GIZA ETA GIZARTE ZIENTZIAK

MATEMATIKA II

2. EBALUAZIOA

Matrizeak

Determinanteak

Ekuazio-sistemak

Programazio lineala

Ignazio Zuloaga BHI. (Eibar)

MATRIZEAK

Sarrera

Adibidea

Enpresa batek hiru biltegi ditu (B1, B2 eta B3) eta bost artikulu mota (A1, A2, A3, A4 eta A5).

Ondoko matrizearen bidez, biltegi bakoitzeko produktu kantitatea (milaka unitateetan) adierazten da:

	A1	A2	A3	A4	A5
B1	3	4	1	3	4
B2	3	2	5	3	2
B3	7	4	3	2	3

- Matrize horrek 3 lerro eta 5 zutabe ditu; beraz, *3x5* ordenakoa da
- Bere barruko elementuak a_{21}, a_{13},... adierazten dira. Esaterako, a_{31} elementua, 3. lerro eta 1. zutabekoa da, balioa 7 delarik
- Lerroz eta zutabeka adierazitako zerbait, errazago ulertzekoa da, informazio pila bat gorde dezake eta ondorioak ateratzeko erosoagoa da. Erantzun galdera hauei:

    a) Non aurkitzen da kantitate gehienean A3 produktua ?.
    Zein terminori dagokio datu hori?
    Zein da bere balioa?

    b) Zer adierazten du a_{32} elementuak?.
    Eta a_{23}-k?

    c) Artikulu kopurua gutxitzeko asmotan, zein biltegi eta zein produktu eskainiko zenuke salneurri merkeagoan?

    d) Elementu hoiek, lerroka batzea badu zentzurik? Eta zutabeka?

Adibidea

Osatu lau herrien arteko distantziak adierazten duen matrize bat; eman distantziak kilometrotan eta kontuan eduki herrien izenak ordena berean idatzi behar dituzula lerro zein zutabetan.

a) Zeintzuk dira diagonal nagusiaren elementuak?
b) Eman dezagun ibilgailu batek kilometroko 40 zentimo gastatzen dituela eta, hori dela eta, matrizeko elementu guztiak 40rekin biderkatzen ditugula. Zer adieraziko luke sortzen den matrizeak?

DEFINIZIOA

$m \times n$ ordena edo dimentsioko matrize bat, m lerro eta n zutabez osaturiko zenbaki errealen koadro bat da. $A_{m,n}$ adierazten da

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Errenkada edo lerro matrizea. m=1 denean. Adib, A= (2 3 -7) matrizea *1x3* ordenakoa da.

Zutabe matrizea. n=1 denean; adib, $A_{4,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ matrizea *4x1* ordenakoa da.

A-ren matrize iraulia A-ko lerroak eta zutabeak elkar aldatuz ateratzen zaiguna. A^t adierazten da.

Adib., $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ bada, bere iraulia zera da: $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Matrize karratua: m=n denean; adib. $A_{3,3} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Diagonal nagusia: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$.. Aurreko matrizean, 4, -1 eta 2 elementuek osatutakoa

Matrize triangeluarra.- Diagonal nagusiaren azpian (edo goian) dauden elementu guztiak zero badira. Adibidez, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrize diagonala.- Diagonal nagusian ez dauden elementu guztiak zero badira. Adib.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrize simetrikoa.- Elementu berdinak dituenean diagonal nagusiarekiko;adib. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

A-ren aurkako matrizea: - A

Matrize nulua. *2x3* ordenakoa: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Unitate edo identitate matrizea.- *I* adierazten da. Matrize karratu bat da eta bertan diagonal nagusiko elementu guztiak berdin 1 dira eta diagonalean ez dauden elementu guztiak berdin 0

3 ordenako unitate matrizea: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 ordenako unitate matrizea: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrize berdinak

$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ Ordena berdinekoak eta termino guztiak berdinak

$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} c & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ berdinak badira, derriorrez c=1 , a=2 eta b=7 izan behar dira

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ez dira berdinak

Alderantzizko matrizea . A^{-1} adierazten da.
Zera betetzan da: A. A^{-1} = I eta A^{-1}. A = I

Ariketak

1.- Idatzi, posible bada:
- a) 4 ordenako identitate matrizea
- *b) 1x4* ordenako matrize nulua
- *c) 2x3* ordenako matrize simetriko bat
- *d) 4x2* ordenako matrize bat eta bere iraulia

2.- Zeren berdina da $(A^t)^t$?

MATRIZEEN ARTEKO ERAGIKETAK

Batuketa

Bi edo *n* matrizeen arteko batuketa egiteko ordena berekoak izan behar dira.

Izan bitez A = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ eta B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+1 & -1+2 & 6-3 \\ 4+5 & 2+0 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Propietateak:

Elkartze: *(A + B)+C = A +(B+C)*
Trukatze: *A + B = B +A*
Aurkakoa: *A + (-A) = matrize nulua*

Zenbaki erreal bat bider matrize bat

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$\Re \, . \, A_{3,2} \rightarrow A_{3,2}$ aplikazioa da (kanpo-eragiketa)

Esaterako, lau herrien arteko distantziak adierazten duen matrizea bider 40 zentimo kilometroko eragiketa.

Matrizeen arteko biderketa

A eta *B* biderketa egin ahal izateko, *A.B*, lehenengoaren zutabe kopurua eta bigarrenaren lerro kopurua berdinak uzan behar dira.

Eman ditzagun $A_{3,4} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ eta $B_{4,2} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \\ 0 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

A.B egin ahal da zeren A-ren zutabe kopurua eta B-ren lerro kopurua berdina baita, 4 hain zuzen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \\ 0 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1+3.7+5.0+1.4 & 2.6+3.2+5.(-5)+1.0 \\ 7.1+2.7+4.0+3.4 & 7.6+2.2+4.(-5)+3.0 \\ (-1).1+5.7+0.0+8.4 & (-1).6+5.2+0.(-5)+8.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -7 \\ 33 & 26 \\ 66 & 4 \end{pmatrix}$$

$(\mathbf{3} \times 4)$ $\quad$ $(4 \times \mathbf{2})$ $\quad$ (3×2)

Ateratzen den matrizearen ordena *3x2* da, hau da, *A*-ren lerro kopurua eta *B*- ren zutabe kopurua dituena.

Ordea, $B_{4,2}.A_{3,4}$ ezinezkoa da. Zergatik?.................................

Adibidea.

Eman ditzagun $A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ eta $B_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ matrizeak. Kalkulatu *A.B* eta *B.A*

$$A_{3,2}.B_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 11 & 4 & 15 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_{2,3}.A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$A.B \neq B.A$

Propietateak:

- Matrizeetan, **EZ** da betetzen trukatze propietatea. $A.B \neq B.A$
- Elkartze: (A.B).C = A.(B.C)
- Banatze: A.(B+C) = A.B + A.C
- A.I = A

Ariketak.

1. Matrize hauek binaka hartuta, egitzazu biderkaketa posible guztiak:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.- *A* matrizeak adierazten du *F1, F2, F3* eta *F4* familiek urtean kontsumitzen duten fruta eta haragi kopurua kilotan.

B matrizeak, ordea, 2001, 02 eta 03 urteetan ogiak eta haragiak izan duten prezioa eurotan.

$A =$

	Fruta	Haragia
F1	430	150
F2	500	210
F3	120	80
F4	800	110

$B =$

	2001	02	03
Fruta	1,50	1,80	2
Haragia	10,50	11	10

Egizu $A_{4,2} \cdot B_{2,3}$ biderkaketa. Aterako zaizuna, era honetako matrizea izango da:

$A.B =$

	2001	02	03
F1			
F2			
F3			
F4			

Zer adierazten du matrize horrek?

3.- $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ izanik, kalkulatu A-ren berredurak eta A^n

ARIKETAK 1

1.- Kalkula itzazu *X* eta *Y* matrizeak ondoko sisteman: $\left.\begin{array}{l} 2X-3Y=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} \\ X-Y=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\end{array}\right\}$

2.- Kalkulatu *a, b, c* eta *d* ondoko hau betetzeko: $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

3.- Aurki itzazu *a* eta *b*, ondokoa bete dadin: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}$

4.- $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ eta *I* bi ordenako identitate matrizea izanik, kalkulatu A^2-2A+I

5.- $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ eta bi ordenako *I* unitate matrizeak emanik, kalkulatu

$A^2-xA-yI=0$ erlazioa egiaztatzen duten *x* eta *y* zenbaki errealak.

6. Aurkitu ondoko matrize ekuazioak betetzen dituzten *A* eta *B* matrizeak:

$$2A+3B=\begin{pmatrix}8 & 4 & 7\\ 18 & 11 & -6\\ 8 & 3 & 13\end{pmatrix} \quad ; \quad -A+5B=\begin{pmatrix}9 & -2 & 16\\ 17 & 1 & -10\\ 9 & 5 & 13\end{pmatrix}$$

7. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ matrizea izanik, kalkulatu A^n

Zein da A^{150} matrizea? Eta $A^{150}-2A^{50}+40I$?

8. Kalkula ezazu ondoko erlazioa betetzen duen *X* matrizea: $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot X$

9.- Ebatzi ondoko matrizear ekuazioa: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$

10.-$AX = BX + C$ ekuazio matriziala ebatzi, *A, B* eta *C* matrizeak ondokoak izanik:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad C=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$$

11. Enpresa batek A, B, C eta D lau akzio motatan inbertitzeko aukera ematen du eta hiru modu desberdinetan, matrize honek adierazten digun bezala:

Lerro bakoitzak inbertsio-modu bat adierazten du, ehunekotan $\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix}10 & 20 & 30 & 40\\ 20 & 20 & 30 & 30\\ 25 & 25 & 25 & 25\end{pmatrix}}\end{array}$

Ondoko taulan, hiru hilabetetan zehar, akzioetako bakoitzetik ateratako etekina batekotan adierazten da:

	A	B	C	D
1. hilabetea	0,98	1,2	0,8	1,1
2.hilabetea	1,2	0,8	1,5	1,3
3.hilabetea	1,1	1,4	0,7	0,9

Matrizeekin eragiketak eginda, kalkula ezazu inbertsio-modu bakoitzean hilabeteroko etekina ehunekotan.

MATRIZEAK (ariketak 2)

1.- Eman ditzagun $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ eta $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ matrizeak. Kalkula itzazu:

X eta *Y* matrizeak, ondoko sisteman: $\left.\begin{matrix}2X-3Y=A\\ -3X+4Y=-2B\end{matrix}\right\}$

2. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -2 & 0\end{pmatrix}$ eta $B=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -2\\ 4\end{pmatrix}$ izanik, kalkulatu *A.B* eta *B.A*

3. *A* matrizearen ordena *r x s* izanda, zein izan behar du *B*-ren ordena, bai *A.B* eta *B.A* posible izan daitezen?

4.- Izan bitez $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ eta $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$ matrizeak.
Egiazta ezazu $(A.B)^t = B^t.A^t$

5.- *A* eta *B* bi matrize karratuak eta ordena berdinekoak dira. Egiazkoak al da ondoko erlazioa?

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

6.- Ebatzi ondoko matrizear ekuazioak:

a) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.\mathrm{X}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}.X=\begin{pmatrix}7\\ 0\end{pmatrix}$

7.- $M+N=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ eta $M-N=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ badira, kalkulatu $\mathrm{M}^2-\mathrm{N}^2$

8.- Eman dezagun $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ matrizea. Aurki ezazu *A.B = B.A* trukatze erlazioa egiaztatuko duen B matrizea

9. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ izanik, kalkulatu A^n

10.- Eman dezagun $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ dela.

a) Kalkulatu A^n
b) Egiaztatu $(\mathrm{A}-\mathrm{I}_2)^2=0$ dela.
c) Kalkulatu $A^{80}-2A^{20}+5I$

DETERMINANTEAK

Determinanteak , tresna baliotsuak dira Matematikan, batez be Algebra arloan.

Matrizea karratua denean definitzen dira.

Zer da matrize karratu baten determinantea ? Matrizearen elementuekin , eragiketa bereziak (bihurriak , hobe esanda) eginez lortzen den **zenbaki erreal bat** .

Zenbaki hori **det(A)** edo deitzen da eta laguntza handikoa dugu zenbait kasuetan.

Ikasgai honetan ikasiko duzuna:
- 2. eta 3. mailako determinanteak kalkulatzen
- Determinanteen propietateak
- 4.eta n. mailako determinanteen kalkulua
- Aplikazioak:
    - Matrize karratu batek alderantzizkoa izango du baldin ***det(A)≠ 0*** bada . Hori gertatzen denean, alderantzizkoa erabili ahal da ekuazio-sistemen ebazpenak egiteko.
    - Lerroak (zutabeak), noiz diren linealki menpekoak ala independienteak
    - Matrize baten heinaren kalkulua

2. ordenako determinanteak

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bi ordenatu matrize karratu baten determinantea honako eragiketa hau egin ondoren ateratzen den zenbaki erreala da: $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$. Eta honela adierazten dugu:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Adibideak

a) Baldin $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ bada, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1.(-3) - (-4).2 = 5$

b) Baldin $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, orduan $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 8.1 = -2$

A matrize karratu bat ***eregularra*** *da* $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

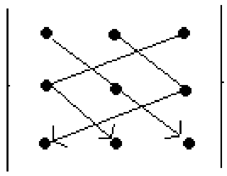
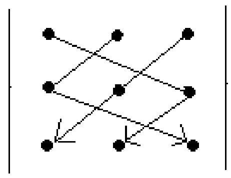
3. ordenako determinanteak . Sarrus-en erregela

3×3 ordenako determinantea honela kalkulatzen da:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Biderkadura bakoitzean hiru elementu daude, lerro eta zutabe bakoitzeko biderkagai bat hartuta (posizioak errepikatu gabe).

Guztira 3! = 6 batugai. Sei batugai horiek oso erraz gogora daitezke Sarrus-en erregela erabiliz.

Batu egiten diren ; gaiak:  ; Kendu egiten gaiak: 

Ariketak

1.- Kalkula ezazu $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ matrizearen determinantea

2.- Ebatzi $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & x \end{vmatrix} = 24$ ekuazioa

DETERMINANTEEN PROPIETATEAK

1. Matrize karratu baten eta bere irauliaren determinanteek berdin balio dute: *det(A) = det(A)ᵗ* .

2. Bi lerro (edo zutabe) elkarrekiko trukatzen badira,determinantearen zeinua aldatu egingo da

3. Bi lerro (edo zutabe) berdinak baldin badira,determinantearen balioa zero da

4. Lerro bateko elementu guztiak zenbaki batez biderkatzen badira,determinantea zenbaki horretaz
biderkatuta geratuko da.

5. Lerro bateko elementu guztiak nuluak baldin badira,determinantearen balioa zero da

6. Bi lerro proportzionalak badira,determinantearen balioa zero da

7. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b & a_{32}+c & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b & c & d \end{vmatrix}$

8. Lerro bat beste lerroen konbinazio lineala baldin bada, determinantearen balioa zero da

9. Lerro (edo zutabe) bati beste lerroen konbinazio lineal bat batzen bazaio, determinantearen balioa ez da aldatzen.

10. Matrize triangeluar baten determinantea haren diagonal nagusiko elementuen biderkadura da.

11. $|A.B| = |A|.|B|$, A eta B matrize karratuak izanik

12. $|I_n| = 1$**,** *n*-ren edozein baliorentzat

ARIKETAK

1.- Adibide bana idatziz,erantzun galdera hauei:

1.a - Noiz ez da aldatzen determinante baten balioa ?

I)

II)

Eta ,noiz da berdina baina zeinuz aurkakoa ? :

1.b - Egiazkoak al dira ondoko erlazioak ? Arrazonatu :

a) $|A+B| = |A| + |B|$

b) $|A.B| = |A|.|B|$

c) $10.|A| = |10.A|$

1.c - Noiz da determinante baten balioa 0 ?

I)

II)

III)

IV)

2.- Sarrus aplikatu barik, frogatu ondoko determinanteak nuluak direla:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

3.- Sarrus egin barik, kalkulatu “x”-en balioak: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & x & 6 \\ 3 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$

4.- $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ determinantearen balioa 6 bada, kalkulatu arrazonatuki:

$$|2.A| \quad ; \quad 2.|A| \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & d & 3g \\ b & e & 3h \\ c & f & 3i \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

5.- Diagonal nagusitik gora edo behera "zeroak eginez", kalkulatu determinante hauek:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

6.- Garapena egin barik eta determinanteen propietateak erabiliz, kalkulatu:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

4. mailako determinanteak

Elementu baten Adjuntua

Eman dezagun $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ matrizea

a_{ij} elementu baten adjuntua, "i" lerroa eta "j" zutabea kenduz, ateratzen den determinantearen balioa da, $(-1)^{i+j}$ -ren bidez biderkatuz . A_{ij} adierazten da. Adib:

a_{11} elementuaren adjuntua: $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

a_{12} elementuaren adjuntua: $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

Erregela (Determinanteen beste propietate bat)
Determinante bat kalkulatzeko, ondoko formula erabil daiteke:
"Lerro (edo zutabe) bateko elementu bakoitza, biderkatu adjuntuarekin eta egin denon arteko batura" . *Aukera dezakezu edozein lerro.* Hau da:

$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ (1.lerroa aukeratuz) . Baita:
$= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$ (3.zutabea aukeratuz)
= ....
Lerro edo zutabe egokiena aukeratzea komeni da.

Adibidea 1

Kalkulatu $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ lerro bateko elementuen garapena eginik

1.lerroa aukeratuz, $|A| = 1.(-1)^2\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2).(-1)^3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^4\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \underline{13}$

Ahalik eta "zero" gehiago lortuz, determinante gutxiago kalkulatu beharko da. Hori dela ta, egin dezagun "zero" a_{12} elementua; horretarako, 2. zutabearen ordez ipini dezagun $Z_2+2.Z_1$

$|A| \to z_2 + 2z_1 \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 11 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 1. lerroaren bidez garatuz, $|A| = 1.(-1)^2\begin{vmatrix} 11 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 13$

Adibidea 2.

Kalkulatu $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Zeroak lortzeko aukera dezagun 1.zutabea . a_{21} eta a_{31} elementuak 0 egingo ditugu. Horretarako, $L2$-$L1$ eta $L3$+$L1$. Hau da:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ Egin dezagun garapena 1.zutabeko elementuetatik abiatuta:

$$|A| = 1.A_{11} + 0.A_{21} + 0.A_{31} + 0.A_{41} = 1.(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 8 - 4 + 4 = \underline{\underline{10}}$$

Gauss-en metodoa erabilita (triangeluarizatuta), soluzio bera lortzen da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow L2 - L1; L3 + L1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow L3 - 2.L2; L4 - L2 \rightarrow$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow L4 - L3 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1.1.2.5 = \underline{\underline{10}}$$

Ariketa.

Kalkula itzazu :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(Sol. : 38) (Sol.: -2) (Sol.: -5)

ALDERANTZIZKO MATRIZEA

Zertarako matrize baten alderantzizkoa, A^{-1}? Ekuazio-sistema batzuen ebazpena egiteko (Hurrengo galderan ikusiko dugu)

Eman dezagun $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ matrizea

Alderantzizkoa edukitzeko derriorrezko bi baldintza:

- Matrize karratua izatea
- Bere determinantea ezberdin 0 izatea; hau da, $|A| \neq 0$

Zein da A-ren alderantzizkoa?. Formula: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

Zera betetzen du: **A.A^{-1}=I** eta **A^{-1}.A=I**

<u>Adibidea.</u> Kalkula dezagun $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizkoa

Pausuz pausu egitea gomendatzen da.

1.- Kalkulatu A-ren determinantea:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0+0+10-0-4+0 = 6$$; $|A| \neq 0$ denez, badu alderantzizkoa

2.- Kalkulatu A-ren adjuntuak:

$$A_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;;\; A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1 \;;\; A_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-6) = 6 \;;\; A_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -16 \;;\; A_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

$$A_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;;\; A_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-5) = 5 \;;\; A_{33} = (-1)^6\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

3.- Soluzioa.- Idatzi $\dfrac{1}{|A|}$ bider adjuntuen matrizearen **iraulia:** $A^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & -16 & 5 \\ 2 & -14 & 4 \end{pmatrix}$

<u>Ariketa</u> Kalkula itzazu bi matrize hauen alderantzizkoak: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

APLIKAZIOA. Ekuazio-sistema bat adierazi matrizear erara eta ebatzi sistema

Ebatz dezagun ondoko sistema $\left\{\begin{array}{l} x-z=1 \\ 2y+3z=0 \\ x-y+z=4 \end{array}\right\}$

1.- Matrizear erara: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

A . X = B

2.- Ebazpena. X askatzeko, atal biak A^{-1}en bidez biderkatzen ditugu ezker aldetik:

$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$

$A^{-1}.A = I$ eta $I.X = X$ denez gero, $\mathbf{X = A^{-1}.B}$

Beraz, soluzioa, A-ren alderantzizkoa kalkulatu eta B-rekin ezker aldetik biderkatuz lortzen da.

A-ren alderantzizkoa:

A-ren determinantea: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+0+0+2+3=7$

Adjuntuak : $A_{11} = 5$; $A_{12} = -(-3)$; $A_{13} = -2$

$A_{21} = -(-1)$; $A_{22} = 2$; $A_{23} = -(-1)$

$A_{31} = 2$; $A_{32} = -3$; $A_{33} = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sistemaren soluzioa. $X = A^{-1}.B = A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 13 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/7 \\ -9/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}$

x = 13/7 ; y = -9/7 ; z = 6/7

Ekuazio matrizialak

Adibidea. Bakandu *X* matrizea ondoko ekuazioetan:

a) A . X = B ; b) X . A = B ; c) A . X . B = C

a) A . X = B ; A^{-1} . A . X = A^{-1} . B ; $\mathbf{X = A^{-1} . B}$

b) X . A = B ; X . A . A^{-1} = B . A^{-1} ; $\mathbf{X = B . A^{-1}}$

c) A.X.B = C ; A^{-1}.A.X.B = A^{-1}.C ; X.B = A^{-1}.C ; X.B.B^{-1}= A^{-1}.C.B^{-1} ; X = A^{-1}. C.B^{-1}

Ariketa. Bakandu X:

a) B . X = A ; B = A . X ; A . B . X = C ; A^{-1} . X . A = C

ARIKETAK

1.- Egiazta ezazu, garapena egin gabe, nuluak direla ondoko determinanteak:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & b+a & b \\ a & c+a & c \\ b & c+b & c \end{vmatrix}$$

2.- Egiaztatu, garatu gabe, determinante hau 12-ren multiploa dela: $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 1 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

3.- Baldin $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eta det(A)=5 bada, kalkula itzazu:

$$|3.A| \quad ; \quad 3.|A| \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 2a & 2c \\ -3b & -3d \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{vmatrix}$$

4.- Kalkula ezazu ondoko determinantean Gauss-en metodoa erabiliz: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

5.- Errenkada edo zutabe egokiena aukeratuz, kalkula itzazu ondoko determinanteen balioak.

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (sol.:-17) \quad ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (sol.:-90)$$

6.- Har dezagun A matrizea: $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) a-ren zer balioentzat edukiko du alderantzizkoa?

b) Aurki ezazu $a=2$ denean

7.- Eman ditzagun hiru sistema hauek:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 2x + z = -1 \end{cases}$$

a) Adierazi matrizialki

b) Kalkulatu, posible denean, koefiziente-matrizearen alderantzizkoa eta ebatzi sistema

8.- Izan bitez $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ eta $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ matrizeak . Kalkulatu X matrizea ondoko kasuetan: a) $A.X = B$; b) $X.A = B$ (Erabili alderantzizkoaren metodoa)

9. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ t & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ izanik:

a) Aurkitu t-ren zeintzuk baliorentzat A-k ez duen alderantzizkorik.
b) $t = 2$ den kasuan, aurki ezazu, esistitzen bada, $X\,.\,A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ egiaztatzen duen X matrizea.

10.- $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ eta $C=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ emanik, ebatzi $AX=BX + C$ ekuazio matriziala.

11.- Izan bitez $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ eta $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizeak. Aurkitu A+B matrizearen alderantzizkoa eta X matrizea non $X(A+B) = 2(A-B)$ den.

12.- $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ eta $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ izanik, ebatzi $A.X.B = C$ ekuazioa. Erabili alderantzizkoaren metodoa

13.- Izan bedi ondoko matrizeak: $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ eta $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Aurkitu $AXA = 2AB$ berdintza betetzen duen X matrizea

14.- Izan bedi ondoko matrizeak: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ eta $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Aurkitu X ondoko ekuazioan: $2AXA^{-1} = B$

15.- Demagun ondoko ekuazio-sistema:

$2x + y = 1$; $2z + t = 3$; $x - 2y = -2$; $z - 2t = 4$

Adierazi $AX = B$ eran, non A, X eta B letrek 2×2 motako matrize karratuak diren. Ondoren ebatzi sistema matrizialki.

EKUAZIO LINEALEN SISTEMAK

Ebazpenari edo soluzioari dagokionez, sistema mota hauek daude:

- Siostema **BATERAEZINAK**. Ez dute soluziorik
- Sistema **BATERAGARRIAK**. Badute soluzioa.:
  - Soluzio bakarra badu, **DETERMINATUA** edo **ZEHATZA** da
  - Infinitu soluzio baditu, sistema INDETERMINATUA da

<u>Gauss-en metodoa :</u>

Helburua , sistema triangeluar bat lortzea da ; hau da , diagonal azpiko elementu guztiak "zero" egin.

<u>Adibidea 1</u>

Ebatzi $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$ sistema

<u>Pausoak :</u>

I) Koefizienteak eta gai independenteak adierazi matrize batean:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

- Aldatu 1. eta 2. lerroak. "Zeroak" lortzeko, hobe duzu 1 (edo -1) zenbakia eduki "zutabe burutzat".

(Trukatu daitezke 1. eta 2. zutabea ere . Hori eginez gero , sistema baliokide triangeluarra idazten duzunean (III. pausoa) ,kontuan izan 1. zutabea "y" ezezagunari dagokiola eta 2. zutabea "x"-i.)

Hau da: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$

II) Egin 0 lehen zutabeko 2 eta 3 zenbakiak : $l_2 = l_2 - 2l_1$ eta $l_3 = l_3 - 3l_1$

Egin 0 bigarren zutabeko azken zbkia : ....

III) Idatzi sistema baliokidea :

IV) Egin ebazpena azken ekuaziotik hasita :

Laburpena. Sistema motak Gauss-en metodoa erabiliz:

Bateragarri determ.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & - & - & - & - \\ 0 & * & - & - & - \\ 0 & 0 & * & - & - \\ 0 & 0 & 0 & * & - \end{array}\right)$$

Bateragarri indet.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & - & - & - & - \\ 0 & * & - & - & - \\ 0 & 0 & * & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Bateraezina

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & - & - & - & - \\ 0 & * & - & - & - \\ 0 & 0 & * & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - \end{array}\right)$$

ARIKETAK

1.- Eztabaidatu ondoko sistemak eta, posible denean , ebatz itzazu Gaussen metodoa erabiliz:

a) $\begin{cases} 5x - y + z = 13 \\ x - 2y + 3z = 12 \\ 2x + y + z = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y = 1 \\ x - 2y + z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y + 2z - t = -1 \\ x + z = 0 \\ y - z + 2t = 2 \\ x - y + z + t = 1 \end{cases}$

2. Egizu gauza bera ondoko sistemekin:

$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + 4z = 7 \\ 4x + y = 9 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y = 5 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 4y - 5z = 1 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases}$

3.- Aurki ezazu a-ren balioa, honako sistema hau bateragarri indeterminatua izan dadin:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ x + 2y - z = 4 \\ 4x + 3y + z = a \end{cases}$$

4.- Kalkulatu a-ren balioa sistema hau bateraezina izan dadin:

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ -2x + y = 6 \\ 3x + az = 14 \end{cases}$$

CRAMER -en erregela

Definizioa:
Ekuazio-sistema bat , Cramer-ena dela esaten da , baldin :

I) Ezezagun eta ekuazio kopurua berdinak direnean (m=n) eta

II) Koefizienteen matrizearen determinantea ezberdin 0 denean ; $|A| \neq 0$

Ebazpena:
Eman dezagun hiru ekuazio eta hiru ezezaguneko sistema lineal bat:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots + \dots\dots + \dots\dots + \dots\dots = \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Cramer-en sistema bat dela suposatuko dugu, hau da, $|A| \neq 0$

Adieraz dezagun era matrizialean:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{edo} \quad A \cdot X = B \rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Hau da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{edo:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Adibidea 1

Ebatzi ondorengo sistema: $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$

- Ezezagun kopurua eta ekuazio kopurua berdinak dira (3).
- Koefizienteen determinantearen balioa ezberdin 0 da.: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

Beraz, Cramer-en sistema bat da.

Soluzioa:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{3}{4} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-15}{4} \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-25}{4}$$

Adibidea 2

Ebatzi $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases}$ sistema.

I) Ezezagun kopurua = Ekuazio kopurua

II) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$

Beraz, Cramer-en sistema da.

Soluzioa:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{7} = -\frac{2}{7} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{3}{7}$$

SISTEMAK (ariketak)

1. Ebatzui ondoko sistemak Gaussen metodoa erabiliz:

$$\begin{cases} x-2y=-3 \\ 2x+y-5z=4 \\ 2x+3y+z=4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x+y-z=-1 \\ x+4y-4z=-4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x-y+2z=2 \\ -4x+2y-4z=1 \end{cases}$$

2. Egiazta itzazu ondoko sistemak Cramer-enak direla eta ebatzi:

$$\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 3x+2y=-5 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x+y=1 \\ y-z=-1 \\ -2x+z=-1 \end{cases}$$

3.- Ebatzi ondoko sistemak:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. Ebatzi ondoko ekuazio sistemak

a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+3z=2 \\ x+4y+9z=-2 \\ 2x+6y+12z=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=6 \\ -x-y-z=-3 \\ x+y+3z=9 \end{cases}$

5.- a) Ebatzi ondoko sistema: $\begin{cases} x+y-z=5 \\ x-y-z=7 \end{cases}$ Egiaztatu infinitu soluzio dituela (indet)

b) Gehitu hirugarren ekuazio bat, sistema bateragarria determinatua izan dadin.
c) “ “ “ , jarraitu dezan sistema bateragarria indeterminatua izaten
d) “ “ “ , sistema betaraezina izan dadin

6.- Eztabaidatu ondoko sistemak *m* parametroaren arabera

a) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=1 \\ 4x-y=m \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-my-3z=0 \\ 5x+2y-z=0 \end{cases}$

SISTEMAK

1.- Hiru "butaka" eta sei "palko" sarrerengatik 150 euro ordaindu dira . Aztertu honako hauek ordaindu diren kasuak ere :

a) Bi butaka eta bi palko sarrerengatik 70 euro
b) Butaka sarrera bat eta bi palko-gaitik 50 euro ordaindu dira
c) Bi butaka eta lau palko sarrerengatik 110 euro.

Bilatu jarleku bakoitzaren prezioak , posible den kasuetan .

2.- Iturri bik 3 ordutan betetzen dute piszina bat . Iturriek bakarka funtzionatzen dutenean, batak besteak baino 2 ordu gehiago behar du piszina betetzen
Zenbat denbora behar du iturri bakoitzak, berak bakarrik funtzionatuz , piszina betetzeko?

3.- Bi jostunek, erropa bat egin behar dute.Bakarka arituz, batak 8 egun beharko lituzke lana bukatzeko; besteak 13 egun. Eta, biak batera?

4.- *2.A* eta *2.B* taldeek txango bat egingo dute eta,horretarako,autobus bat kontratatu dute. Ikasle guztiak joanez gero 4,50 eurona ordaindu beharko dute, baina seik huts egiten badute, ikasleko prezioa 5 eurotakoa izango da. Zenbat ikasle dira guztira? Zenbat kobratzen du autobusak txangoa egiteko?

5.- Aita baten eta beronen semeen adinen batura 81 urte da. Seme nagusiak bere anaiak baino lau urte gehiago ditu. Orain dela bost urte, aitaren adina bi semeen adinen baturaren bikoitza zen. Zein da horietako bakoitzaren egungo adina?

6.- Hiru lagunek erabaki dute hiru jokaldi egingo dituztela dadotan. Batek galtzen duenean, beste biei eman beharko die une horretan duten kantitatea. Bakoitzak jokaldi bat galdu zuen eta azkenean bakoitzak 24 euro zituen. Zenbat diru zeukan jokalari bakoitzak jokoaren hasieran?

7.- Zenbaki baten hiru zifren batura 14 da. Ehunekoen eta hamarrekoen zifren batura batekoenaren berdina da. Zifren ordena alderantzizkatuz gero, zenbakia 396 unitate handiago litzateke. Zein da zenbakia?

8.- Manuk lapitzak, boligrafoak eta errotuladoreak erosi ditu paperdenda batean. Lapitzen kopurua boligrafo eta errotuladore kopuruen baturaren berdina da, eta boligrafo bakoitzeko bi errotuladore daude. Jakinik lapitz baten prezioa 3 eurokoa dela, boligrafo batena 12 euro eta errotuladoreek 24 eurona balio dutela, eta 276 euro ordaindu dituela, mota bakoitzeko zenbat gauza erosi ditu?

9.- Mirenek 60 euro dauzka kirol gaietan gastatzeko. Gustatu zaizkion galtzerdiak, prakak eta kamiseta erosiko balitu 2 eurotako zorra utziko luke dendan; galtzerdiak eta prakak eramanez gero 29 euro edukiko lituzke soberan; eta prakak eta kamiseta erosita euro bat geratuko litzaioke. Zein da gai bakoitzaren prezioa?

10.- Lutxik asignatura baten hiru azterketa egin ditu eta hiru horien batezbesteko nota 8,5 izan da. Lehen bien batezbesteko nota 8 bada eta azken biena 9, aurki ezazu azterketa bakoitzean ateratako nota

11.- *P1, P2* eta *P3* hiru pastel mota egiteko, *A, B* eta *C* osagaiak erabiliko dira. *P1* egiteko, 2 kg *A*, 1 kg *B* eta 1 kg *C* behar dira. *P2* egiteko, 1 kg *A*, 2 kg *B* eta 1 kg *C*; berriz, *P3* egiteko, 1, 1 eta 2 kg. *A, B* eta *C* hurrenez hurren. Salneurriak hauek izan dira: *P1*-ena 24 euro; *P2*-rena 25 eta *P3*-rena 26. Gozogilearen irabaziak 4, 3´50 eta 5´5 euro badira *P1, P2* eta *P3* pastelegatik, hurrenez hurren, kalkula itzazu hiru osagaien kiloko prezioa.

12.- Kooperatiba farmazeutiko batek hiru ontzi desberdinetan banatzen du produktu bat: *A, B* eta *C* ontzietan. *A* motako kutxek 250 gramoko pisua dute eta 3 euroko prezioa; *B* motakoek 500 gr. pisatzen dute eta 2 eurona balio dute; eta *C* motakoek kilogramo bateko pisua eta 4 euroko prezioa dute. Botika bati bost kutxako lote bat eman zaio, guztira 14 euro balio duelarik eta pisua 2,5 kilogramokoa delarik. Mota bakoitzeko, zenbat ontzi erosi ditu botikak?

13.- Aurki ezazu honako ezaugarriak egiaztatzen dituen hiru zifrako zenbaki bat:

- Bere zifren batura 24 da
- Batekoen eta hamarrekoen zifrak elkar trukatuz gero, zenbakia bederatzi unitateen txikiagotzen da
- Ehunekoen eta hamarrekoen zifrak elkar trukatzen badira, zenbakia 90 unitate txikiagotzen da

Aurkitu zenbakia

14.- Kutxa batean hiru motako txanponak daude: bi eurokoak, euro batekoak eta 50 zentimokoak. Guztira 33 txanpon daudela eta guztien balioa 40 euro dela jakina da.
Mota bakoitzeko txanpon-kopurua zehaztea posible al da?
Erantzuna baiezkoa izatekotan aurkitu mota bakoitzeko txanpon kopurua
Erantzuna ezezkoa izatekotan, aurkitu aipatutako moduko 33 txanponeko bi multzo desberdin gutxienez, txanponen balioa bi kasuetan 40 euro delarik

Portzentaiak

15.- Ikastetxe batean neska eta mutil kopururen arteko erlazioa 8/7 zen ikasturte hasieran. Ikasturtean zehar 40 neskak eta mutilen %4ek ikasteari utzi zioten eta, beraz, erlazioa 15/14-koa bihurtu zen. Zenbat mutil eta neska zeuden ikasturte amaieran?

16.- Pertsona batek, *A, B* eta *C* enpresetan 60.000 euroko inbertsioa eginez gero, 4.500 euroko etekina lortu du.
A enpresan, *B* eta *C*-n biak batuta baino bi aldiz gehiago inbertitu du eta irabaziak hauek izan dira: *A*-n %5, *B*-n %10 eta *C*-n %20. Kalkulatu enpresa bakoitzean ipinitako diru kantitatea

17.- Prezio desberdinetako hiru liburu ditugu. Haietatik garestienak beste biek batera adina kostatzen da. Bitarteko prezioko liburuaren bi alek merkeenaren hiru alek hainbat kostatzen da. Baldin liburu garestienaren prezioa %20 garestituko balitz, erdiko prezioaren bi alek hainbeste kostatuko luke. Datu horiekin, aurki al daiteke liburu moeta bakoitzaren prezioa? Arrazoitu erantzuna

18.- Tren batek 500 bidaiari daramatza, eta denen artean ordaindutakoa 3.525 euro izan da. Kalkula ezazu zenbat bidaiarik ordaindu duten txartelaren balio osoa, hau da 15 euro, zenbatek %20a eta zenbatek %50a, jakinik %20a ordaindu duten bidaiarien kopurua txartel osoa ordaindu dutenen bikoitza dela.

19.- *A* motako akzioetan 10.000 euro eta *B* motakoetan 20.000 euro inbertituz gero, urtean 2.800 euro interesak jasoko nituzke; berriz, *A* motakoetan 20.000 eta *B*-n 10.000 inbertituz gero, irabazia 2.600 eurokoa izango litzateke. Zein litzateke irabazia *A*-n 30.000 euro eta *B*-n 50.000 euro inbertitzen baditugu?

20.- Arrain-saltzaile batek aste jakin bateko asteartean 96 kg legatz eta 130 kg antxoa erosi zituen, orotara 1836 euro ordaindu zuelarik.
Hurrengo asteazkenean, behi eroen efektua zela eta, legatzaren prezioa %20 igo zen eta antxoarena %30. Egun horretan 40 kg legatz eta 50 kg antxoa erosi zituen, orotara 918 euro ordaindu zuelarik.
Nahikoak al dira aurreko datuak astearteko legatz eta antxoaren prezioa kalkulatu ahal izateko?. Erantzuna baiezkoa bada prezioak kalkulatu, ezezkoa bada argudiatu zergatik ezin den kalkulu hori egin.

<u>Nahasteak</u>

21.- 2 euro/l eta 5 euro/l balioa duten bi olio nahastuz, 4 euro/l balioko 300 l. olio nahi ditugu lortu. Zenbat litro nahastu behar dira bakoitzetik?

23.- Ardogile batek 3 ardo-mota ditu : 1 , 2 eta 4 euro-litrokoak. Zenbat litro nahastu behar du mota bakoitzetik , 3 euro-litroko balioko duen ardoa lortzeko?
Ardoaren kalitatea dela eta , 2-euro litroko ardoa , 1ekoa baino bi aldiz gehiago erabili behar du nahastean.

24.-Osaba Ebaristok, ur eta ardo nahasketaren 10 litro ditu. Dastatzean, oso arina dela ohartuz, ardo kantitate bat gehitzea erabakitzen du eta orduan ur- kantitatea guztiaren %30a izango da. Oso arina izaten jarraitzen duenez, berriz lehengo ardo kantitate bera gehitzen dio eta orduan ur-kantitatea guztiaren %20a izango da. Zenbat litro-ardo gehitzen dira aldi bakoitzean eta zenbat litro ur daude?

Inekuazio linealak. Sistemak

$x>7$	*x* handiagoa 7 baino
$x\geq 7$	*x* handiagoa edo berdina 7 baino
$x<5$	*x* txikiagoa 5 baino
$x\leq 5$	*x* txikiagoa edo berdina 5 baino

Bi ezezaguneko inekuazio linealak

Adibidea 1.- Eman dezagun $2x-y\geq 4$ inekuazioa.

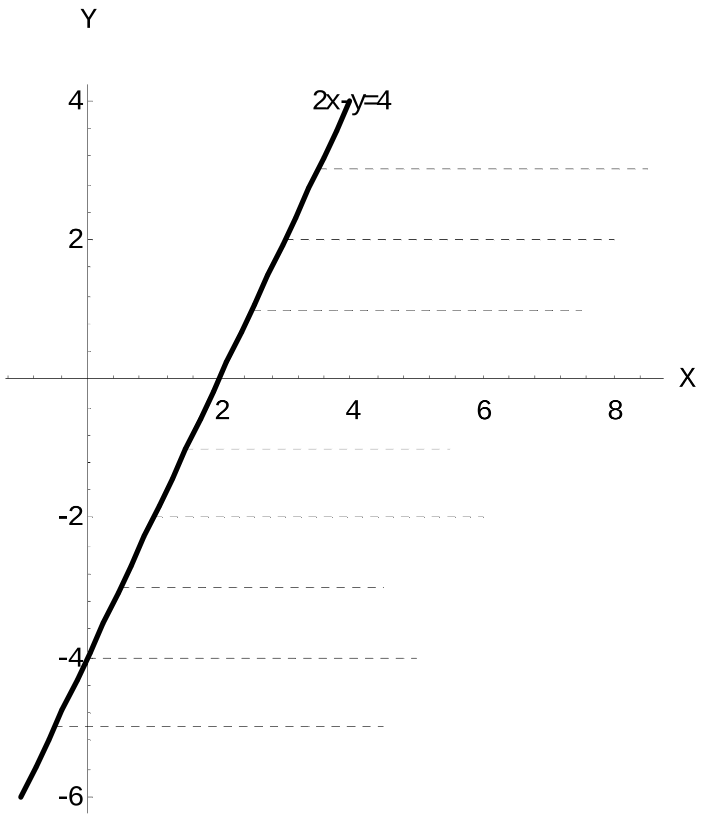
(5,1) puntua, inekuazio horren soluzio bat al da?...........

Eta (0,0) puntua?.............

Eta (1,-2),..........., (6,1),...............puntuak?

Ebatz dezagun grafikoki $2x-y\geq 4$ inekuazioa:

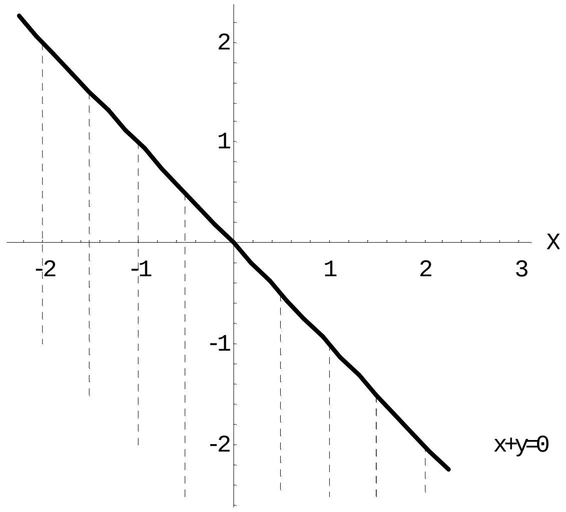
- $2x-y=4$ zuzena marraztuko dugu. Zuzen horrek planoa bi planoerditan zatitzen du.
- $2x-y\geq 4$ baldintza betetzen duten puntuak eskuin aldeko planoerdian daude. Aukeratu zona horretako puntu bat, adib. (5,0) eta ordezkatu inekuazioan. Ordea, ezker aldeko puntuek ez dira inekuazioaren soluzioak; esaterako, ordezkatu x = 0 eta y =0 balioak



Adibidea 2 . Adierazi grafikoki $x+y \leq 0$ inekuazioaren soluzioak

Irudika dezagun $x + y = 0$ zuzena.

Inekuazioaren soluzioak, zuzenaren behealdeko planoerdian

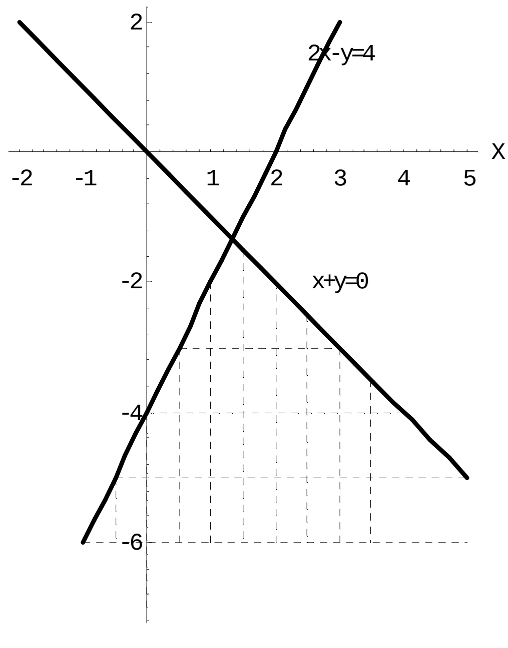


Inekuazio sistemak

Orain, ebatz dezagun ondoko sistema: $\begin{cases} 2x - y \geq 4 \\ x + y \leq 0 \end{cases}$

Lehenik, sistema osatzen duten inekuazioak ebatziko ditugu grafikoki.

Sistemaren ebazpena, bi eskualdeen ebaketa izango da.



Ariketa. Ebatzi sistema hauek:

$$\begin{cases} y \leq 8 \\ 4x + y \leq 20 \\ x + 2y \geq 12 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 4x + 3y \geq 12 \\ x + 2y \leq 6 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x + y + 1 > 0 \\ y - x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

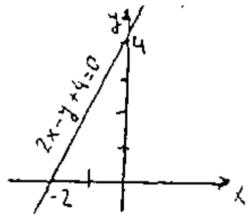
EKUAZIO/INEKUAZIO LINEALAK(1. mailakoak). SISTEMAK - ESANAHI GEOMETRIKOA

Bi ezezaguneko ekuazio lineal bat . *ax+by+c=0*

Adib. *2x-y+4=0* . Grafikoki, *zuzen bat* adierazten du, planoan irudikatua

x	y
0	4
-2	0

pu



Ardatzekin ebaki puntuak:
OX-arekin: y=0 eginik, x=-2. Beraz,(-2,0)

OY-arekin, x=0 eginik, y=4. Beraz, (0,4)an

Zuzenaren puntuak, ekuazioaren soluzioak dira; adib.,(1,6),(-1,2),.... Izan ere, 2x-y+4=0 adierazpenak zuzeneko puntu guztiak adierazten ditu

Zuzenaren malda. Modu askotara kalkula daiteke:

*. ax+by+c=0 zuzenean, *m=-a/b*. Kasu honetan, m=-2/-1=2

**. "y" askatuz gero, malda eta "x"-aren koefizientea gauza bat dira.
y= 2x+4 zuzenean, m=2

***Zuzenaren (x_1,y_1) eta (x_2,y_2) bi puntu jakinik, maldaren balioa zera da: $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$
Esaterako, (0,4) eta (-2,0) puntuak harturik, $m=\frac{0-4}{-2-0}=2$
Berdin, (1,6) eta (-1,2) harturik, $m=\frac{2-6}{-1-1}=2$

Zuzen baten ekuazioa

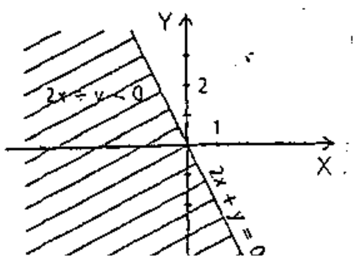
*.- Puntu bat (x_1,y_1) eta malda (m) ezagututa, $y-y_1=m(x-x_1)$
Adibidez, (1,6) puntutik pasatu eta maldaz 2 duen zuzena: y-6=2(x-1) edo y=2x+4

**- Bi puntu ezagututa. Adibidez, (1,6) eta (0,4) puntuetatik pasatzen den zuzena:

$$m=\frac{4-6}{0-1}=2$$

Bietatik puntu bat harturik, esaterako (0,4), zuzenaren ekuazioa: y-4=2(x-0) edo y=2x+4

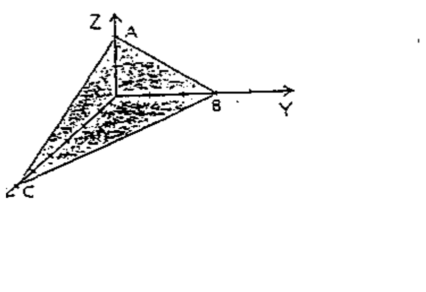
Bi ezezaguneko inekuazio lineal bat. $ax+by+c\leq 0$



Eman dezagun $2x+y<0$ inekuazioa
Soluzioa, *2x+y = 0* zuzenak mugatzen duen *planoerdi bat* da

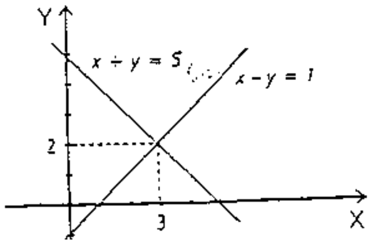
Hiru ezezaguneko ekuazio lineal bat *ax+by+cz+d=0*

x+2y+3z=6 ekuazioak, *plano bat* adierazten du



Bi ezezaguneko ekuazio sistemak . Hiru kasu aztertuko ditugu:

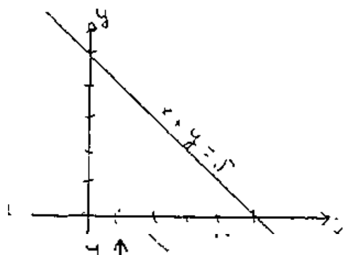
I). $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$



Bi zuzenek (3,2) puntua mozten dute.

$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$ Sistema bateragarria determinatua:

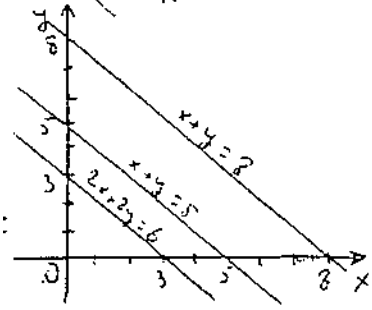
II) $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ 2x+2y=10 \end{array}\right\}$



Bi ekuazioek zuzen bera adierazten dute. $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$

Sistemak infinitu soluzio ditu. Bateragarria indeterminatua

III) $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ 2x+2y=6 \\ x+y=8 \end{array}\right\}$

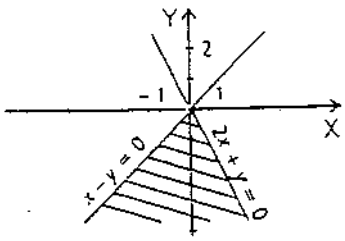


Hiru zuzenak paraleloak eta <u>malda berdinekoak dira</u>; ez dute puntu berdinik

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \neq \frac{5}{6}$ Sistemak ez du soluziorik. Bateraezina

Bi ezezaguneko inekuazio sistemak

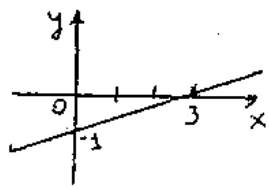
Eman dezagun $\left.\begin{array}{l} 2x+y \leq 0 \\ x-y \geq 0 \end{array}\right\}$



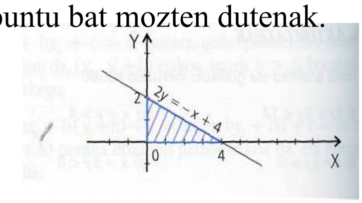
Soluzioa, grafikoki adierazitako puntuen multzoa da

Ariketak

1. *x + 2y – 6 = 0* zuzenak, non mozten ditu ardatz kartesiarrak? Zein da malda?.
2. Zuzen bat (-2,3) puntutik pasatzen da eta bere malda –1 da. Aurki ezazu bere ekuazioa
3. Zuzen bat (1,-2) eta (2,3) puntuetatik pasatzen da. Zein da bere ekuazioa eta malda?
4. Zein da grafikoki adierazten den zuzen honen ekuazioa?



5. Zuzen bat (1,-3) puntutik pasatzen da eta 3x-y+4=0 zuzenaren paraleloa da. Zein da bere ekuazioa?
6. Idatzi bi zuzen paraleloak, bi berdinak eta bi elkar puntu bat mozten dutenak.
7. Esan zein den ebazpen hau duen inekuazio-sistema



Programazio lineala

Programazio linealeko problema batean HELBURU-FUNTZIO deritzon funtzio baten maximo edo/eta minimoa aurkitu nahi ditugu. Funtzio hori, inekuazio gisa adierazten diren baldintza edo murrizketa batzuei lotuta dago

Adibidea 1 Paperdenda bateko arduradunak 1000 lapitz, 3000 boligrafo eta 1500 borragoma ditu salgai. Horiek hobeto saltzeko, bi pakete mota egitea erabaki du:
- "A" motakoan, lapitz bat, bi boligrafo eta borragoma bat daude, eta 1,50 eurotan salduko da.
- "B" motakoan, lapitz bat, hiru boligrafo eta bi borragoma sartuko ditu, eta 2 eurotan salduko da.
Zenbat pakete prestatuko ditu mota bakoitzetik, ahalik eta etekin handiena lortzeko?

Ebazpena:

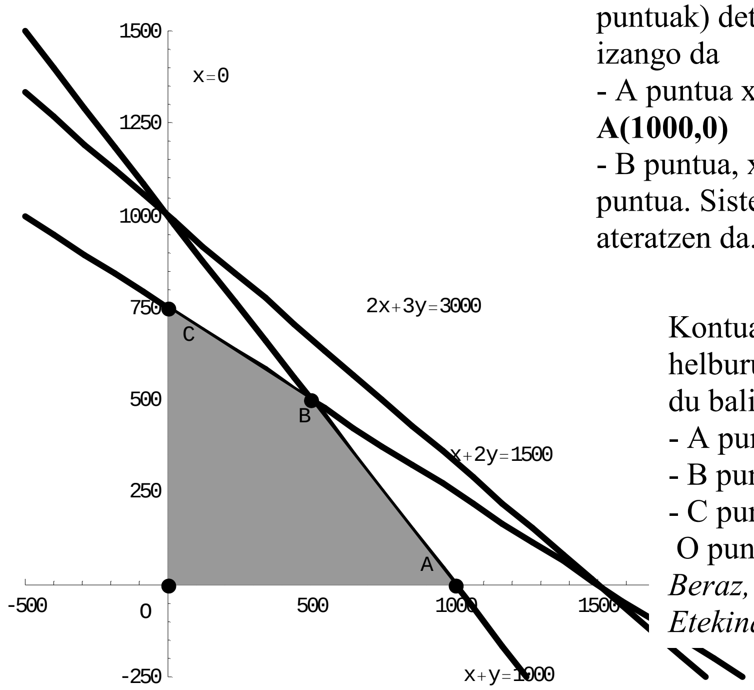
Adieraz ditzagun datuak taula batean:

	Zenbat.pakete?	Z. lapitz?	Z. boli.?	Z. borragoma?
A	x	x	2x	x
B	y	y	3y	2y

Zera da helburu-funtzioa: *F = 1,5 x + 2 y* ; hau da, etekin handiena. Kasu honetan maximizatu egin beharko da, baina kontuan izanik baldintza batzuei lotuta dagoela.

Zeintzu dira baldintza-funtzioak?: $\begin{cases} x+y \leq 1000 \\ 2x+3y \leq 3000 \\ x+2y \leq 1500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Soluzioa, inekuazio-sistema horrek mugatzen duen eskualdean egongo da.
Irudika dezagun beraz, inekuazio-sistema eta markatu soluzioaren eremu posiblea:



Eskualde edo eremu-posiblearen erpinak (A,B,C eta O puntuak) determinatuko ditugu. Soluzioa, horietako puntu bat izango da
- A puntua x+y=1000 zuzenean y=0 eginik -->x=1000. Beraz, **A(1000,0)**
- B puntua, x+y=1000 eta x+2y=1500 zuzenen arteko ebaki puntua. Sistema horren ebazpena eginik, x=4/5 eta y=12/5 ateratzen da. Beraz, **B(500,500)**

Kontuan izan, etekin maximoa eskatzen dela. Beraz, helburu-funtzioak (F=1,5 x + 2 y), zein puntutan hartzen du baliorik handiena?:
- A puntuan, F(A) = 1,5(1000)+2(0) =1500
- B puntuan, F(B) =1,5(500) + 2(500) =**1750**
- C puntuan, F(C) =1,5(0) + 2(750)=1500
O puntuan, F = 0+0 = 0
*Beraz, soluzioa **B = (500 , 500)** puntua*
Etekina: 1750 euro

Adibidea 2 Atleta batek gutxienez A motako hamabi bitamina hartu behar ditu egunero, B motako lau eta C motako zortzi. Merkatuan M1 eta M2 bi pastilla mota dago:
- M1 markakoak, bitamina horiek honenbesteko unitate daramatza: A-tik 3, B-tik 2 eta C-tik 4
- M2 markakoak, aldiz, proportzio honetan: 4, 1 eta 3 unitate hurrenez hurren.

M1 pastilla bakoitzak 10 euro balio badu eta M2-ak 5 euro, zenbat pastila erosi beharko ditu, kostua ahalik eta merkeena izan dadin?

Osatu dezagun ondoko taula:

	Z.pastilla?	Zenbat A?	Zenbat B?	Zenbat C?
M1	x	3x	2x	4x
M2	y	4y	y	3y

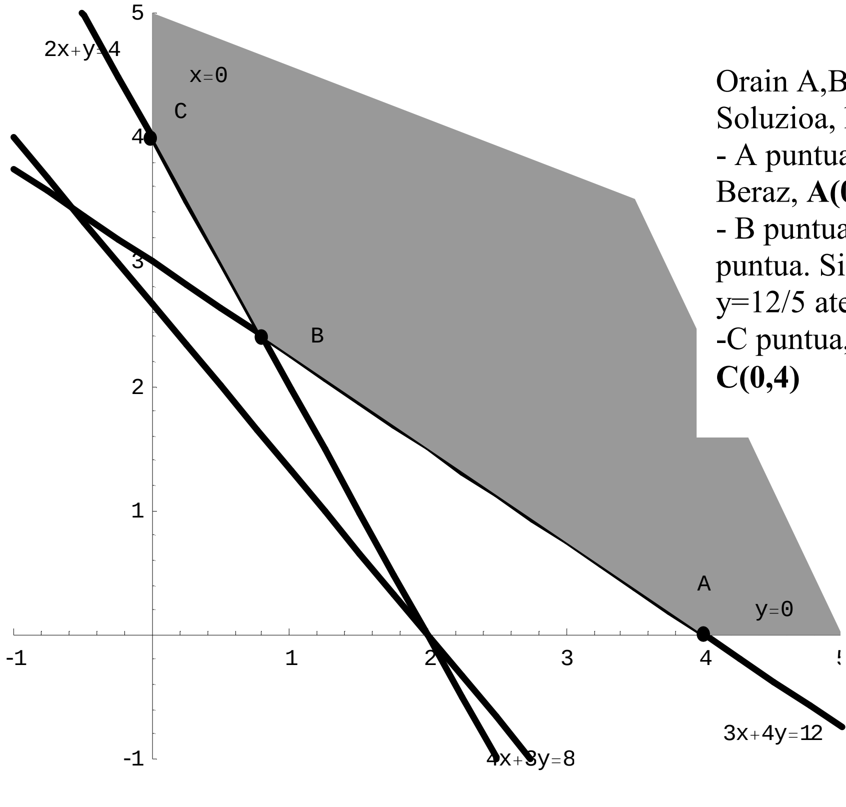
Helburu-funtzioa: F = 10x + 5y

Kasu honetan minimizatu egin beharko da, kostea ahalik eta txikiena izan dadin.

Zeintzu baldintzei dago lotuta helburu-funtzioa?: $\begin{cases} 3x+4y \geq 0 \\ 2x+y \geq 0 \\ 4x+3y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Soluzioa, inekuazio-sistema horrek mugatzen duen eskualdean egongo da

Irudika ditzagun zuzen guzti horiek eta seinalatu eremu posiblea:



Orain A,B eta C erpinak determinatu behar dira. Soluzioa, horietako puntu bat izango da:
- A puntua, 3x+4y=0 zuzenean y=0 eginik -->x=4. Beraz, **A(0,4)**
- B puntua, 3x+4y=12 eta 2x+y=4 zuzenen arteko ebaki puntua. Sistema horren ebazpena eginik, x=4/5 eta y=12/5 ateratzen da. Beraz, **B(4/5,12/5)**
- C puntua, 2x+y=4 zuzenean x=0 eginik, -->y=4. Beraz, **C(0,4)**

Kalkula ditzagun helburu-funtzioaren balioak puntu horietan:
- F(A)=10(4)+5(0)=40
- F(B)=10(4/5)+5(12/5)=**20**
- F(C)=10(0)+5(4)=**20**

Hau da, B eta C-n 20 euro balio du. Beraz, problemak bi erpinetan dituenez minimoa, infinitu ebazpen edukiko ditu, bi puntu horiek lotzen dituen segmentuari dagozkionak,hain zuzen ere; hau da, kirolariak 2x+y=4 ekuazioa betetzen duen edozein pastila-konbinazio hartu ahal izango ditu baldin eta 0<=x<=4/5 bada; adibidez, M1 motako 0 pastila eta M2-ko 4, M1 motako 1/2 pastila eta M2-ko 3, etab.

PROGRAMAZIO LINEALA (ariketak)

1. Enpresa batek laranja eta limoi kaxak prestatu eta enbalatzen ditu merkatuan banatzeko. Enbalajeak 2 euro balio du laranja kaxa bakoitzeko eta 1,5 euro limoi kaxa bakoitzeko. Badakigu enbalaturiko limoi kaxen kopurua ez dela laranja kaxen kopurua baino 200 unitate handiagoa; eta guztita enbalaturiko kaxen kopurua ez dela 600 baino handiagoa, eta limoi kaxena ez dela 200 unitate baino txikiagoa.
   a) Mota bakoitzeko zenbat kaxa enbalatu behar dira kostua ahalik eta txikiena izan dadin?
   b) Jakinik etekina 10 eurooa dela laranja kaxa bakoitzeko, eta 8 eurokoa limoi kaxako, zein izango da orain enbalaturiko kaxen kopurua, etekin maximoa lortzeko?

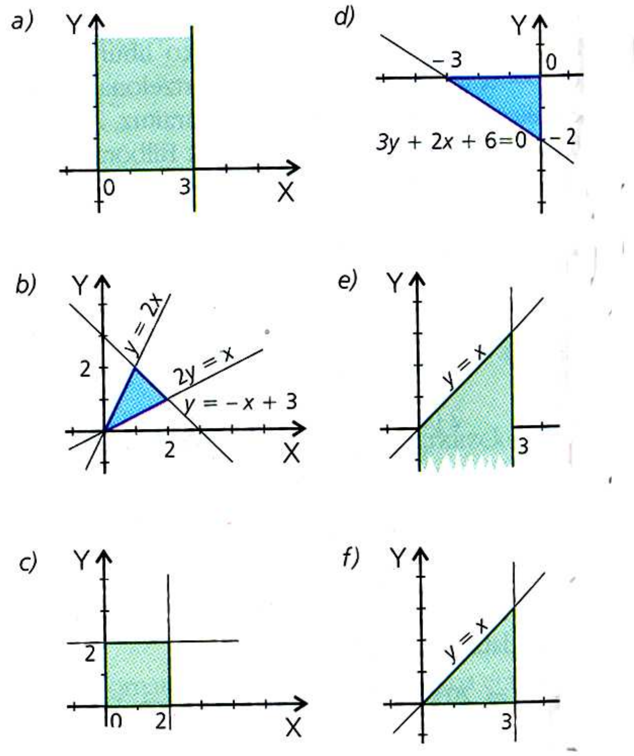
2. Enpresa batek bi meategi ditu, **M** eta **N**.
   Egunero, M meategiak, 200 euroko gastua duenak, kalitate handiko tona bat mineral, kalitate ertaineko 7 tona mineral eta kalitate txikiko 3 tona ekoizten ditu.
   N meategiak, ordea, 300 euroko gastua duenak, egunero, kalitate handiko 4 tona, kalitate ertaineko 3 tona eta kalitate txikiko 3 tona ekoizten ditu
   Enpresak duen gutxienezko eskaria ondokoa da: kalitate handiko 80 tona, kalitate ertaineko 210 tona eta kalitate txikiko 150 tona.
   Zenbat egun egin behar dira lan meategi bakoitzak, kostua minimoa izan dadin?

3. Ardo enpresa batek ardoa eta ozpina produzitzen ditu. Ardo produkzioaren bikoitza beti izaten ozpin produkzioa gehi lau unitate baino txikiagoa edo berdina. Bestalde, ozpin produkzioaren hirukoitza gehi lau bider ardo produkzioa beti izaten 18 unitate baino txikiagoa edo berdina.
   Aurki ezazu gai bakoitzeko zenbat unitate produzitu behar diren etekin maximoa ateratzeko, jakinik ardo unitate bakoitzak 8 euroko etekina ematen duela eta ozpin unitate bakoitzak 2 euroko etekina.

4. Informatika enpresa batean gehienez 60 ordu kalkulu diferentzial kontratatu behar dira. Zehaztasun handiko kalkulua 50 euro ordaintzen da orduko, eta zehaztasun txikiko ordua 30 euro.
   Enpresak dio gutxienez 36 ordu kontratatu behar direla, eta zehaztasun handiko 10 ordu baino ezin direla kontratatu gehienez. Nola egin behar dugu kontratua, kostua ahalik eta txikiena izateko, jakinik gutxienez zehaztasun handiko sei ordu kontratatu behar ditugula.

5. 370 ikasle eraman nahi ditugu txango batera eta horretarako enpresa bateko autobusak alokatuko dira. Enpresak 30 eserlekuko 5 autobus eta 40 eserlekuko 8 autobus ditu, baina 10 gidari bakarrik. Autobus handien alokairuak 70 euro balio du eta txixkienarenak 50 euro. Kalkulatu mota bakoitzeko zenbat autobus behar diren, txangoa ahalik eta merkeena atera dadin.

6. Multzo hauek sistema banaren ebazpen dira. Idatzi sistema horiek:



7. Aurreko galderako multzo bakoitzean, aurki itzazu, baldin badaude, $f(x , y) = x - y$ funtzioaren maximo eta minimoak.

8. Maximiza ezazu beheko murrizketei loturik dagoen $F(x , y) = 3x + 5y$ funtzioa:

$$x + 3y \leq 6 \quad ; \quad 5x + 3y \leq 15 \quad ; \quad x \geq 0 \quad ; \quad y \geq 0$$

9. Abere bati egunero 3000 kaloria eta 80 unitate proteina emango dizkion dieta bat behar dugu. Dieta hori prestatzeko erabil daitezkeen oinarrizko bi elikagai daude merkatuan. *I* elikagaiak 2 euro balio du kilogramoko, eta 600 kaloria eta bi unitate proteina dauzka. *II* elikagaiak euro bat balio du kilogramoko, eta 50 kaloria eta 8 unitate proteina dauzka. Dieta hori bete ahal izateko, zein da eligakaien konbinaziorik merkeena?

10. Petrolio-birfindegi batek petrolio gordinaren bi iturri ditu: petrolio gordin arina, 35 dolarretan kupela, eta petrolio gordin astuna, 30 dolarretan kupela. Gordin arineko kupel bakoitzetik, birfindegiak 0.3 kupel gasolina (G), 0.2 kupel errekai beroketarako (B) eta 0.3 kupel errekai turbinetarako (T) ekoizten ditu; gordin astuneko kupel bakoitzetik, ordea, 0.3 kupel G., 0.4 kupel B. eta 0.2 kupel T. Birfindegiak 900.000 kupel G., 800.000 kupel B. eta 500.000 kupel T.-ren banaketaren hitza eman du. Aurkitu erosi behar duen gordin arinaren eta astunaren kupel kopurua, beharrak kostu minimoaz betetzeko.

11. Aurkitu $z = 5x+2y$ funtzioaren balio maximoa, x eta y aldagaiek ondoko baldintzak bete behar dituztenean:

$$x \geq 0 \quad ; \quad y \geq 0 \quad ; \quad 2x + y \leq 6 \quad ; \quad 4x + y \leq 10 \quad ; \quad y \leq x + 3$$

12. Marraz ezazu honakoak betetzen dituen barruti itxi lau bat: (0 , 0), (1 , 1) eta (1 , 2) puntuak barrutikoak izatea, eta (0 , 2) eta (1 , 0) puntuak ez.
    a) Idatz itzazu hura definitzen duten inekuazioak
    b) Minimiza ezazu $z = 3x - 2y$ funtzioa aipatutako barrutian.

13. Automobil eta kamioientzako karrozeri lantegi batek bi nabe dauzka. *A* nabean kamioi baten karrozeria egiteko zazpi egun behar dituzte langile bakoizeko, eta automobil batena egiteko bi egun langileko. *B* nabean, hiru egun behar dira langileko, kamioien zein automobilen karrozeriak egiteko.
Lan-esku eta makineriako murrizketak direla eta, *A* nabeak 300 egun langileko erabil ditzake, eta *B* nabeak 270 egun langileko. Kamioiek 6000 euroko etekina ematen badute, eta autoek 2000 eurokoa, zenbana unitate produzitu behar dira etekina maximizatzeko?

14. Ganadutegi batek *A* pentsuko gutxienez 24 unitate eta *B* pentsuko gutxienez 25 unitate dituen dieta bat eman nahi die abereei. Merkatuan bi pentsu mota horiekin egindako bi konposatu daude, C_1 eta C_2.
C_1-eko paketeak *A*-ko unitate bat eta *B*-ko bost dauzka, eta euro batean saltzen dira; C_2-koak *A*-ko lau unitate eta *B*-ko bat dauzka, eta 3 euroko prezioa dute.
C_1 eta C_2-ko zer kantitate erabili behar izango ditu ganadutegiak dieta hori kosturik txikienean prestatu ahal izateko?

15. Aire-konpainia batek ibilbide jakin bat egiteko bi hegazkin ditu, *A* eta *B*. Hegazkinen hegaldien kopuruak gutxienez 60 eta gehienez 200 izan behar du. Horrez gain, *A* hegazkinak ezin du 120 hegaldi baino gehiago egin baina gutxienez *B* hegazkinak bezain beste egin behar ditu. *A* hegazkinaren hegaldi bakoitzean erregaiaren kontsumoa 900 litrokoa da eta irabaziak 300 eurikoak dira. *B* hegazkinaren kasuan erregaiaren kontsumoa 800 litrokoa da eta irabaziak 200 eurokoak dira. Zen bat hegaldi egin behar du hegazkin bakoitzak irabazirik handienak lortzeko? Eta erregaiaren kontsumoa minimoa izatea nahi bada?

16. Pertsona batek 200.000 euro dauzka burtsan inbertitzeko, eta bi akzio mota erosi nahi ditu: *A* eta *B*.
A akzioek %8ko etekina ematen dute eta *B* akzioek %10. Zenbait lege murrizketa direla eta, ezin da *A* akzioetan 70.000 euro baino gehiago inbertitu, eta *B* motakoetan gutxienez 30.000 euro inbertitu beharra dago. Inbertsiogileak gutxienez *B* motako beste *A* motako akzio erosi nahi baditu, nola inbertitu behar du etekinik handiena lortzeko?

17. Jostun batek *A* motako 80 m^2 oihal du eta *B* motako 120 m^2. Gizonezkoen traje baterako *A* oihaleko 1m^2 eta *B* oihaleko 3m^2 behar dira eta emakumezkoen jantzi baterako 2m^2 oihal mota bakoitzetik. Traje baten salmentak jostunari utzitako irabazia jantzi baten salmentak utzitakoaren berdina bada, kalkulatu zenbat traje eta jantzi egin behar ituen irabazi maximoa lortzeko.

18. 60 hektareako lursaila duen batek pinuak eta urkiak landatu nahi ditu bertan. Pinu hektarea bakoitzak 460 euroko gastuak ditu urtean, eta urkiak hektareako 700 euro. Pinuaren egur kiloa 0´3 eurotan saltzea espero du, eta hektarea bakoitzeko batezbeste 4000 kilo zur produzitzea; bestalde, urkiaren egur kiloa 3 eurotan saldu nahi du hektareako batezbeste 400 kilo produzituta.
Zenbat hektarea pinu eta zenbat urki landatu behar ditu etekin maximoa ateratzeko, jakinik urki baino pinu hektarea gehiago landatu nahi dituela, baina gutxienez 10 hektarea urki.

GARRAIOAREN PROBLEMA

1. Baserrita*r* batek bi papata biltegi dauzka A_1 eta A_2, eta horietan 20 eta 12 tona patata daude, hurrenez hurren.
   C_1, C_2 eta C_3, hiru bezeroak 8, 10 eta 14 tonako eskariak egin dizkiote baserritarrari.
   Biltegien eta bezeroen arteko distantziak kilometrotan kontutan hartuta, taula honetan pataten kostoa adierazten da tonako:

	C_1	C_2	C_3
A_1	2	3	4
A_2	6	2	4

   Nola banatu beharko ditu patatak, garraioaren kostua ahalik eta txikiena izateko?

   Ebazpena
   Osa dezagun koadro bat A_1 eta A_2 biltegietatik C_1, C_2 eta C_3–ra eraman behar den patata kantitateekin. Horretarako, A_1-etik C_1-erako tona kopuruari x deitzen diogu, eta A_1-etik D_1-erakoei y:

	C_1 (8 tn)	C_2 (10 tn)	C_3 (14 tn)
A_1 (20 tn)	x	y	
A_2 (12 tn)			

   Bete koadroa, lortu helburu-funtzioa, idatzi inekuazio baldintzak (denak positiboak) eta egin kalkulua.

2. Supermerkatu kate batek bi biltegi dauzka, bat Elorrion eta bestea Irunen, eta horietatik salgaiak bidaltzen ditu Bilbo, Gasteiz eta Donostiako supermerkatuetara. Badakigu kate honek 2500na salgai dauzkala biltegietako bakoitzean, eta Bilbok 2000 behar dituela, Gasteizek 1800 eta Donostiak 1200.
   Esan nola egin behar den banaketa, kostua minimoa izan dadin, salgai bakoitzeko bidalketa-kostua taula honetan ageri dena baldin bada:

	Bilbo	*Gasteiz*	*Donostia*
Elorrio	15	10	18
Irun	10	15	20

3. *A* eta *B* mehategietatik 2000 eta 3000 kg. urre ateratzen da urtean, hurrenez hurren. Mineral hau *C, D* eta *E* hiru tratamendu-lantegietara eraman behar da, baina lantegi horiek ezin dute urtean 500, 3500 eta 1000 kg. baino gehiago tratatu.
   Garraioaren kostua, eurotan-kiloko, taula honetan adierazten da:

	C	*D*	*E*
A	10	20	30
B	15	18	20

   Nola banatu behar da minerala, garraioaren kostua ahalik eta txikiena izan dadin?