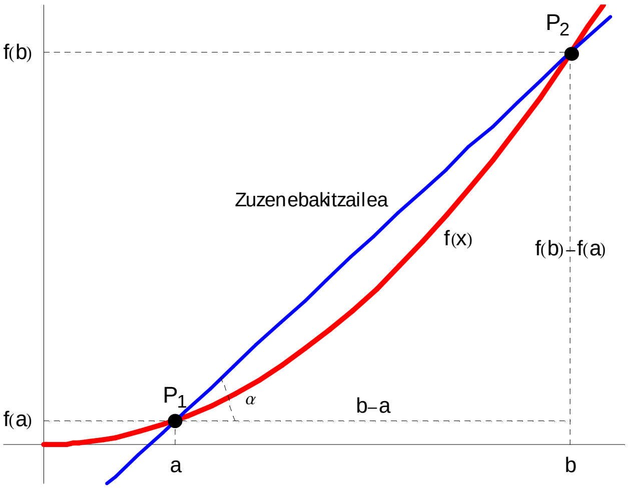
$$y=\begin{cases} 5x & ; \quad x\leq -1 \\ ax^2+b & ; \quad -1<x\leq 2 \\ 3x-2 & ; \quad x>2 \end{cases}$$

(Sol.: a = 3 eta b=-8)

DERIBATUA (II)

Funtzio baten batez besteko aldaketa-tasa

Kontsidera dezagun irudiko grafikoan adierazitako *f* funtzioa, eta $P_1 = (a\ ,\ f(a))$ eta $P_2 = (b\ ,\ f(b))$ puntuak.



Funtzioaren batez besteko aldaketa-tasa *a*-ren eta *b*-ren artean hauxe da:

$$BBAT\ [a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Zatidura horren balioa α angeluaren tangente trigonometrikoaren balioaren berdina da eta, hori, aldi berean, P_1 eta P_2 puntuetatik pasatzen den zuzenaren (kurbarekiko ebakitzailea) maldaren berdina da.

f funtzioak *[a , b]* tartean duen **batez besteko aldaketa-tasa** grafikoaren *(a , f(a))* eta *(b , f(b))* puntuetatik pasatzen den **zuzen ebakitzailearen malda**ren berdina da.

BBATaren interpretazio fisikoa

Higikari batek denboraren arabera duen posizioaren funtzioa kontsideratuz gero, tarte bateko batez besteko aldaketa-tasak higikari horrek tarte horretan duen *batez besteko abiadura* adieraziko du.

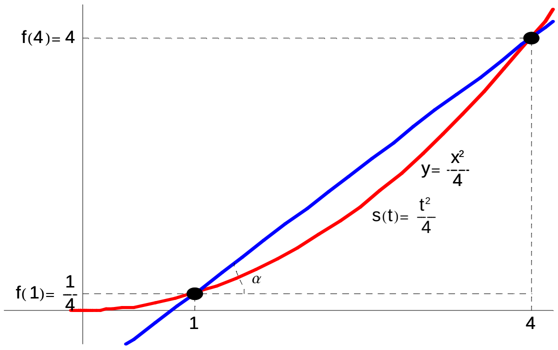
Batzuetan, *f* funtzioaren BBATa era honetan adierazten da:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ edo } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

1. adibidea

Demagun $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ *funtzioa. Kalkulatu:*

- *Batez besteko aldaketa-tasa [1 , 4] tartean.*
- *x = 1 eta x = 4 abzisa puntuetatik pasatzen den zuzen ebakitzailearen malda.*
- *Aurreko zuzen ebakitzaileak OX ardatzarekin eratzen duen angeluaren tangentea.*



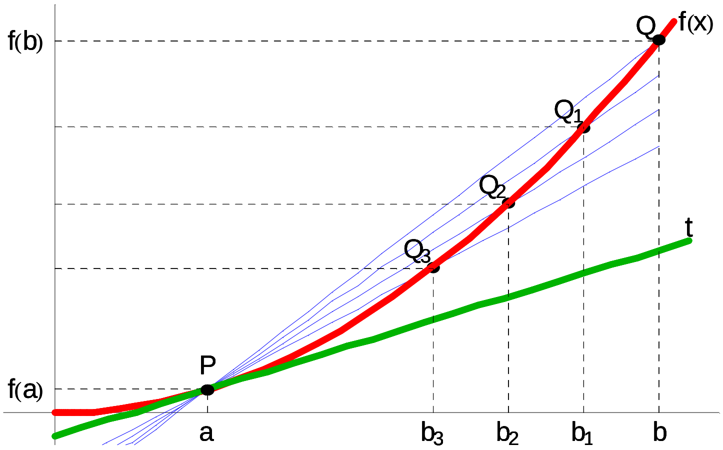
- *Higikari baten posizioa denboraren funtzioan* $s(t) = \dfrac{t^2}{4}$ *eran adierazten bada, zenbat da batez besteko abiadura 1 h eta 4 h bitartean?*

4 galderak modu berean kalkulatzen dira, eta balio bera dute; hau da:

$$BBAT\ [1\ ,\ 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\frac{4^2}{4} - \frac{1^2}{4}}{4 - 1} = \frac{\frac{15}{4}}{3} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

Funtzioen deribatua puntu batean

Puntu bateko alduiuneko aldaketa-tasak garrantzi handia du funtzioen azterketan eta matematikoki funtzioak puntu horretan duen **deribatua** deritzo.



Abzisak *a* baliotik gero eta hurbilago dauden b_1, b_2, b_3... balioak hartzean, horiei dagozkien PQ_1, PQ_2, PQ_3... zuzen ebakitzaileak hainbat eta hurbilago daude $x= a$ puntutik pasatzen den ***t*** zuzen tangentearekin edo zuzen ukitzailearekin.

Zuzen ukitzaile horren malda PQ_n zuzen ebakitzaileen malden limitea izango da, alegia, *f* funtzioaren BBATen limitea: $\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ***f'(a)*** eran adierazten da.

Kontura zaitezkeenez, $h = b\text{-}a$ eginez, $b = a+h$ dugu. Gainera, *b* balioa *a*-rantz joaten denean $h = b\text{-}a$ balioa zerorantz joaten da. Beraz, era honetan idatz dezakegu aurreko adierazpena: $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Beraz, honako hau baiezta dezakegu:

> *f* funtzioak $x = a$ abzisako puntuan duen **deribatua** funtzioaren grafikoko *(a , f(a))* puntuko **zuzen ukitzailearen malda** da.

Deribatuaren interpretazio fisikoa

Higikari batek denboraren arabera duen posizioaren funtzioa

Gehikuntzen notazioa erabiliz, era honetan adieraz dezakegu *f'(x)*:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{df}{dx}$$

Adibidea

Definizioa erabilita, kalkula dezagun $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ funtzioaren deribatua x = 1 puntuan.

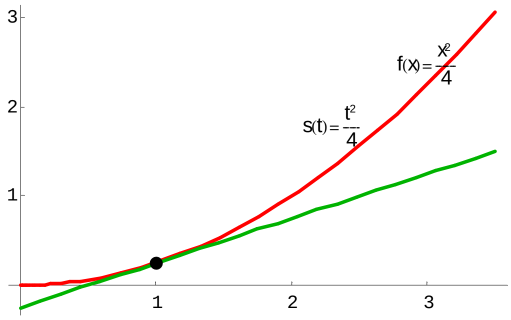
$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(1+h)^2}{4}-\frac{1^2}{4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+2h+h^2)-1}{4h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{4h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{4h}=\lim_{h\to 0}\frac{2+h}{4}=\frac{2}{4}=0{,}5$$

Modu errazagaoan kalkula daiteke; hau da, deribatuen formulak erabilita:

$$f'(x)=\frac{1}{4}2x=\frac{x}{2}\quad\to\quad f'(1)=\frac{1}{2}=0{,}5$$

2. adibidea.



Demagun $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ *funtzioa. Kalkulatu:*

- *Aldiuneko aldaketa-tasa x = 1balioko abzisa puntuan.*
- *x = 1 abzisa puntutik pasatzen den zuzen ukitzailearen malda.*
- *f-ren deribatua x = 1 abzisa puntuan.*
- *Higikari baten posizioa denboraren funtzioan* $s(t)=\dfrac{t^2}{4}$ *eran adierazten bada, zenbat da aldiuneko abiadura t = 1 seg. denean?*

4 galderak modu berean kalkulatzen dira, eta balio bera dute; hau da:

$$f'(1)=\ 0,5$$

Zuzen ukitzailearen ekuazioa

Lortu $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ *funtzioaren grafikoak x = 1 abzisako puntuan duen zuzen ukitzailearen ekuazioa.*

Ondokoa da zuzen baten puntu-malda motako ekuazioa: $\mathbf{y - y_0 = m(x - x_0)}$

$P(x_0 , y_0)$ eta m malda lortu behar ditugu.

Puntua: $x = 1$ bada, $f(1)=\dfrac{1}{4}$ da. Beraz, zuzena (1 , ¼) puntutik pasatzen da

Malda, $f'(1)$, lehenago kalkulatu dugu: $m = f'(1) = 0,5$

Balio horiek $y - y_0 = m(x - x_0)$ ekuazioan ordezkatuz,

$$y-\frac{1}{4}=0,5(x-1) \quad \text{edo} \quad 2x - 4y - 1 = 0$$

Ariketak

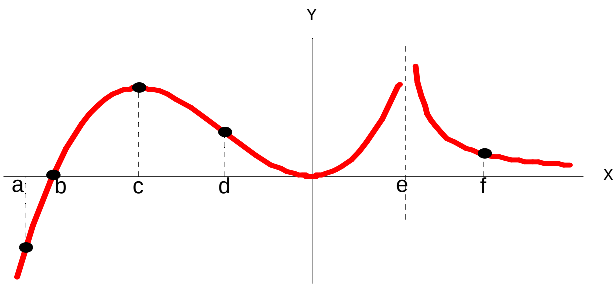
1. Izan bedi $y=\dfrac{1}{x}$ funtzioa.

a)Aurki ezazu batez besteko aldaketa-tasa [1 , 2] tartean. Zein da bere esangura geometrikoa?
b)Aurki ezazu aldiuneko aldaketa-tasa x = 1 abzisako puntuan.Zein da bere esangura geometrikoa?

2. Aurki ezazu $y = x^3$ funtzioaren zuzen ukitzailearen ekuazioa x=-2 abzisako puntuan

3. Izan bedi f(x) = x^2 - 8x + 12 funtzioa.
a)Lor ezazu x = 1 abzisako puntutik pasatzen den zuzen ukitzailearen ekuazioa.
b)Zein puntutan zuzen ukitzailea da OX ardatzaren paraleloa?
c)Zein puntutan zuzen ukitzailea da y=2x+5 zuzenaren paraleloa?. Idatzi zuzen ukitzaile horren ekuazioa.

4. Ondoko grafikoa duen f(x) funtzioan, nolakoak dira deribatuen balioen zeinuak “a”, “b”, “c”, “d”, “e” eta “f” puntuetan? Positibo, negatibo ala zero?



Funtzio deribatua

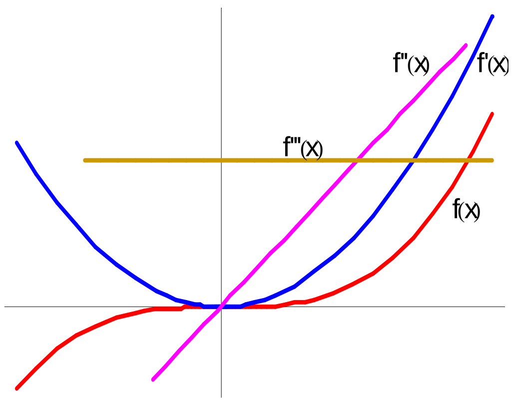
f’ funtzio bat kontsidera dezakegu, *x* abzisako puntu bakoitzari *f* funtzioak puntu horretan duen deribatuaren balioa egokitzen diona.

$$x \rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Horrela definituriko funtzioari *f*-ren **funtzio deribatua** deritzo edo, labur esanda, **deribatua**.

f(x) = x^3 izanik, zein da funtzio deribatua? Eta bigarren deribatua; eta hirugarrena?

$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$



Hona hemen $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ eta $f'''(x) = 6$ funtzio deribatuen grafikoak.

Puntu batean kalkulatu nahi izanez gero, nahikoa da funtzio deribatuan *x*-ren balioa ordezkatzea.

Albo-deribatuak

> "Funtzio bat deribagarria da puntu batean baldin eta soilik baldin puntu horretan ezkerraldeko eta eskuinaldeko deribatuak berdinak badira".

Adibidea 1

Kalkulatu $f(x)=|x|$ *funtzioak x = 0 abzisako puntuan dituen albo- deribatuak*

$$f(x)=\begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Ezkerraldeko deribatua: $f'(x)=-1$; beraz, $f'(0^-)=-1$

Eskuinaldeko deribatua: $f'(x)=1$; beraz, $f'(0^+)=1$

$f'(0^+)$ eta $f'(0^-)$ desberdinak direnez, ez da existitzen $f'(0)$

Adibidea 2

Kalkulatu $f(x)=\begin{cases} x-2 & ; \quad x \leq 2 \\ (x-2)^2 & ; \quad x > 2 \end{cases}$ *funtzioak x = 2 abzisako puntuan dituen albo-deribatuak*

Ezkerraldeko deribatua: $f'(x)=1$; beraz, $f'(2^-)=1$

Eskuinaldeko deribatua: $f'(x)=2.(x-2).1 \quad \rightarrow \quad f'(2^+)=2.(2-2).1=0$

$f'(2^+) \neq f'(2^-)$ denez gero, *f* funtzioa ez da deribagarria x = 2 puntuan

Deribagarritasuna eta jarraitutasuna

x = a abzisako puntuan ***f* funtzioa deribagarria izan dadin, beharrezkoa da *f* jarraitua izatea** puntu horretan.

Nolanahi den, deribagarria izateko *a* puntuan ez da nahikoa *a* puntuan jarraitua izatea, zeren gerta baitaiteke *a* puntuan *f* jarraitua izatea baina deribagarria ez izatea. Esate baterako,aipatu berri ditugun bi funtzioak: $f(x)=|x|$ eta $f(x)=\begin{cases} x-2 & ; \quad x \geq 2 \\ (x-2)^2 & ; \quad x < 2 \end{cases}$

- Lehena *x = 0* puntuan jarraitua da, baina ez da deribagarria
- Bigarrena *x = 2* puntuan jarraitua da, baina ez da deribagarria.

> Baldin *f* funtzioa deribagarria bada *x = a* puntuan, orduan *f* funtzioa jarraitua da *x = a* puntuan.

<u>Adibidea 3</u>

Aztertu $f(x)=|x-3|$ *funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna x = 3 puntuan. Marraztu funtzioa.*

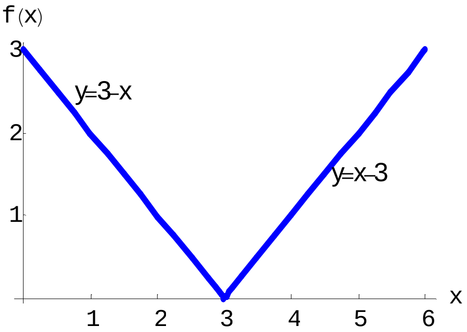
$$f(x)=|x-3|=\begin{cases} x-3 & ; \quad x \geq 3 \\ -(x-3) & ; \quad x < 3 \end{cases}$$

Jarraitutasuna x=3 puntuan :

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 0$ Jarraitua da

f(3) = 0



Deribagarritasuna x = 3 puntuan:

$f'(3^-) = -1$

$f'(3^+) = 1$

Ez da deribagarria

<u>Adibidea 4</u>

Aztertu $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ; \quad x \leq 1 \\ 2 & ; \quad 1 < x < 2 \\ -\dfrac{x}{2}+2 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$ *funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna. Marraztu funtzioa.*

x = 1 puntuan:

Jarraitutasuna x=1 puntuan :

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1^2+1=2$ Jarraitua da

f(1) = 1^2+1 = 2

Deribagarritasuna x = 1 puntuan:

$f'(1^-): \quad f'(x)=2x \rightarrow f'(1^-)=2.1=2$

$f'(1^+)=0$

Ez da deribagarria x = 1 puntuan

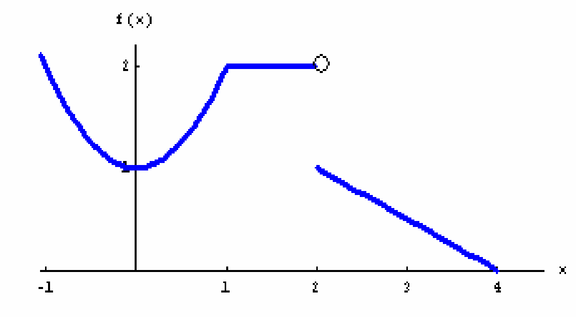
x = 2 puntuan:

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\dfrac{2}{2}+2=1$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$

f(2) = 1

Ez da jarraitua *x* = *2*an. Beraz, ez da deribagarria x = 2 puntuan.



Intuitiboki zera esan genezake: “Grafikoaren norabidea bat-batean aldatzen bada puntu batean (erpina irudikatzen da), puntu horretan funtzioa ez da deribagarria”

Adibidea 5

$f(x)=\begin{cases} 3-ax^2 & ; \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{ax} & ; \quad x>1 \end{cases}$ *funtzioa emanik, determinatu a-ren balioa, funtzioa jarraitua eta deribagarria izan dadin x=1 puntuan.*

Jarraitutasuna x=1 puntuan : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3-a(1)^2 = 3-a$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{2}{a}$

f(1) = 3- a

Jarraitua izateko *x=1* puntuan, $3-a=\dfrac{2}{a}$ bete behar du; hau da:

$$3a-a^2=2 \quad\to\quad a^2-3a+2=0 \quad\to\quad a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} \quad\to\quad a=1 \text{ eta } a=2$$

Ikus dezagun *a*-ren bi balio horientzat *f* funtzioa deribagarria den *x = 1* puntuan

Deribagarritasuna *x = 1* puntuan *a = 1* denean:

$$f(x)=\begin{cases} 3-1x^2=3-x^2 & ; \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{1x}=\dfrac{2}{x} & ; \quad x>1 \end{cases}$$

$f'(1^-): \ f'(x)=-2x \quad\to\quad f'(1^-)=-2$

$f'(1^+): \ f'(x)=-\dfrac{2}{x^2} \quad\to\quad f'(1^+)=-2$

Deribagarria da *a=1* denean.

Deribagarritasuna *x = 1* puntuan *a = 2* denean:

$$f(x)=\begin{cases} 3-2x^2 & ; \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x} & ; \quad x>1 \end{cases}$$

$f'(1^-): \ f'(x)=-4x \quad\to\quad f'(1^-)=-4$

$f'(1^+): \ f'(x)=-\dfrac{1}{x^2} \quad\to\quad f'(1^+)=-1$

Ez da deribagarria *a=2* denean

Ariketak

1. Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna eta deribagarritasuna, adierazitako puntuetan:

$f(x)=|x+1|$, x = -1 puntuan

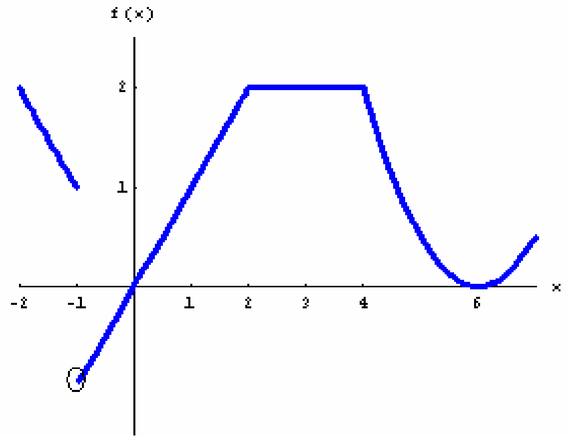
$f(x)=\begin{cases} x+2 & ; \quad x<4 \\ x & ; \quad x\geq 4 \end{cases}$, x = 4 puntuan

$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & ; \quad x<2 \\ x^2+3 & ; \quad x\geq 2 \end{cases}$, x= 2 puntuan

2. Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna eta deribagarritasuna.

$f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$; $g(x)=\begin{cases} 4x+8 & ; \quad x\leq -2 \\ 4-x^2 & ; \quad -2<x<2 \\ 4x-8 & ; \quad x\geq 2 \end{cases}$

3. Aztertu irudian adierazitako funtzioaren deribagarritasuna.



Deribatuen kalkulua. Formulak

<u>Eragiketak</u>

- Konstante baten eta funtzio baten arteko biderkaduraren deribatua

$$y = k\,.\,g(x) \;\Rightarrow\; y' = k\,.\,g'(x)$$

- Batura funtzioaren deribatua

$$y = f(x) \pm g(x) \;\Rightarrow\; y' = f'(x) \pm g'(x)$$

- Biderkadura funtzioaren deribatua

$$y = f(x).g(x) \;\Rightarrow\; y' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

- Zatidura funtzioaren deribatua

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \;\Rightarrow\; y' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

- Funtzio konposatuaren deribatua: katearen erregela

$$y = (f \circ g)(x) \;\Rightarrow\; y' = f'[g(x)]\,.\,g'(x)$$

Adibideak

I) $y = sin\ 3x$ funtzioa funtzio konposatu bat da, $f(x) = sin\ x$ *eta* $g(x) = 3x$ direlarik. Izan ere, $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(3x) = \sin 3x$

Bere deribatua: **y'** = f'[g(x)] . g'(x) = cos[g(x)].g'(x) = **cos 3x . 3**

II) Kalkula dezagun $y = (4x^2-1)^{10}$ funtzioaren deribatua.

Funtzio konposatua da. Izan ere, $f(x) = x^{10}$ eta $g(x) = (4x^2-1)$ hartuta, $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(4x^2-1) = (4x^2-1)^{10}$

Katearen erregela: **y'** = $f'[g(x)]\ .\ g'(x) = 4[g(x)]^9.g'(x) =$ $\mathbf{4(4x^2-1)^9\ .(8x-0)}$

Orokorrean, funtzioa konposatua denean **u** letraz adieraziko dugu; hau da, y = sin [g(x)] edo y = sin u funtzioaren deribatua **y' = u'.cos u** idatziko dugu.

Deribatuen taula

Funtzio bakunak		Funtzio konposatuak	
f(x) = k	f ’(x) = 0	Notazioa errazteko, *u* delakoak *x*-ren funtzio bat adierazten du	
f(x) = x	f ’(x) = 1		
f(x) = x^n	f ’(x) = nx^{n-1}	f(x) = u^n	f ’(x) = $nu^{n-1}u'$
f(x) = $\sqrt{x}$	f ’(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	f(x) = $\sqrt{u}$	f ’(x) = $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
f(x) = $\sqrt[n]{x}$	f ’(x) = $\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	f(x) = $\sqrt[n]{u}$	f ’(x) = $\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
f(x) = ln x	f ’(x) = $\frac{1}{x}$	f(x) = ln u	f ’(x) = $\frac{u'}{u}$
f(x) = $\log_a x$	f ’(x) = $\frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$	f(x) = $\log_a u$	f ’(x) = $\frac{u'}{u}\frac{1}{\ln a}$
f(x) = e^x	f ’(x) = e^x	f(x) = e^u	f ’(x) = $e^u u'$
f(x) = a^x	f ’(x) = a^x . ln a	f(x) = a^u	f ’(x) = $a^u u' \ln a$
f(x) = sin x	f ’(x) = cos x	f(x) = sin u	f ’(x) = $u' \cos u$
f(x) = cos x	f ’(x) = -sin x	f(x) = cos u	f ’(x) = $-u' \sin u$
f(x) = tg x	f ’(x) = $\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	f(x) = tg u	f ’(x) = $\frac{u'}{\cos^2 u} = \sec^2 u$

Ariketak

1. Kalkulatu ondoko funtzioen deribatuak:

$y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $y = \sqrt[3]{x^2}$; $y = (1 + x + x^2)^2$; $y = \sqrt{(1 + x + x^2)}$

$y = \sin \dfrac{2}{x}$; $y = \sin \dfrac{x}{2}$; $y = \dfrac{\ln x}{x}$; $y = \dfrac{(4x^2 - 1)^5}{1 - 2x}$

$y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)^3$; $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $y = \cos^2 x$; $y = \sin x^2 .\sin^2 x$

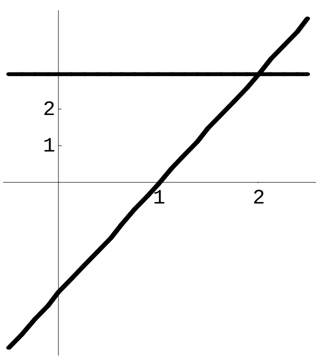
$y = \sqrt{\sin x}$; $y = \dfrac{a}{2}x + b$; $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{3x}$; $y = \dfrac{\sqrt[3]{1 + 2x}}{5}$

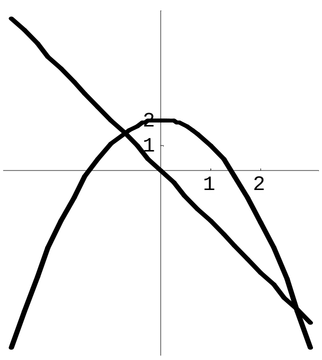
$y = \ln(\ln x)$; $y = x^2 .e^{-x} .\ln x$; $y = \dfrac{x.e^x}{1 - 2x}$; $y = \ln \dfrac{x + 1}{x}$

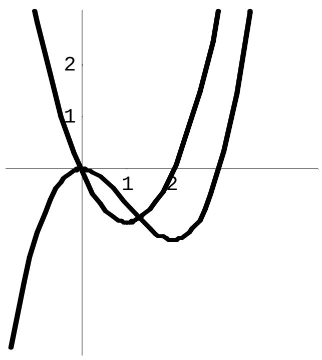
2. Izan bedi $f(x) = 4x^2 - 5x$. Kalkulatu $f'(1)$, $f''(1)$ eta $f'''(1)$

3. Aurki itzazu *a* eta *b*-ren balioak, baldin $f(x) = x^2+ax+b$ funtzioan $f(0) = 1$ eta $f'(0) = 1$ badira

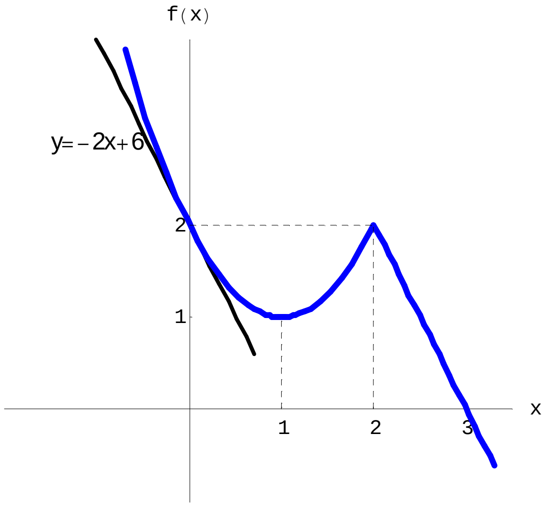
4. Grafiko hauetan, zienek adierazten du *f* funtzioa eta zeinek *f'* funtzio deribatua?







5. Ze balio hartzen du funtzio honen deribatuak x = 0, x = 1 eta x = 2 puntuetan? Arrazona ezazu.



6. Ze puntutan hartzen du zero balioa $y = x^2 - 3x + 1$ funtzioaren deribatuak?. Nolakoa izango da puntu horretan zuzen ukitzailearen malda?. Zein da zuzen horren ekuazioa?

7. Kalkula itzazu funtzio hauek emandako puntuetan dituzten zuzenukitzaileen ekuazioak:

a) $f(x) = 3 - 2x^2$, x = -1 abzisako puntuan.

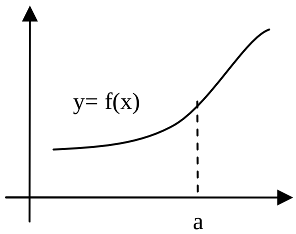
b) $g(x) = \dfrac{4}{x^2}$, x = 2 abzisako puntuan.

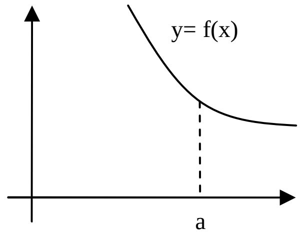
8. Bilatu $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funtzioaren grafikoaren zein puntutan den zuzen ukitzailea y = 1-x zuzenaren paraleloa, eta lortu ukitzaile horren ekuazioa.

9. $f(x) = \begin{cases} ax^2 & ; \quad x \le 1 \\ 4x + b & ; \quad x > 1 \end{cases}$ funtzioa emanik, determinatu a eta *b*-ren balioak, funtzioa jarraitua eta deribagarria izan dadin.

4- DERIBATUEN ZENBAIT APLIKAZIO

Funtzio gorakorrak eta beherakorrak





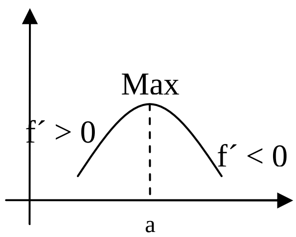
Gorakorra x = a puntuan
$f'(a) > 0$

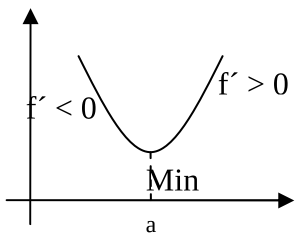
Beherakorra x = a puntuan
$f'(a) < 0$

Teoremak:

- $y = f(x)$ funtzioa **gorakorra** da $x = a$ puntuan baldin $\mathbf{f'(a)>0}$ bada
- $y = f(x)$ funtzioa **beherakorra** da $x = a$ puntuan baldin $\mathbf{f'(a)<0}$ bada

Maximo eta minimo erlatiboak (muturrak)





Maximoa bada “a”ren ezker aldean gorakorra da ($f'>0$) eta eskuin aldean beherakorra ($f'<0$). Beraz, deribagarria denez “a” puntuan, ezker eta eskuin deribatuak berdinak izan behar dira; hau da, $f'(a)=0$

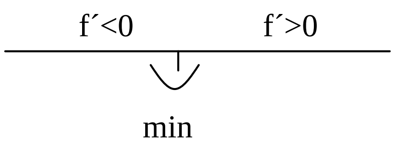
Minimoaren kasuan, “*a*”ren ezker aldean $f'<0$ da eta eskuinean $f'>0$. Beraz, $x=a$ puntuan $f'(a)=0$ izan behar du.

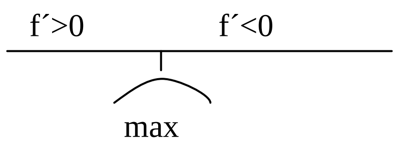
<u>Beharrezko baldintza</u>**.** $x = a$ puntuan, maximo eta minimo erlatiborik badu, derrigorrean $\mathbf{f'(a) = 0}$ izan behar du,

Baldintza hori **ez da nahikoa**. Gerta daiteke $f'(a)=0$ izatea eta $x=a$ puntuan ez edukitzea ez maximo ez minimorik. Adibidez, $y = x^3$ funtzioak $x=0$ puntuan

<u>Nahikotasun baldintzak</u>. *$f'(a)=0$ izanik*, nola ziurtatu $x=a$ puntuan maximo edo minimo erlatiborik duen ala ez?. Bi eratan egin daiteke:

I) $f'(a)=0$ noski. Gainera, “a”ren alboetan deribatua zeinuz aldatzen bada, maximoa edo minimoa izango du;





Alboetako deribatuen zeinuak berdinak badira, ez du maximo ez minimorik

II) $f'(a) = 0$ izanik, baldin:
- $f''(a)>0$ bada, minimo erlatiboa du x=a puntuan
- $f''(a)<0$ bada, maximo erlatiboa du x=a puntuan

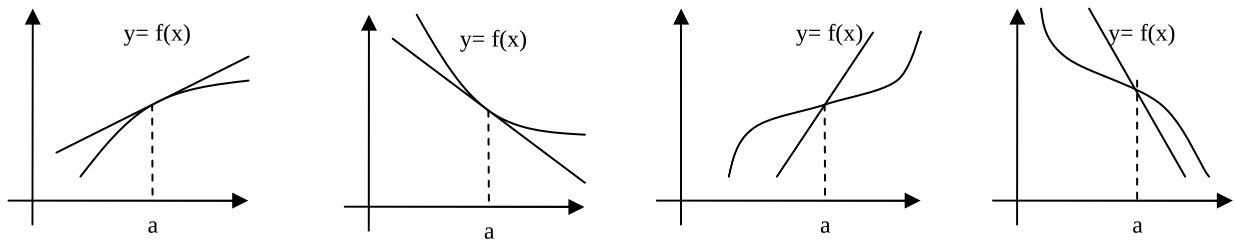
Eta zer gertatzen da $f'(a)=0$ eta $f''(a)=0$ badira? Jarraitu ondoko teorema:
Izan bedi $f'(a) = f''(a) = f'''(a) = ... = f^{n-1}(a) = 0$ eta $f^n(a) \neq 0$. Zera betetzen da:

- *n* bikoitia bada, maximoa edo minimoa du: $f^n(a)>0$ bada, minimoa
  : $f^n(a)<0$ bada, maximoa
- *n* bakoitia bada, ez du maximo ez minimorik. Inflesioa du x=a puntuan

<u>Ariketa</u>. Azter itzazu funtzio hauen monotonia (gorapena eta beherapena) eta mutur erlatiboak (maximo-minimoak).

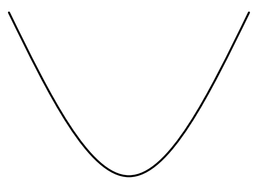
a) $y = x^2 - 2x + 1$; b) $y = x^3 - x$
c) $y = x^3 - 4x^2 + 4x$; d) $y = x^5$

Ahur eta ganbiltasuna. Inflesio puntuak

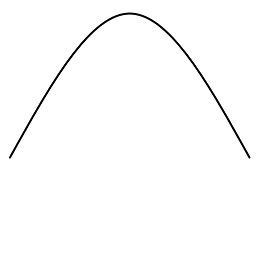


Ganbila   Ahurra   Inflesio puntua   Inflesio puntua

- *x = a* **puntuan ahurra** edo **konkaboa** dela diogu, baldin "*a*"-ren ingurunean f(x) funtzioaren balioa zuzen ukitzailearena baino handiagoa denean; hots, kurba zuzenaren goitik doanean
- **Ganbila** edo **konbexua** da baldin *f(x)*-aren balioa zuzen ukitzailearena baino txikiagoa denean; hots, kurba zuzenaren azpitik doanean
- Alde batean handiagoa eta bestean txikiagoa (edo alderantziz) denean, inflesio-puntua du *x=a* denean



I) Kurba zati hori **konkaboa**(**ahurra**) da goitik ikusita.
Zuzen ukitzaileen maldak A, B, C...F puntuetan gero eta handiagoak dira (A-n negatiboa, B-n ez da hain negatiboa, D-n positiboa da...). Beraz, *f´(x)* funtzioa gorakorra da.
f' gorakorra bada, *f'*-ren deribatua (*f''*) positiboa da.
Beraz, **f(x) konkaboa $\Rightarrow$ f' gorakorra $\Rightarrow$ $f''(a)>0$**



II) Kurba zati hori **konkexua (ganbila)** da.
Zuzen ukitzaileen maldak gero eta txikiagoak dira. Beraz, deribatu funtzioa, *f´(x)*, funtzio beherakorra da.
f(x) konkexua $\Rightarrow$ f' beherakorra $\Rightarrow$ $f''(a)<0$

<u>Beharrezko baldintza</u>**: x = a puntua inflesioa baldin badu, derrigorrean $f''(a)=0$ izan behar du**. Baldintza hori <u>ez da nahikoa</u>. Lehen gertatutako arazo bera daukagu.

Inflesio puntuaren nahikotasun baldintzak. $f''(a)=0$ izanik, nola ziurtatu $x=a$ puntuan inflesiorik duen ala ez?. Bi eratara egin daiteke:

I) $f''(a)=0$ noski. Gainera, "*a*"ren alboetan deribatua zeinuz aldatzen bada, badu maximoa edo minimoa;

$f''<0$		$f''>0$		$f''>0$		$f''<0$
	"*a*"				"*a*"	
	Inf-puntua				*Inf-puntua*	

Alboetako bigarren deribatuen zeinuak berdinak badira ez du inflesio-punturik

II) $f''(a) = 0$ izanik, baldin $f'''(a) \neq 0$ bada, inflesioa du $x=a$ puntuan
Eta zer gertatzen da $f''(a)=0$ eta $f'''(a)=0$ badira? Jarraitu ondoko teorema:
Izan bedi $f''(a) = f'''(a) = ... = f^{n-1}(a) = 0$ eta $f^{n}(a) \neq 0$. Zera betetzen da:
- *n* bakoitia bada, inflesio-puntua du $x=a$ denean
- *n* bikoitia bada, ez du inflesio-punturik.

Ariketak

1.- Aurkitu $y = x^3 - x^2$ funtzioaren ahur eta ganbil tarteak eta inflesio-puntuak. Aurki itzazu ere gorapen eta beherapen tarteak eta mutur erlatiboak. Ondoren egizu adierazpen grafikoa

2.- Aztertu funtzio hauen gorapena eta beherapena, mutur erlatiboak, ahur eta ganbiltasuna eta inflesio-puntuak. Egizu adierazpen grafikoak

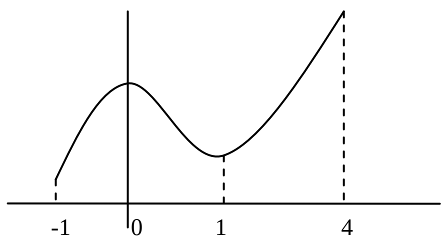
a) $y = x^3-3x^2-9x+5$; b) $y = \dfrac{2-x}{x+1}$; c) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

3.- Aurki itzazu *a* eta *b*, $y = ax^3 - 3x^2 + b$ funtzioak inflesio-puntu bat izan dezan (-1,-3)an

4.- $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ kurbak abzisa ardatza ebakitzen du $x = -1$ puntuan eta inflesio-puntua du *(2,1)*ean. Kalkulatu *a, b, c* eta idatzi funtzioa.

Oharrak

- Funtzio batek, infinitu maximo edo minimo erlatibo eduki ditzake; adibidez, y= sinx.
- Mutur erlatiboa edo lokala deitzen diogu, alboetako puntuetan baino balio handiagoa (max) edo txikiagoa (min) hartzen duelako.
- Definizio-eremuan edo tarte baten hartzen duen balio handienari "maximo absolutua" deitzen diogu eta txikienari "minimo absolutua"



Maximo absolutua: x = 4 puntuan
Minimo absolutua: x = -1 puntuan

Maximo erlatiboa: x = 0 puntuan
Minimo erlatiboa: x = 1 puntuan

Optimizazio problemak

Zientzia, ekonomia, politika eta abarreko arlo askotan, eta hainbat matematika problematan, funtzioak optimizatzea, hau da, haien maximo eta minimoak aurkitzea, interesatzen zaigu. Hori gertatzen da, adibidez, baldintza jakin batzuen pean lantegi baten produkzio kostua minimizatu nahi badugu, edo lursail batean barazkien produkzioa maximizatu nahi badugu.

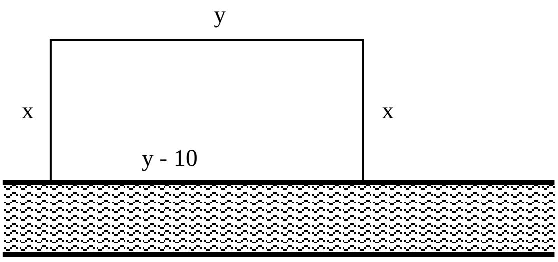
Horrelako problemak ebazteko, honakoak egin beharko ditugu:

- Optimizatu beharreko funtzioa atera.
- Funtzio horrek bi aldagai edo gehiago badauzka, ekuazio lagungarriak aurkitu, aldagai bakar baten bidez adierazi ahal izan dezagun.
- Funtzioaren maximo edo minimo erlatiboak aurkitu.
- Emaitzak interpretatu, nolako problema den kontuan izanik zentzurik ez dutenak baztertuz.

Adibidea:

Lursail handi bat daukagu errepide baten ondoan, eta haren azalerako 10.000 metro karratuko zati errektangeluar bati hesia jarri nahi diogu kanping bat egiteko. Hesiak kanping osoa inguratuko luke errepide ondoko 10 metro izan ezik, bertan sarrera jarriko dugu eta.

Hesi kantitate txikiena erabilita kanpinga nola jarri behar dugun aurkitu nahi badugu, optimizazio problema baten aurrean gaude.



Alboko irudiari begiratuta, honako funtzioa optimizatu behar dugula ikusiko dugu:

f(x, y) = 2x + 2y - 10

Bi aldagaiko funtzioa denez, ekuazio lagungarri bat aurkitu beharko dugu. Kasu honetan, badakigu kanpingaren azalera 10.000 m^2-koa dela; beraz:

$$x \cdot y = 10.000 \Leftrightarrow y = \frac{10.000}{x}$$

y ordezkatuz *f(x, y)*-n, hona zer dugun: $f(x) = 2x + \frac{20.000}{x} - 10$

Aurki ditzagun funtzio horren minimo erlatiboak:

$f'(x) = 2 - \frac{20.000}{x^2} = \frac{2x^2 - 20.000}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 100$ edo $x = -100$

$$f''(x) = \frac{40.000}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(100) = 0{,}04 > 0 \Rightarrow x = 100 & \text{minimo erlatibo bat da} \\ f''(-100) = -0{,}04 < 0 \Rightarrow x = -100 & \text{maximo erlatibo bat da} \end{cases}$$

Hesiaren luzera minimizatu nahi dugunez, funtzioaren balioa minimoa baino ez dugu izango kontutan: x = 100. balio hori funtzioan ordezkatuz, y = 100 aterako zaigu; beraz, hona planteaturiko problemaren ebazpena: 100 metroko aldeko eremu karratu bat egingo dugu eta 390 metro hesi erabiliko.

Ariketak 1

1- Deskonposa ezazu bi batugaitan 28 zenbakia, haien biderkadura maximoa izan dadin.

2- Bi zenbakiren arteko batura 5 da. Baten karratuaren eta beste karratuaren laukoitzaren batura minimoa dela jakinik, aurki itzazu bi zenbakiok

3- Orrialde batek 18 zm^2 testu eduki behar du. Goiko eta beheko marjinek bina zentimetro izan behar dituzte, et alboetakoek bana. Aurki itzazu orriaren neurriak, paperaren kostua minimoa izan dadin.

4- 12 zm-ko perimetroa duen laukizuzen guztien artean, zeinek du diagonalik txikiena?

ARIKETAK 2

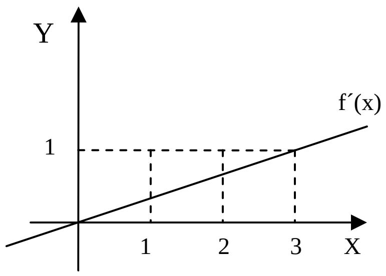
1.- Demagun $y = x^4-2x^2$ funtzioa. Aztertu gorakor eta beherakortasuna, mutur erlatiboak, ahur eta ganbiltasuna eta inflesio-puntuak. Egizu adierazpen grafikoak

2.- Aurkitu $y = x+\sqrt{4-x}$ funtzioaren definizio eremua eta mutur erlatiboak

3.- Aurki ezazu a-ren balioa $y = x^2 -3x + a$ funtzioak bere minimo puntuan 3/2 balio dezan

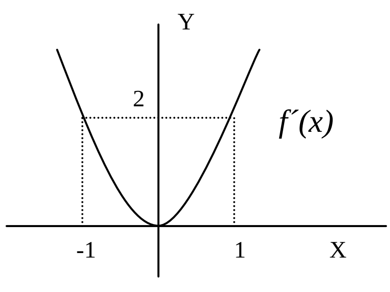
4.- Kalkula itzazu a, b eta c-ren balioak jakinik $y = ax^3 - bx^2 + c$ funtzioak minimo bat duela (0,-1) puntuan eta inflesio-puntu bat $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ -an.

5.- Ondoko grafikoa $f(x)$ funtzioaren deribatuarena da.



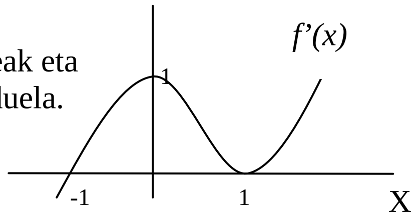
a) Aurkitu f funtzioaren gorapen eta beherapen tarteak.
b) Determina itzazu mutur erlatiboak
c) Esan zeintzuk diren tarte ahur eta ganbilak
d) Kalkulatu inflesio-puntuak

6.- Ondoko grafikoa f funtzioaren deribatuarena da. Hortik abiatuta, aurki itzazu:



a) f funtzioaren gorapen eta beherapen tarteak.
b) f-ren mutur erlatiboak
c) Tarte ahur eta ganbilak
d) Inflesio-puntuak

6.- Esan zeintzuk diren *f* funtzioaren gorapen etabeherapen tarteak eta mutur erlatiboak, jakinik haren deribatuak honako grafikoa hau duela.
Zer gertatzen zaio *f*-ri x = -1, x = 0 eta x = 1 puntuetan?



7. Aurki itzazu a eta b. $y = \frac{1}{ax+b}$ funtzioak asintota bertikal bat eduki dezan x = - 2 puntuan eta (0 , ¼) puntutik pasa dadin.

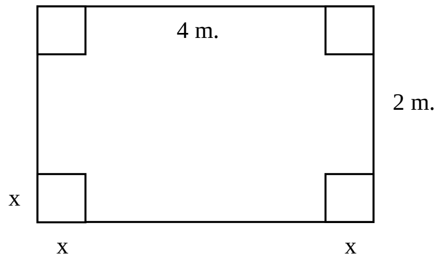
8.- Zer zenbaki positiboak egiaztatzen du berorren alderaztzizkoa batuz gero, ateratzen den batura minimoa izatea?

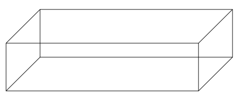
9.- 6m^2-ko azalerako leiho errektangeluar baten markoa egin nahi dugu. Atal horizontalaren metro lineal bakoitza 12 eurotan ateratzen da, eta atal bertikalarena 18 eurotan.

a) Kalkula itzazu leihoaren neurriak markoaren kostua minimoa izan dadin
b) Zein da markoaren kostua?

10.- 100 m^2-ko azalera duten laukizuzen guztien artean, aurki ezazu perimetrorik txikiena duena.

11. - 2m. eta 4m.-ko aldeak dituen lamina bati, lau ertzetan karratu bana ebakitzen diogu.





Lor daitekeen bolumen maximoko kutxa irekiaren dimentsioak kalkulatu; hau da, zenbatekoa izan behar du ebakitzen dugun karratuaren aldea, kutxaren bolumena maximoa izan dadin?

12. - Eta aurreko lamina karratua balitz, bere aldea 10 zm-koa izanda?

FUNTZIOEN ADIERAZPEN GRAFIKOAK

Funtzioak, zailtasunak dituenean edo azterketa sakon behar duenean, komeni da aurreko gaietan ikusi ditugun baliabide guztiak erabiltzea. Horretarako, informazio eta teknika ugari ditugu eskura.

- **Existentzia eremua**

Zein “*x*”-rentzat dago definituta *f(x)* funtzioa? Hori da lehehengo aztertu behar dena. Gogora dezagun:

- ♦ Funtzio polinomikoak, e^{3-x}, 5^{2x}, $\sqrt[n]{x}$ (*n*, bakoitia),....*I*. = $\Re$
- ♦ $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ zatikietan , *I* = $\Re$ - {*x / g(x) = 0*}. Adib.

$$y = \frac{x}{x^2-4}; \quad I = \Re \text{ - } \{\pm 2\}$$

$$y = \frac{x}{x^2+4}; \quad x^2 + 4 \neq 0 \rightarrow I = \Re$$

- ♦ $y = \sqrt{f(x)}$ $\quad I = \{x \,/\, f(x) \geq 0\}$ Adib.

$$y = \sqrt{4-x} \qquad I = \{x \leq 4\}$$

$$y = \sqrt{x^2-2x-3} \qquad I = (-\infty,-1] \cup [3,\infty)$$

$$y = \sqrt{3+2x-x^2} \qquad I = [1,3]$$

$$y = \sqrt{x^2+4} \qquad I = \Re$$

- ♦ Ez dago “0” eta zenbaki negatiboen logaritmorik. Beraz,

$$y = \ln(x-2) \qquad I = (2,\infty)$$

<u>Ariketa.</u> Kalkulatu hurrengo funtzioen izate-eremuak:

$$y = \frac{2x}{\sqrt{9-x^2}} \qquad\qquad y = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & x \geq 0 \\ \ln(x+5) & x < 0 \end{cases}$$

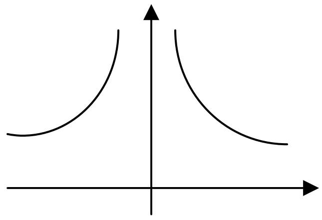
- **Koordenatuekin ebaki-puntuak**

OX ardatzarekin. Egin y = 0 eta ebatzi ekuazioa.

OY ardatzarekin. Egin x = 0 eta ebatzi ekuazioa.

- **Simetriak**

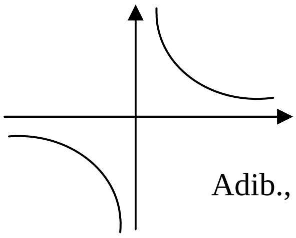
a) OY ardatzarekiko



f(-x) = f(x)

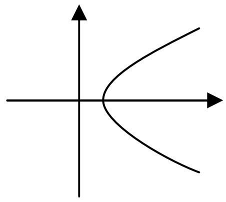
Adib., $y = x^4$; y = cos x; $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

b) *O* jatorri-puntuarekiko **f(-x) = -f(x)**



Adib., $y = \frac{1}{x}$; y = sinx, $y = x^3$

a) *OX* ardatzarekiko: **y =** $\pm f(x)$ denean. Adib., $y = \pm\sqrt{x-1}$



- **Periodikotasuna**
  Funtzioa periodikoa bada, nahikoa dugu periodo batean aztertzea)
- **Asintotak**
- **Deribatuak**
  - Gorapena eta beherapena
  - Mutur erlatiboak
  - Ahur eta ganbiltasuna. Inflesio-puntuak
- ...

Oharra. Sarritan, ez da behar horrelako azterketa sakon bat egitea grafikoa irudikatu ahal izateko. Gehienetan, begirada batekin kurbaren itxura jakin ahal da eta elementu gutxikin grafikoa egin.

Adibideak

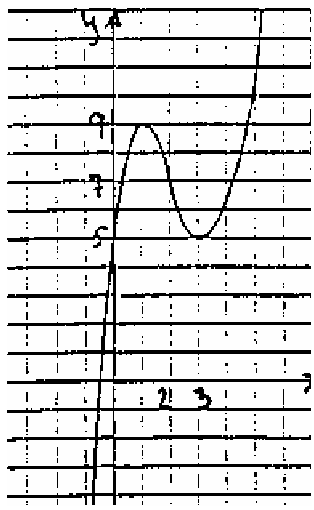
1.- Adierazi grafikoki $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ funtzioa

Funtzio polinomikoa da; beraz, esistentzia- eremua *R* da, eta deribagarria (eta jarraia) da *R* osoan.

Ez du asintotarik

Koordenatuekin ebaki puntuak:

y = 0 eginda *x = 5* ateratzen da; beraz, (0, 5) puntuan mozten du OY ardatza.



Mutur erlatiboak:

f '(x) = $3x^2 - 12x + 9 = 0$ $\Leftrightarrow$ x = 1 eta x = 3

f' >0 1 *f' <0*   *f' <0* 3 *f' <0*

f(1) = 9 eta f(3) = 5 minimoa (1 , 9) eta maximoa (3 , 5)

Inflesio puntuak

f ''(x) = 6x – 12 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 2

f'' <0 2 *f'' >0*

f(2) = 7 $\rightarrow$ I = (2 , 7)

2- Irudikatu $y = \dfrac{2x+1}{x}$ funtzioa.

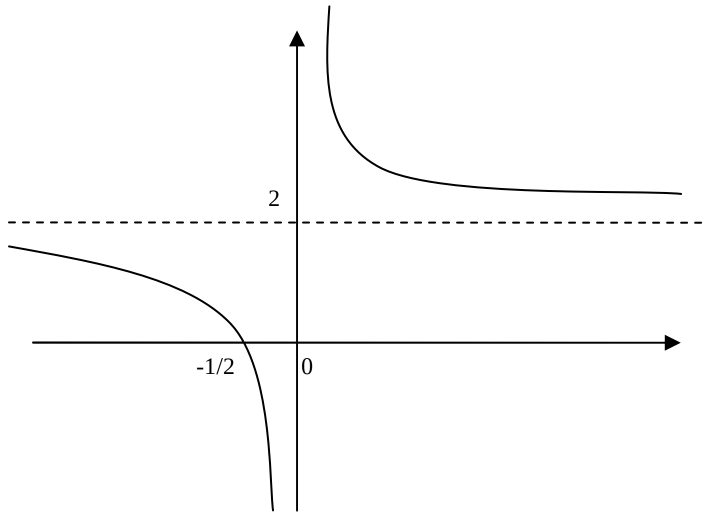
- I.E. = $\Re - \{0\}$
- Etena x = 0 puntuan: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty \end{cases}$
- Ardatzekin ebaki-puntuak: $\begin{cases} x = 0; & \textit{ezinezkoa} \\ y = 0; \quad x = -1/2, & P(\dfrac{-1}{2}, 0) \end{cases}$
- Ez du simetriarik
- Asintotak. Bertikala: x = 0 zuzena

  Horizontala: y = 2 zuzena
- Maximo-minimoak: $y' = \dfrac{-1}{x^2} \neq 0 \Rightarrow$ Ez du max-min.

  Beherakorra "I.e." guztian.
- Inflexio-puntuak: $y'' = \dfrac{2}{x^3} \neq 0 \Rightarrow$ Ez du inflexio-punturik

  x > 0 denean, $y'' > 0$, f(x) ahurra

  x < 0 denean, $y'' < 0$, f(x) ganbila
- Balio-taula



JARRAITUTASUNA, DERIBATUEN APLIKAZIOAK, GRAFIKOAK,... (ariketak)

1.- Aztertu $y=|x+1|$ funtzioaren jarraitasuna eta deribagarritasuna. Adierazi grafikoki

2.- Kalkulatu "a" eta "b" ondoko funtzioa jarraia eta deribagarria izan dadin

$$f(x)=\begin{cases} x^3-x \ ; \ x\leq 0 \ \textit{denean} \\ ax+b \ ; \ x>0 \ \textit{denean} \end{cases}$$

3.- Kalkulatu "a" eta "b" , f(x) funtzioa jarraia izan dadin

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a \ \ \textit{baldin} \ \ x<-1 \\ ax+b \ \ \textit{baldin} \ \ -1\leq x<0 \\ 3x^2+2 \ \ \textit{baldin} \ \ x\geq 0 \ \textit{bada} \end{cases}$$

Aurkitutako "a" eta "b" balioekin, aztertu f(x)-aren deribagarritasuna

4.- Aurkitu $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ kurbaren zuzen ukitzailearen ekuazioa $x=1$ puntuan

5.- Demagun $y = x^3\text{-}3x$ kurba. Aurki ezazu zein (edo zeintzu) puntuetan, kurbarekiko zuzen tangentea $y = x$ zuzenarekiko paraleloa den

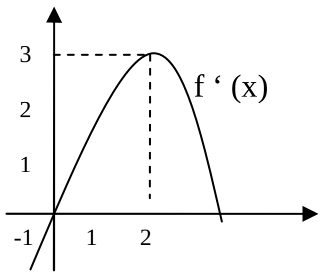
6.- Aurki ezazu $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ kurbaren zuzen ukitzailearen ekuazioa bere inflesio puntuan

7.- $f(x)=ax+b+\dfrac{8}{x}$ funzioa emanik, kalkulatu "a" eta "b"-ren balioak, funtzioa *(-2,-6)* puntutik igaro eta puntu horretan tangente horizontala eduki dezan

8.- Aurkitu $y=x^4-8x^2$ funtzioaren maximo, minimo erlatiboak eta inflesio-puntuak

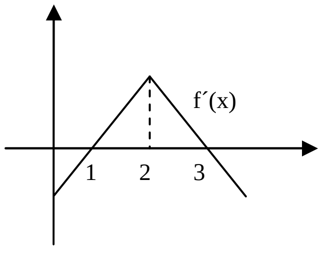
9.- Berdin $y = x^3 + 3x^2$ funtzioarenak

10.- Ondoko grafikoa, f(x) funtzioaren deribatuarena da; hau da, f´(x)-arena



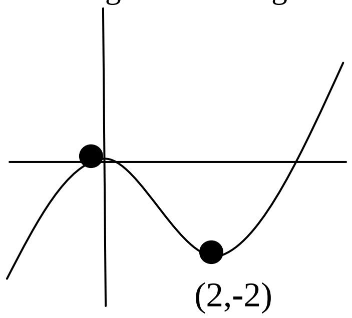
Aurki itzazu:
a) *f*-ren gorapen eta beherapen tarteak
b) *f*-ren mutur erlatiboak
c) Tarte ahur eta ganbilak
d) Inflesio-puntuak

11.- Grafiko hau *f* funtzioaren deribatuarena da.



Aurki itzazu:
a) *f*-ren gorapen eta beherapen tarteak
b) *f*-ren mutur erlatiboak
c) Ahur eta ganbil tarteak
d) Inflesio-puntuak

12.- Ondoko grafikoa hirugarren mailako funtzio polinomiko bati dagokio



Aurki ezazu funtzioaren espresio analitikoa

13.- $f(x) = 1 - (2 - x)^5$ funtzioa emanik, egiaztatu $f'(2)=0$, $f''(2)=0$ eta $f'''(2)=0$ direla. $f(x)$ funtzioak ba al du maximo, minimo edo inflesio-punturik $x = 2$ puntuan?

14.- Funtzio baten bigarren deribatua 4 da, eta funtzioaren grafikoak (1 , -1) puntuan maximo erlatiboa da. Aurkitu funtzioa.

15.- Aurkitu $y = x.\ e^x$ funtzioaren maximo minimoak, inflexio-puntuak eta gorapen beherapen tarteak

16.- $y = ax^3 + bx$ funtzioari buruz, badakigu *(1,1)* puntutik igarotzen dela eta $3x+y=0$ zuzenaren paraleloa den tangente bat duela puntu horretan.

a) Aurkitu “a” eta “b”
b) Aurkitu mutur erlatiboak eta ahur eta ganbil tarteak

17.- Bigarren mailako funtzio polinomiko batean $y''= 4$ da, bere grafikoa *(1,0)* puntutik pasatzen da eta puntu horretan zuzen ukitzailea $y = 3x + 1$ zuzenaren paraleloa da. Kalkulatu $y = f(x)$ kurbaren ekuazioa

18.- Egizu funtzio hauen adierazpen grafikoa. Aztertu ardatzekin ebaki-puntuak , gorapen eta beherapena, mutur erlatiboak, ahur eta ganbiltasuna, asintotak, ea.

$y = 1 + 8x - 2x^2$; $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 3$; $y = \dfrac{2x+1}{x}$; $y = x^2(x-3)$

19.- Laukizuzen forma duen zelai baten azalera 10.000 m^2 da. Alde batean ibaia pasatzen da eta hesirik ez du behar. Kalkulatu zelaiaren dimentsioak, beste hiru aldeak inguratzeko behar den hesiaren kostea minimoa izan dadin

20.- Eraikin baten jabeak 40 etxebizitza ditu alokatzeko , bakoitza 180 eurotan hilean. Alokairuaren prezioa 6 euro igotzen duen bakoitzean, maizter bat galtzen du. Zein da etekin gehien emango dion alokairu-prezioa?

21.- Bana ezazu *5* zmko luzera duen segmentu bat bi zatitan ondokoa bete behar delarik: zati baten karratuaren eta beste zatiaren karratuaren laukoitzaren batura minimoa izan behar du.

INTEGRALAK

1- JATORRIZKO FUNTZIOAK. INTEGRAL MUGATUGABEA

f(x) funtzio baten jatorrizko funtzioa *F(x)* izango da, zera betetzen bada: *F`(x) = f(x)* .

Adibidea:

$F(x) = 3x^2$ funtzioaren jatorrizkoa funtzioa $F(x) = x^3$ da, zeren eta $(x^3)' = 3x^2$. Eta ez bakarrik x^3 , baizik eta $x^3 + 2$, $x^3 - \sqrt{2}$, ..., x^3 + ktea ere bai.

Funtzio guzti hauen deribatua $3x^2$ da.

Jatorrizkoa funtzioen multzo osoa $\int f(x)dx$ -en bidez adierazten da, eta integral mugatugabea esaten zaio.

Beraz $\int 3x^2 dx = x^3 + k$, $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k$ ......

Diferentziala eta integrala alderantzizkoak dira: $d\int f(x)dx = f(x) + k$

Propietateak

1.- Funtzioen arteko baturaren integrala, integralen batura da:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

2.- Konstante eta funtzio baten arteko biderkaduraren integrala, konstantea bider funtzioaren integrala da.

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Propietate hauek, deribatuetan ikusi genituen antzeko propietateen ondorioak dira.

BEREHALAKO INTEGRALAK

Funtzioen deribatuak eta integralaren kontzeptua kontutan harturik , F(x) $\underset{\xleftarrow[\text{Integrala}]{}}{\xrightarrow{\text{Deribatua}}}$ f(x),

ondorengo taula lortzen da:

$\int dx = x + k$	
$\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\int u^n \cdot u`\cdot dx = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + k$
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + k$	$\int \dfrac{u`}{u} dx = \ln\|u\| + k$
$\int a^x \cdot dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + k$	$\int a^u \cdot u`\cdot dx = \dfrac{a^u}{\ln a} + k$
$\int e^x \cdot dx = e^x + k$	$\int e^u \cdot u`\cdot dx = e^u + k$
$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + k$	$\int u`\sin u \cdot dx = -\cos u + k$
$\int \cos x \cdot dx = \sin x + k$	$\int u`\cos u \cdot dx = \sin u + k$
...	...

1. Kalkula itzazu ondoko integral mugatugabeak:

a) $\int \sqrt[5]{x^3}\, dx$ b) $\int (2x^3 - x + 1)\cdot dx$ c) $\int \dfrac{x^5}{2} dx$ d) $\int \dfrac{2}{x^5} dx$

e) $\int (4 - 2^x + \dfrac{5}{x^2}) \cdot dx$ f) $\int (x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x + 4)\cdot dx$ g) $\int \dfrac{2x}{x^2+5} dx$

h) $\int 2\, e^{2x} \cdot dx$ i) $\int 5(5x-1)^6 \cdot dx$ j) $\int 2x\sqrt{5+x^2} \cdot dx$

k) $\int \dfrac{x^2+1}{x} dx$ l) $\int \dfrac{3x^3 - 6x^2 + x - 7}{x} dx$ m) $\int \left(\sqrt{x} - 2\right)^2 \cdot dx$

n) $\int \dfrac{x^3 - 1 + x^2}{x} dx$ o) $\int 3 \sin(3x-1)\cdot dx$ p) $\int \dfrac{1}{2} \cos\dfrac{x}{2} \cdot dx$)

2. Demagun *y = 1+2x* funtzioa. Zein da *x = 1* puntuan *7* balioa hartzen duen jatorrizko funtzioa?
3. Aurki ezazu *x = 1*-entzat *–6* balioa hartzen duen $f(x) = 9x^2$ funtzioaren jatorrizko funtzioa.
4. Aurki ezazu *f(x)* funtzioa, jakinik *f `(x) = 2x – 1* eta *f(5) = 6* direla.
5. Aurkitu *G* funtzioa, jakinik *G’’(x) = 2x*, *G’(0) = 2* eta *G(0) = 1* direla.
6. $f(x) = x^2 + 2x$ funtzioaren jatorrizko guztien multzotik, kalkula ezazu *x = 1*-entzat anulatzen dena.
7. Zenbat funtzioren deribatua da $f(x) = 3x^2-1$ funtzioa? Aurrekoen artean aurkitu bat non bere grafikoa *(2, 1)* puntutik pasatzen den.

INTEGRAL MUGATUA

Izan bitez [a, b] tartean jarraitua den *f(x)* funtzioa eta *G(x)* bere jatorrizko funtzio bat (edozein jatorrizko).

Zera betetzen da: $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ Barrow-ren erregela

Adibidea Kalkulatu $\int_1^2 (x^2+1)dx$

$$\int_1^2 (x^2+1)dx = \left.\frac{x^3}{3} + x\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3}+2\right) - \left(\frac{1^3}{3}+1\right) = \frac{10}{3}$$

Propietateak

1.- $\int_a^b f(x)dx = 0$

2.- [a, b] tartean jarraitua eta f(x) >0 bada $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ >0 da.

[a, b] tartean jarraitua eta f(x) <0 bada $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ <0 da.

Ariketak

1.- Kalkulatu:

a) $\int_1^2 (x-4)\,dx$ b) $\int_{-1}^1 (2x^3 - x^2 + 3x - 1)\,dx$ c) $\int_0^1 e^x\,dx$

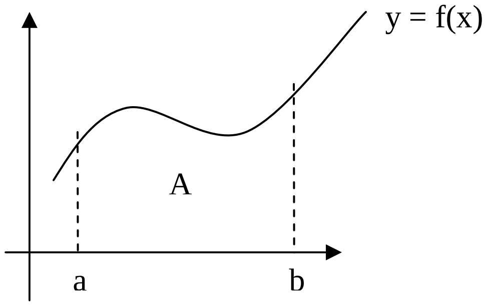
2.- Aurkitu a-ren balioa $\int_0^2 (ax^2 - 1)\,dx$ integralaren balioa $\frac{10}{3}$ izan dadin

3.- Aurkitu lehen mailako funtzio polinomikoa, *f(x)*, ondokoa betetzen duela jakinik:

f(1) = 0 eta $\int_0^1 f(x)\,dx = -\frac{1}{2}$

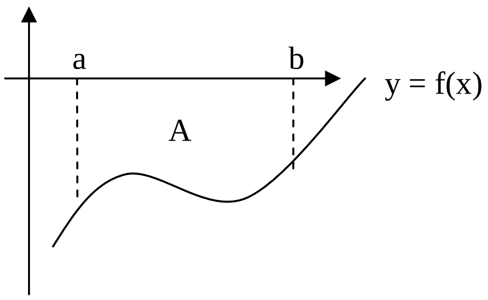
AZALERAK

I-



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

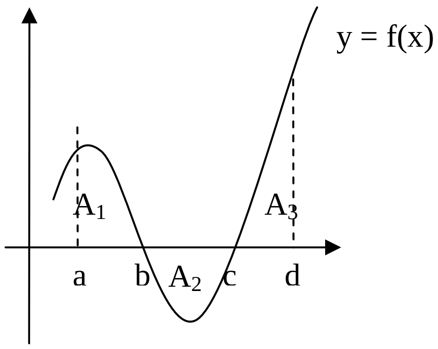
II-



f(x) < 0 denean

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

III-

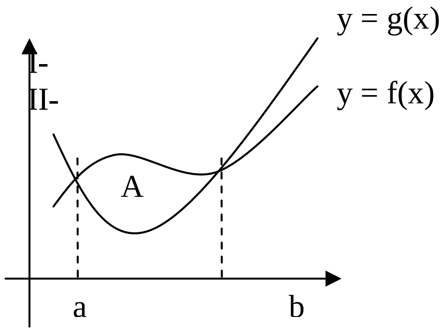


$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$$

<u>Ariketa</u>
Kalkulatu $y = x^3 - 16x$ kurbak eta *OX* ardatzak mugatzen duten barruti itxiaren azalera.
Egizu grafikoa

IV-



F(x) eta g(x) kurbek osatzen duten azalera.
Ebaki puntuak , x = a eta x = b

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

<u>Ariketa</u>
Kalkulatu y = x^2-2x+1 eta y = -x^2+4x+1 kurbek mugatzen duten azalera

AZALERAK

1.- Kalkula ezazu $x = 0$ eta $x = 4$ zuzenek, abzisa-ardatzak eta $y = -x + 8$ zuzenak mugatzen duten barrutiaren azalera

2.- Kalkulatu ondorengo funtzioek *X* ardatzarekin mugatzen duten azalera:

a) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$; b) $f(x) = x^3 - x$

3.- Kalkula ezazu $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ kurbak, koordenatu ardatzek eta $x = 2$ zuzenak mugatzen duten barrutiaren azalera

4.- Kalkulatu ondorengo kurben arteko azalera:

a) $f(x) = x^2$ eta $g(x) = x + 2$
b) $f(x) = x^2 - 6$ eta $g(x) = -x$
c) $f(x) = 4x$, $g(x) = \frac{x}{4}$ eta $h(x) = \frac{1}{x}$
d) $y = (x - 3)^2$ eta $y = 4$
e) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2$ eta $h(x) = 1 - x^2$
f) $y = x^4$ eta $y = 8x$
g) $y = x^2 + 2x - 3$ kurbak , OX ardatzak eta $x = -4$ eta $x = 2$ zuzenek
h) $x + 4y - 12 = 0$ zuzenak, $y = \sqrt{x}$ parabolak eta OX ardatzak

6.- Aurki ezazu $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & ; \quad x < 0 \\ x^2 - 2 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$ funtzioak, $x=-2$ eta $x=3$ zuzenek eta abzisa-ardatzak mugatzen duten eskualdearen azalera

7.- Aurki ezazu $y = x^2+7$ parabolak eta $y = 2x+10$ zuzenak barne hartzen duten planoko eskualdearen azalera.

8.- Kalkula ezazu $f(x) = x^2+1$ eta $g(x) = x+3$ grafikoek eta $x = -1$ eta $x = 4$ zuzenek mugatzen duten azalera.

9.- $y = 2x^2$ ekuazioko kurbak, A(0,0) , B(1,0) , C(1,1) eta D(0,1) erpinetako karratua bi eskualdetan banatzen du. Aipaturiko eskualdeak irudika itzazu eta bakoitzaren azalera kalkulatu.

10.- Bilatu “m”-ren balioa, $y = 2x^2$ eta $y = mx$ funtzioek mugatzen duten azalera 64 dela jakinik.

11.- Izan bitez A=(-1 , 0) , B=(0 , -1) eta C=(1 , 0) puntuak. Kalkulatu ABC irudiaren azalera, AB eta BC lerroak zuzenak eta AC lerroaren ekuazioa $y = -x^2 + 1$ direla jakinik

12.- Adierazi grafikoki *ABC* eskualdea eta bere azalera kalkulatu ondoko datuak erabiliz: *A=(0,0), B=(0,2), C=(1,1), AB* eta *BC* lerroak zuzenak dira eta *AC* lerroaren ekuazioa $y = 2x - x^2$ da.

13.- Kalkulatu $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; \quad -1 \le x \le 0 \\ x - 1 & ; \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$ funtzioaren grafikoak eta abzisa-ardatzak mugatutako eskualdearen azalera. Egizu grafikoa

14.- Adierazi grafikoki $y = 4 - x^2$ eta $y = (x-2)^2$ parabolek mugaturiko eskualde itxia eta kalkulatu bere azalera.

15.- Kalkula ezazu $y = x^4$ funtzioaren grafikoak, *(1,1)* puntuko kurba horren zuzen tangenteak eta *OY* ardatzak mugatzen duten eskualdearen azalera.

(Sol: $\frac{6}{5} u^2$)

16.- Izan bitez *A=(-2 , 0)* , *B=(2 , 0)* eta *C=(0 , 1)* puntuak. Kalkulatu *ABC* irudiaren azalera *AC* eta *BC* lerroak zuzenak eta AB lerroaren ekuazioa $y = x^2 - 4$ direla jakinik.

INTEGRAZIO-METODOAK

- **Aldagai-aldaketa**

Eman dezagun $\int f(u)\cdot u`dx$ eratako integrala.

Aldagaia "x" izan beharrean, ondoko aldaketa proposatzen da: u(x) = t

Deribatuz, u`(x) dx = dt.

Beraz, $\int f(u)\cdot u`dx = \int f(t)\cdot dt$

Adibideak:

1- $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$

I = $\int x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot dx$; $u^n\cdot u`$ forma dauka, u= $1+x^2$ delarik. Beraz, ondoko aldaketa dagokio: $1+x^2 = t$

Deribatuz, 2xdx = dt ;

$$x\,dx = \frac{1}{2}dt.$$

Orain, adierazi dena "t"-ren funtziopean. Hau da:

$$I = \int x\sqrt{1+x^2}\cdot dx = \int \frac{1}{2}\sqrt{t}\cdot dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\cdot dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} + k$$

2- $\int \frac{x^2}{1-2x^3}dx$

$\frac{u`}{u}$ forma dauka. Beraz, aldaketa: u = $1-2x^3$ = t

Deribatuz: $-6x^2dx = dt$ edo $x^2dx = \frac{-1}{6}dt$

Hau da: $I = \int \frac{x^2}{1-2x^3}dx = \int \frac{-1}{6}\frac{dt}{t} = \frac{-1}{6}\ln|t| + k = \frac{-1}{6}\ln\left|1-2x^3\right| + k$

Ariketak Kalkulatu:

a) $\int \sin 2x\cdot dx$ b) $\int e^{\frac{x}{3}}\cdot dx$ c) $\int x\,(5-x^2)\cdot dx$

d) $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$ e) $\int \frac{dx}{4(5-3x)}$ f) $\int (5-3x)^4\cdot dx$

- **Zatikako metodoa**

  "u" eta "v", x-en funtzioak badira, zera betetzen da: $d(u \cdot v)$ = u dv + v du

  u dv askatuz: u dv = $d(u \cdot v)$ – v du

  Atal biak integratuz: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ $\rightarrow$ "Zatikako integrazioaren formula"

  Formula honen bidez, $\int u \cdot dv$ kalkula daiteke, $\int v \cdot du$ jakinez gero.

  Metodo hau, zenbait kasutan aplika daiteke:

  ★ 1. adibidea $\int x\, e^x \cdot dx$

  Deitu: $x = u$ eta $e^x\, dx = dv$

  Kalkulatu *du* eta *v*: $du = dx$; $v = \int e^x\, dx = e^x$

  Aplikatu formula: $I = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x + k$

  ★ 2. adibidea $\int x \sin x \cdot dx$

  Deitura: $x = u$ eta $\sin x\, dx = dv$

  Kalkulatu *du* eta *v*: $du = dx$; $v = \int \sin x\; dx = -\cos x$

  Aplikatu formula: $I = -x \cos x - \int -\cos x\, dx = -x \cos x + \sin x + k$

  ★ 3. adibidea $\int x \ln x \cdot dx$

  Deitura: $\ln x = u$ eta $x\, dx = dv$

  Kalkulatu *du* eta *v*: $du = \frac{1}{x} dx$; $v = \int x\; dx = \frac{x^2}{2}$

  Formula:

  $$I = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2x} dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + k$$

  Ariketak Kalkulatu:

a) $\int x^2 \ln 3x \cdot dx$ b) $\int x \cos x \cdot dx$ c) $\int x 2^x \cdot dx$

d) $\int \ln x . dx$ e) $\int x^2 e^x \cdot dx$ (bi aldiz)

- **<u>Funtzio arrazionalak</u>** $\left(\int \frac{f(x)}{g(x)}dx\right)$

Integrala kalkulatzeko, lehenengo hurrengo pausuak jarraitu:

a) Begira ezazu f(x)-en maila, g(x)-ena baino handiago edo berdina den. Horrela bada, egin zatiketa:

Adibidez: $\int \frac{x^3}{x^2-1}dx = \int\left(x+\frac{x}{x \;\; +1}\right)dx$

b) Deskonposatu faktoretan g(x) .

g(x)-en faktoreen arabera, kasu hauek bereiztuko ditugu:

I) g(x)-en faktore guztiak lehenengo mailakoak eta ezberdinak dira:

(ax + b) faktore bakoitzari, $\frac{A}{ax+b}$ zatidura dagokio

<u>Adibidez:</u> $\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{dx}{(x+2)(x-2)}$

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

x aldagaiari izendatzailearen erroen balioak emanez A eta B kalkulatuko ditugu:

x = -2 ; 1 = A(-2-2) + B(-2+2) ; 1 = -4A ; A = $-\frac{1}{4}$

x = 2 ; 1 = A(2-2) + B(2+2) ; 1 = 4B ; B = $\frac{1}{4}$

Ondorioz, aurreko integrala horrela kalkulatuko dugu:

$$\int\frac{dx}{x^2-4} = \int\frac{dx}{(x+2)(x-2)} = \int\left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}\right)dx = -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{4}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x-2| + k$$

II) g(x)-en faktoreak, lehenengo mailakoak dira baina errepikatzen dira:

$(ax + b)^n$ faktore bakoitzari, ondoko batura dagokio:

$$\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{C}{(ax+b)^n}$$

<u>Adibidez:</u> $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

$x^3 - x^2 - x - 1 = (x+1)(x-1)^2$ Beraz:

$$\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

A, B eta C lortzeko haurreko ataleko pausuak jarraituz:

$$\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

x = -1 ; 3(-1) + 5 = A(-1-1)^2 + B(-1+1)(-1-1) + C(-1+1) ; 2 = 4A ; A = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

x = 1 ; 3(1) + 5 = A(1-1)^2 + B(1+1)(1-1) + C(1+1) ; 8 = 2C ; C = 4

B-ren balioa kalkulatzeko x aldagaiari beste edozein balio eman, adibidez x = 0

x = 0 ; 3(0) + 5 = $\frac{1}{2}$(0-1)^2 + B(0 + 1)(0 – 1) + 4(0+1) ; 5 = $\frac{1}{2}$ - B + 4 ; B = - $\frac{1}{2}$

Datu hauek erabiliz, integrala kalkulatuko dugu:

$$\int \frac{3x+5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + 4\frac{-1}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + k$$

<u>Ariketak 5</u>

Kalkulatu hurrengo integralak:

a) $\int \frac{3x}{x(x-1)} dx$ b) $\int \frac{2x+1}{x^3 - x^2} dx$ c) $\int \frac{x}{(1-x)^2} dx$ d) $\int \frac{5x^3+2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx$