Giza eta Gizarte Zientziak

Matematika I

3. ebaluazioa

FUNTZIOAK

Ignacio Zuloaga BHI (Eibar)

FUNTZIOAK (I)

Funtzio batek bi aldagaien menpekotasuna adierazten du:

- Etxebizitzaren *prezioa* etxearen *azaleraren* funtziopean dago.
- Esfera baten *bolumena* bere *erradioaren* menpekoa da.
- ....

Bi aldagai erlazionatzen dira, bat **independentea** (x) eta bestea **dependentea** edo **menpekoa** (y).

Funtzioak **f, g, h...**letrez adierazten dira.

y=f(x) idazkerak “*y*” aldagaia “*x*”-ren menpe dagoela esan nahi du.

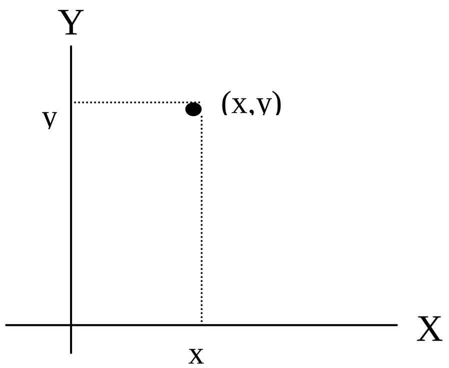
Grafikoa

Funtzioak koordenatu-ardatzetan irudikatzen dira.

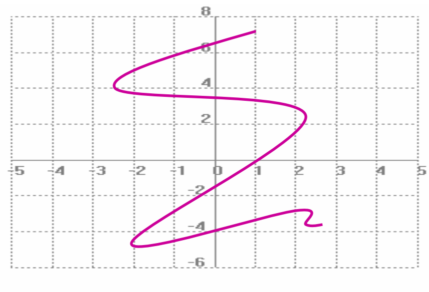
Abzisa-ardatzean *x*-ren balioen multzoa adieraziko dugu, eta ordenatu-ardatzean $y = f(x)$ funtzioaren balioen multzoa.

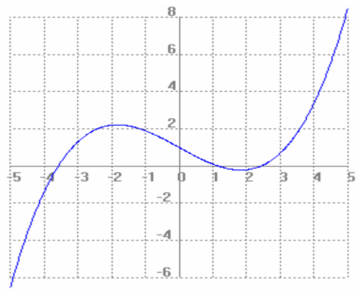
“x”-en balio bakoitzari “y” bakarra dagokio.

(x,y) bikoteak funtzioaren marraren puntuak dira.

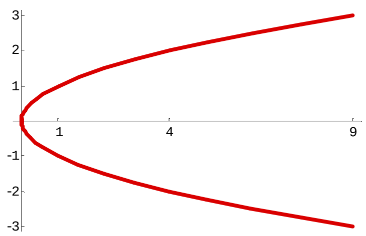


Ezkerrekoa ez da funtzioa , eskuinekoa bai

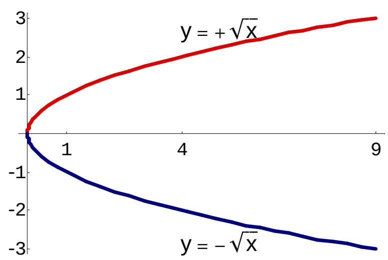




Ez da funtzioa:



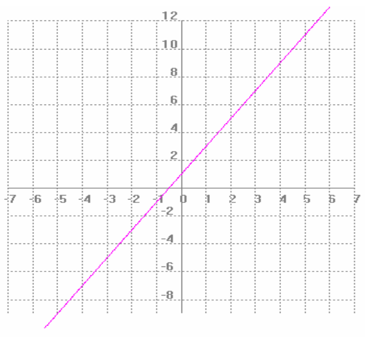
Bi funtzio dira:



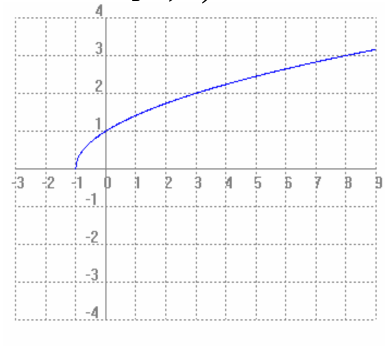
x-k har ditzakeen balioen multzoari funtzioaren **existentzi-eremua** esaten zaio, eta **D(f)** eran adieraziko dugu. Adibidez, $y = \frac{3}{1-x}$ funtzioan *x*-k ezin du 1 balioa hartu; beraz, definizio-eremua $R - \{1\}$ da.

Funtzioak (*y*) hartzen dituen balio guztien multzoari **ibiltartea** esaten zaio. Adibidez, $y = x^2$ funtzioaren ibiltartea $[0\,,\infty)$ da.

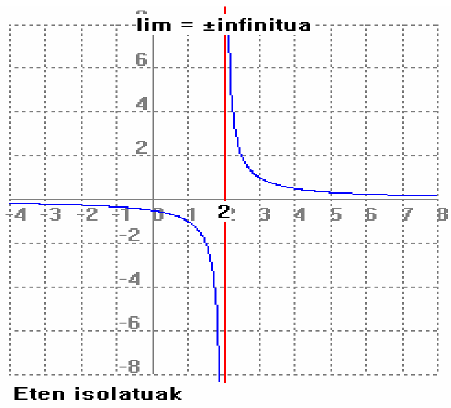
y = 2x+1 funtzioaren existentzia-eremua *R* da



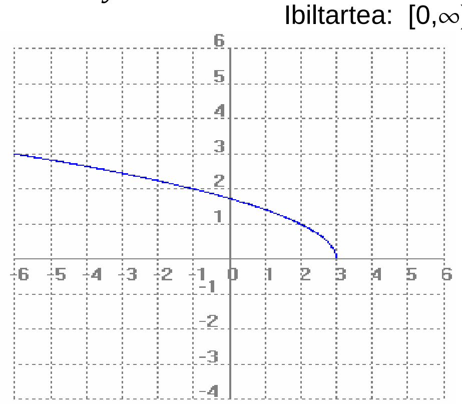
$y = \sqrt{x+1}$ *funtzioaren* eremua $[-1,\infty)$ da.



$y = \frac{1}{x-2}$ Eremua: R - {2}
Ibiltartea: R - {0}



$y = \sqrt{3-x}$ Eremua: (- ∞ ,3]
Ibiltartea: [0,∞)



<u>Ariketa.</u>

Aurki itzazu ondoko funtzioen existentzia-eremua:

$a)\ f(x) = x^2 - 1 \qquad b)\ f(x) = \frac{1}{x} \qquad c)\ f(x) = \frac{x}{x+1} \qquad d)\ f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

$e)\ f(x) = \frac{x-1}{x^2-100} \qquad f)\ y = \frac{5}{x^2+100} \qquad g)\ y = \frac{x^2-100}{5} \qquad h)\ y = \frac{x-1}{x^2-6x+5}$

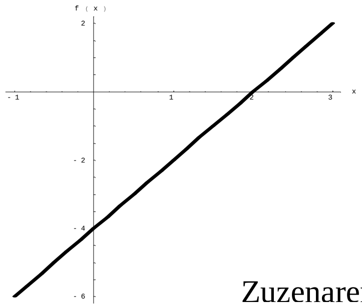
$i)\ y = x^3 - 4x \qquad j)\ f(x) = +\sqrt{4-x} \qquad k)\ f(x) = +\sqrt{x-1} \qquad l)\ y = \sqrt{x^2-9}$

$m)\ y = \sqrt{9-x^2} \qquad n)\ y = \sqrt{x^2+2x-3} \qquad o)\ y = +\sqrt{3-2x-x^2} \qquad p)\ y = \frac{1}{+\sqrt{x+2}}$

1. mailako funtzio polinomikoak: y =ax+b (zuzenak)

a, zuzenaren malda da.
b=0 denean, zuzena (0,0) puntutik pasatzen da.

y=2x-4 funtzioaren grafikoa:



x	y
0	-4
2	0

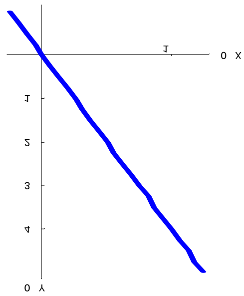
Aski da ondoko bi puntu ezagutzea:

- Non mozten du 0X ardatza? y = 0 eginda x = 2 ateratzen da; beraz, A(2,0) puntuan mozten OX ardatza.
- Eta 0Y ardatza? x = 0 eginda y = -4 ; hau da, B(0,-4) puntuan.

Zuzenaren malda:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-(-4)}{2-0}=2$$

y = 4x

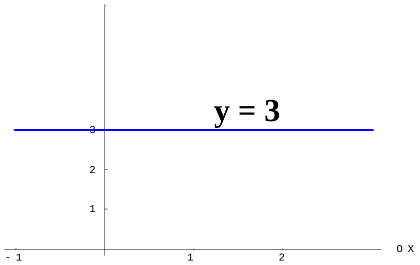


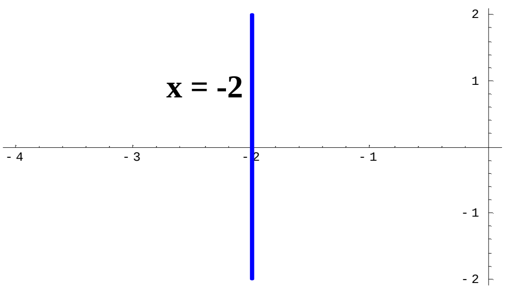
malda = 4 eta b = 0

x	y
0	0
1	4

OX ardatza **y = 0** zuzena da, eta OY ardatza **x = 0** zuzena.

y = k zuzena, horizontala da; **x= k** , ordea, bertikala.



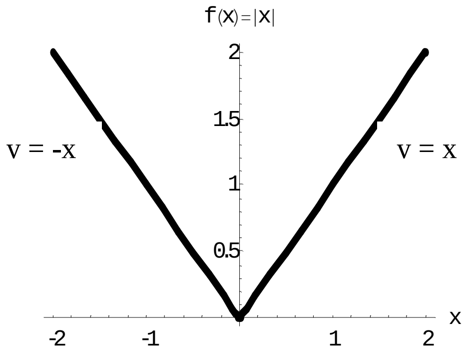


Balio absolutuak

y = | x |

$$y=|x|=\begin{cases} x & ; \; x\geq 0 \\ -x & ; \; x<0 \end{cases}$$

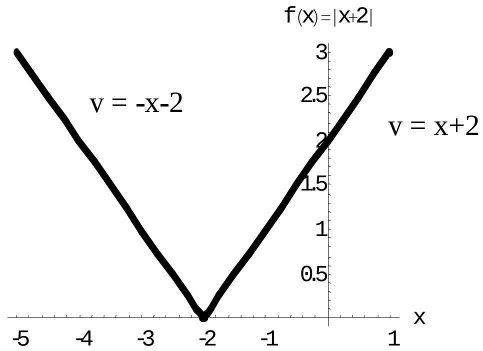
x	y
0	0
-1	1
-2	2
1	1
2	2



y = | x + 2 |

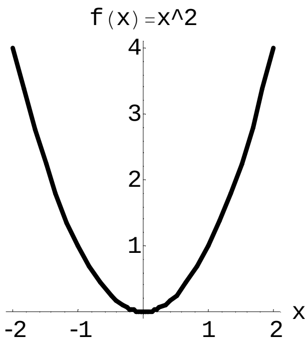
$$y=|x+2|=\begin{cases} x+2 & ; \; x\geq -2 \\ -(x+2) & ; \; x<-2 \end{cases}$$

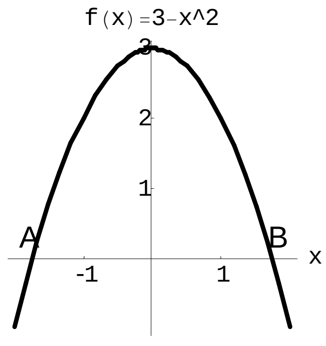
x	y
-2	0
-1	1
0	2
-3	1
-4	2

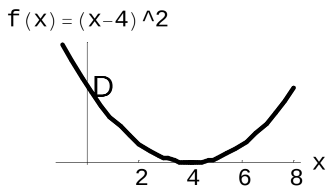


2. mailako funtzio polinomikoak: $y = ax^2 + bx + c$ (parabolak)

$y = x^2$; $y = 3 - x^2$; $y = (x-4)^2$



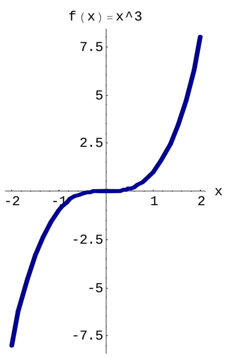




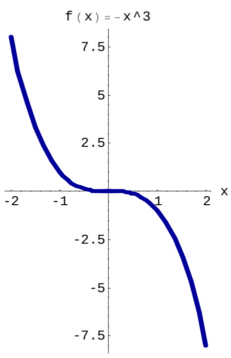
Zeintzu dira A,B eta D puntuak?

3. mailako funtzio polinomikoak

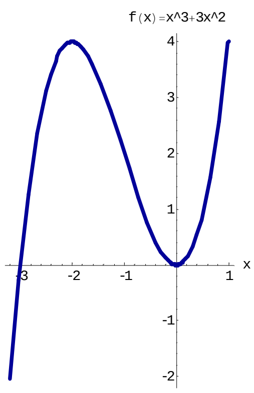
$y = x^3$



$y = -x^3$



$y = x^3 + 3x^2$

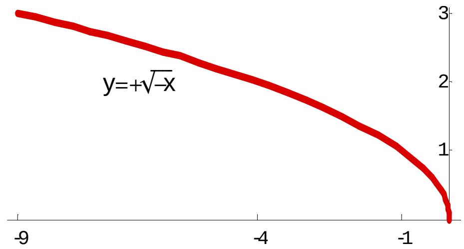


1. mailako funtzio irrazionalak

$$y = \sqrt{-x}$$

Existentzia-eremua: $\{x \le 0\}$

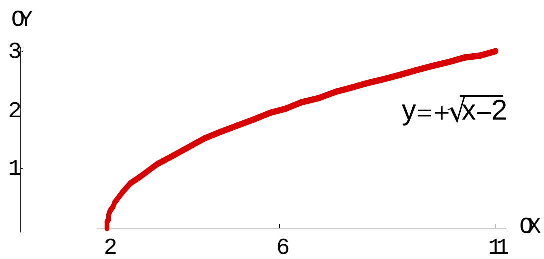
x	y
0	0
-1	1
-4	2



$$y = \sqrt{x-2}$$

Existentzia-eremua: $\{x \ge 2\}$

x	y
2	0
6	2
11	3



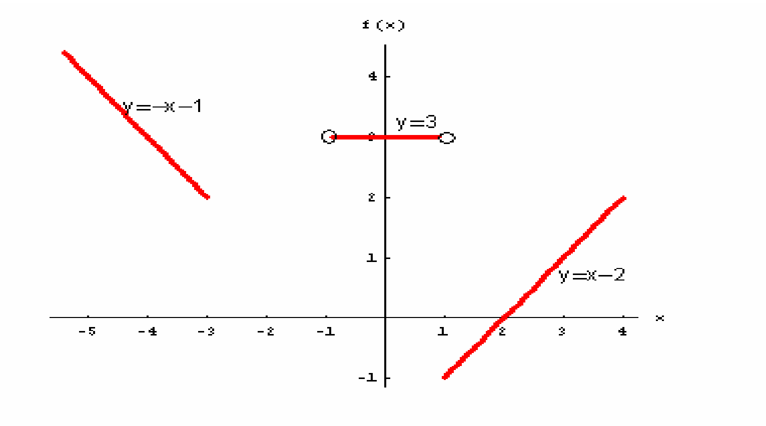
Zatika definituriko funtzioak

$$y = \begin{cases} -x-1 & \text{baldin } x \le -3 \\ 3 & \text{baldin } -1 < x < 1 \\ x-2 & \text{baldin } x \ge 1 \end{cases}$$

$x \le -3$ denean, $y = -x-1$ zuzena irudikatzen da.

x	y
-3	2
-4	3

-1<x<1 denean, y = 3 zuzen horizontala.



$x \ge 1$ denean, $y = x-2$ zuzena.

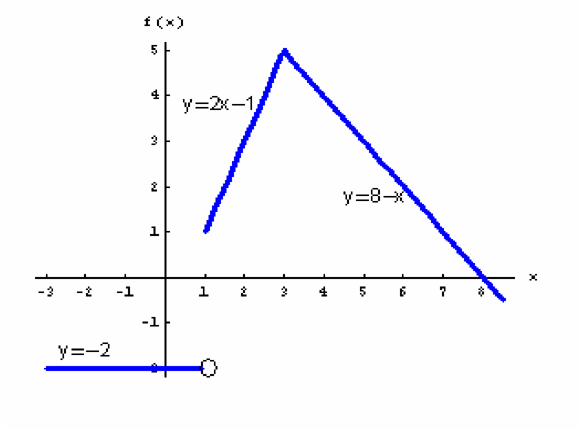
x	y
1	-1
2	0

$$y=\begin{cases}-2 & ; \quad x<1\\ 2x-1 & ; \quad 1\le x<3\\ 8-x & ; \quad x\ge 3\end{cases}$$

$x<1$ denean, $y=-2$ zuzena irudikatzen da.

$1\le x<3$ denean, $y=2x-1$ funtzioa.

x	y
1	1
2	3
2,999	4,998



$x\ge 3$ denean, $y=8-x$ funtzioa.

x	y
3	5
8	0

Ariketak

1. Adierazi grafikoki ondoko funtzioak:

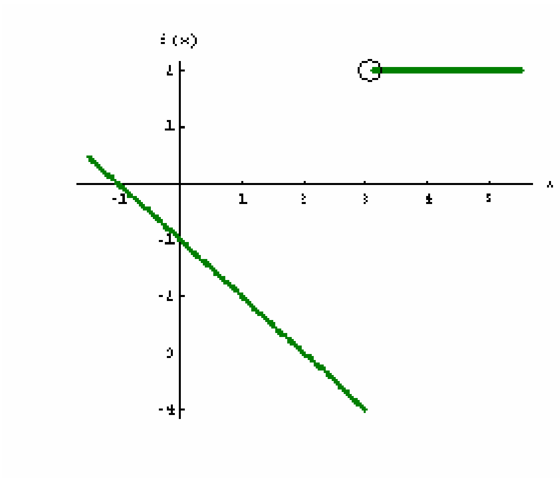
$$y=\begin{cases}-1 & ; \quad x\le 0\\ 2x & ; \quad 0<x<1\\ 2-x & ; \quad x\ge 1\end{cases}$$

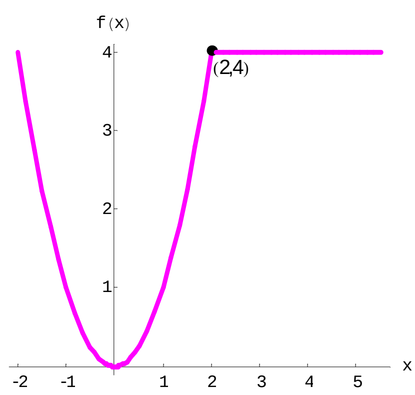
$$y=\begin{cases}2+x & ; \quad -2\le x\le 0\\ 1-x^2 & ; \quad 0<x\le 2\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}1-x & \text{baldin} \quad x\le 0\\ x^2 & \text{baldin} \quad x>0\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}-x & ; \quad x<0\\ 2 & ; \quad 0\le x<2\\ 2x-2 & ; \quad x\ge 2\end{cases}$$

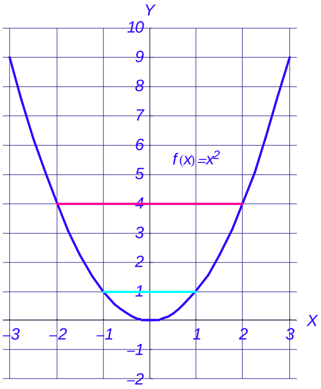
2. Zein da funtzio hauen adierazpen analitikoa?





Simetriak

➢ Simetria 0Y ardatzari begira

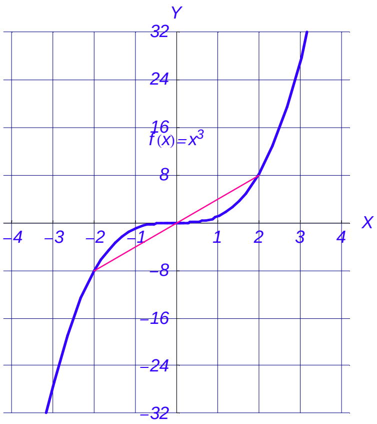


f simetrikoa da **y ardatzari** begira *x* eta –*x*ek irudi berdina dutenean, hots,
f(x)= f(-x) denean

Adibidez:
- 2 → 4 eta -2 → 4
- 1 → 1 eta -1 → 1

Mota horietako funtzioak **funtzio bikoitiak** direla esaten da.

➢ Simetria (0,0) puntuari begira

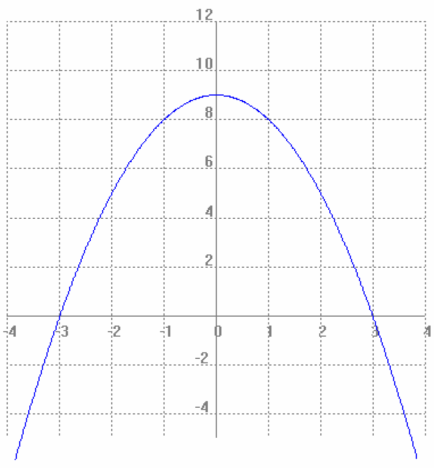


f simetrikoa da (0,0) **puntuari** begira x eta –xek irudi aurkakoa dutenean, hots, **f(x)=- f(-x)** denean

- 2 → 8
- - 2 → -8

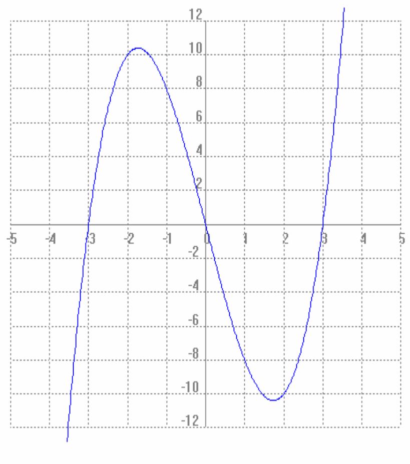
Mota horietako funtzioak **funtzio bakoitiak** direla esaten da.

Ariketak. Simetria, existentzia-eremua, ibiltartea



Aukeratu erantzuna

- Simetria
  - (0,0) puntuari begira
  - Bakoitia
  - Bikoitia
  - Y ardatzari begira
- **Existentzia- eremua**
  - (- ∞, 9]
  - (-∞, ∞)
- **Ibiltartea**
  - (- ∞, 9]
  - (-∞, 0)



Aukeratu erantzuna

- Simetria
  - Bakoitia
  - Bikoitia
  - Y ardatzari begira
  - (0,0) puntuari begira
- **Izate- eremua**
  - (-11, 11]
  - (-∞, ∞)
- **Irudi multzoa**
  - (- 3, 3]
  - (-∞, 0)
  - *R*

Aztertu funtzio hauen simetriak:

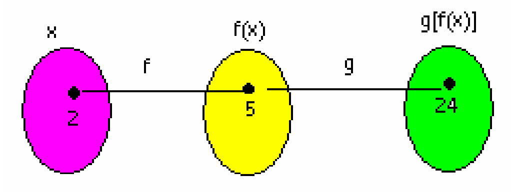
$a)\ y = x^4 - 3x^2 + 1$; $b)\ y = x^3 - 1$

$c)\ y = x^3 - x$; $d)\ y = \frac{1}{x}$; $e)\ y = \frac{1}{x^2}$

Funtzioen konposizioa

Har ditzagun $f(x) = x+3$ eta $g(x) = x^2-1$ funtzioak eta zenbaki erreal bat, x = 2 adibidez. Lehenik, 2 balioaren *f* bidezko irudia kalkula dezakegu, eta horrela $f(2) = 5$ lortuko dugu, eta jarraian *g* bidezko irudia; hau da: g(5) = g(f(2)) = 24

$2 \rightarrow f(2) = 5 \rightarrow g(f(2)) = 24$



Oro har, *f* eta *g* funtzioak emanik, *x* balioari **g(f(x))** balioa egokitzen dion funtzioari **f-ren eta g-ren funtzio konposatua** deritzo eta **g o f** eran idazten da.

$$x \rightarrow f(x) \rightarrow g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

Eragiketa honetan *g* funtzio bat , *f(x)* beste funtzio baten emaitzaren gain aritzen da.

Adibidea :

Eman ditzagun $f(x) = \sqrt{x}$ eta $g(x) = x^2 - 1$ funtzioak. Kalkula ditzagun *(g o f)(x)* eta *(f o g)(x)* funtzio konposatuak.

- $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$
- *(f o g)(x)* kasuan, *f* funtzioa *g*-ren emaitzari aplikatu behar zaio:
  $x \rightarrow g(x) \rightarrow f(g(x))$. Hau da, $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x^2-1] = \sqrt{x^2 - 1}$

(f o g) eta (g o f) ez dira berdinak

Ariketak

1. $f(x) = 2x+1$ eta $g(x)= x^2$ izanik , kalkula itzazu *f o g* eta *g o f* funtzio konposatuak . Betetzen al da trukatze propietatea?

2. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ eta $g(x) = x^3$ izanik, kalkula itzazu *(f o g)(2)* eta *(g o f)(2)*

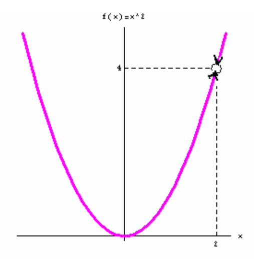
3. Egiazta ezazu $y = (4x^2 - 1)^{10}$ funtzioa funtzio konposatua dela. Horretarako,har itzazu $f(x)=x^{10}$ eta $g(x)=4x^2 -1$ funtzioak eta kalkulatu *(f o g)(x)*.

Limiteak

Funtzio baten limitea puntu batetan

<u>*1. adibidea.*</u> Demagun $f(x) = x^2$ funtzioa.

x aldagaiari 2tik hurbileko balioak emanez, zein zenbakitara hurbiltzen da $f(x)$ funtzioa? Ideia zehazteko bi taula hauek landuko ditugu:



Ezker aldetik (2^-)

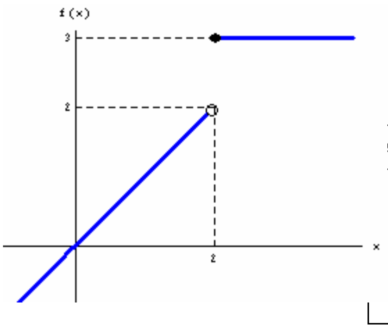
$x \to 2^-$	f(x)
1	1
1,9	3,6
1,99	3,96
1,999	3,996
…	…

Eskuinetik (2^+)

$x \to 2^+$	f(x)
3	9
2,1	4,4
2,01	4,04
2,001	4,004
…	…

x-a 2-ra hurbiltzen denean ezker zein eskuin aldetik, $f(x)$ funtzioa 4 baliora hurbiltzen da. Honela idatziko ditugu: $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

<u>*2. adibidea*</u>. Azter dezagun $f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x < 2 \\ 3 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$ funtzioa



Orain x 2-ra hurbiltzen denean, zein baliotara hurbiltzen da $f(x)$? Osa ditzagun taulak:

$x \to 2^-$	f(x)
1	1
1,9	1,9
1,99	1,99
1,999	1,999
…	…

$x \to 2^+$	f(x)
3	3
2,1	3
2,01	3
2,001	3
…	…

Kasu honetan, $f(x)$-ren balioak ez dira zenbaki finko batetara hurbiltzen:

- ezker aldetik 2-ra; hau da, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$
- eskuinetik 3-ra; hau da, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$

Albo-limiteak desberdinak direnez, ez du limiterik $x = 2$ puntuan; hots, ez dago $\lim_{x \to 2} f(x)$

Funtzio batek $x = a$ puntu batean limitea izango du baldin albo-limiteak berdinak direnean; hau da: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

$\boxed{\text{Limitea existitzen bada, bakarra da. Ezin ditu bi balio ezberdin hartu}}$

3. adibidea.

Demagun $f(x)=\begin{cases}4 & ; \quad x\le -1\\ x^2+2 & ; \quad -1<x\le 2\\ 8-x & ; \quad x>2\end{cases}$ funtzioa.

Kalkula ditzagun $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ eta $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$a)$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=4$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=(-1)^2+2=3$ $\Rightarrow$ Ez dago $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

$b)$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2^2+2=6$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=8-2=6$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=6$

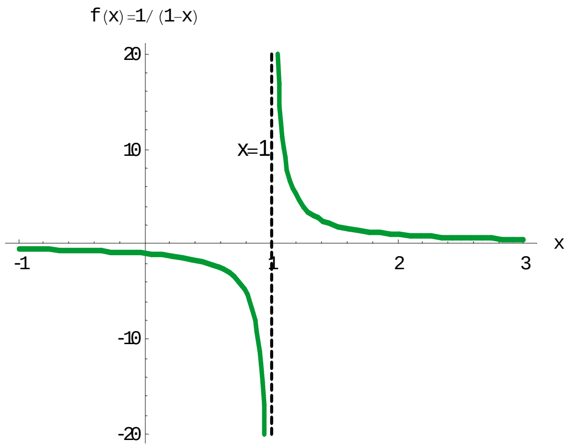
Limite infinituak puntu batean. Limiteak infinituan.

1.adibidea.

Saia gaitezen $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ funtzioaren limitea kalkulatzen $x_0=1$ abzisako puntuan.
Kontura zaitez ezen puntu horretan anulatu egiten dela frakzioaren izendatzailea.
Osa ditzagun $x_0=1$ puntuaren alboetako bi taulak:

$x\to 1^-$	0,9	0,99	0,999	...
f(x)	-10	-100	-1000	...

$x\to 1^+$	1,1	1,01	1,001	...
f(x)	10	100	1000	...



x-a 1-era hurbiltzen denean ezker aldetik *f(x)* funtzioak $-\infty$ rantz jotzen du; ordea, eskuin aldetik $+\infty$ -rantz. Honela idatziko dugu:

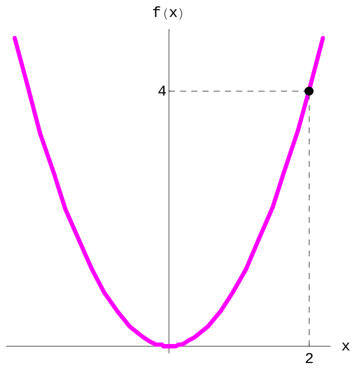
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ eta $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

$\Rightarrow$ Ez dago $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Kasu honetan *f(x)* kurbak **asintota bertikal bat du x_0 = *1* abzisako puntuan**

2. adibidea.

Eman dezagun *f(x)* = x^2 funtzioa.

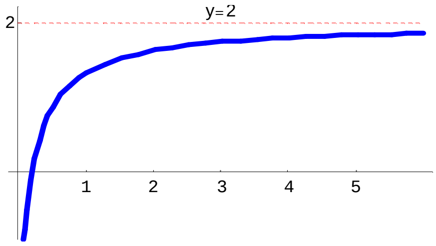


x-ren balioak zenbat eta handiagoak izan, *f*-ren balioak hainbat eta handiagoak egiten dira, eta ez dira hurbiltzen inolako zenbaki errealetara. Limitea plus infinitu dela esango dugu, eta honelaxe adieraziko dugu:

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

Kasu honetan, x-ak minus infinitura jotzen badu gauza bera gertatzen da: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$

<u>*3. adibidea*</u>.



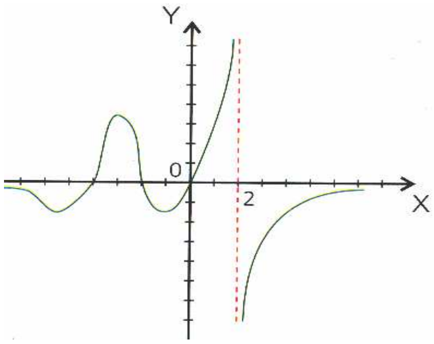
Alboko grafikoan ikusten dugunez, *x*-ren balioak zenbat eta handiagoak izan *f*-ren balioak hainbat eta hurbilago daude *2*-tik. Honela adieraziko dugu:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

Kasu honetan *f(x)* kurbak **asintota horizontala du $y_0 = 2$ ordenatu-puntuan**

<u>*4. adibidea*</u>.

Grafiko horretan, ohar zaitez limite hauetaz:

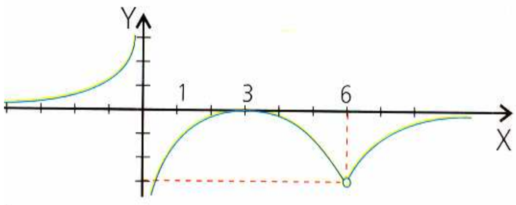


$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = 0$$

Funtzio horrek asintota horizontala dauka (y=0 zuzena) eta asintota bertikal bat ere (x=2 zuzena).

Ariketa. Demagun ondoko grafikoa. Kalkula itzazu:



$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

$$\lim_{x\to6} f(x)$$

$$\lim_{x\to3} f(x)$$

Limiteen kalkulua

$$\lim_{x\to-2}(x^2+2) = (-2)^2+2 = 6 \quad ; \quad \lim_{x\to2}\frac{x^2-x+2}{x+2} = \frac{2^2-2+2}{2+2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{5-x} = \frac{0}{5} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{5} = \frac{(\infty)^2-2}{5} = +\infty$$

Batzuetan, *x* ordezkatu eta gero, honelako emaitzak agertzen dira:

$$\frac{k}{0} \;;\; \frac{0}{0} \;;\; \frac{\infty}{\infty} \;;\; \infty-\infty \;;\; 1^{\infty} \;;\; 0^0 \text{ edo } 0.\infty$$

Horiek dira INDETERMINAZIO kasuak. Soluzioa aurkitzeko, nori bere bidea jarraitu behar zaio

a) $\frac{k}{0}$.

Kasu horretan, limitearen balioa $+\infty$ edo $-\infty$ da.

Adibidez, $f(x)=\frac{4}{x-3}$ funtzioan:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{4}{x-3}\left[=\frac{4}{-0{,}00000...}=\frac{+}{+}\right]=-\infty \quad \text{eta} \quad \lim_{x\to 3^+}\frac{4}{x-3}\left[=\frac{4}{+0{,}00000...}=\frac{+}{+}\right]=+\infty$$

Asintota bertikala izango du x=3 abzisako puntuan.

Ariketa.Zenbat da $\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{2-x}$ eta $\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{2-x}$?

b) $\frac{0}{0}$ indeterminazioa.

1. adibidea. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ kasuan $\frac{0}{0}$ ateratzen da

Indeterminazio horri soluzioa aurkitzeko, faktoreetan deskonposatu behar dira zenbakitzailea eta izendatzailea, eta ondoren sinplifikatu.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1).(x^2+x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=1^2+1+1=3$$

2. adibidea. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x-6}$

Berriro ere $\frac{0}{0}$. Sinplifika dezagun eta lortu bere soluzioa:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x-6}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3).(x-3)}{2(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{2}=\frac{3+3}{2}=3$$

3. adibidea. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-7x^2+6x}{1-x}$

x=1 eginda $\frac{0}{0}$ ateratzen da.

Zenbakitzailea faktoreetan deskonposatzeko Ruffiniren metodoa erabili daiteke:

	1	-7	6	0
1		1	-6	0
	1	-6	0	0

$x^3-7x^2+6x=(x-1).(x^2-6x)$. Beraz:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-7x^2+6x}{1-x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x^2-6x)}{-(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x}{-1}=\frac{1^2-6.1}{-1}=5$$

Ariketa.Kalkula itzazu:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-10x+25}{5-x} \quad ; \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10} \quad ; \quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^3-7x^2+16x-12}$$

c) $\frac{\infty}{\infty}$ indeterminazioa. Baldin funtzioa $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a\,x^m+...}{b\,x^n+...}$ bada, hiru kasu hauek gerta daitezke:

- **m** > **n** izatea. Orduan, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$. Adibidez,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+1}{2x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}=+\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+2x-x^3}{5x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{5x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{5}=-\infty$$

- **m** < **n** izatea. Kasu honetan limitearen balioa 0 da. Esate baterako,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{5x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{5x}=\frac{2}{\infty}=0$$

- **m = n** izatea. Orduan, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{a}{b}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x+1}{5x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{5x^3}=\frac{4}{5}$$

Ariketa.Kalkula itzazu:

$a)\lim_{x\to 0}\frac{x^2-5x^3}{7x}$ $b)\lim_{x\to 0}\frac{x^2-5x^3}{7x^2}$ $c)\lim_{x\to 0}\frac{x^2-5x^3}{7x^3}$ $d)\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x^3}{7x^3}$

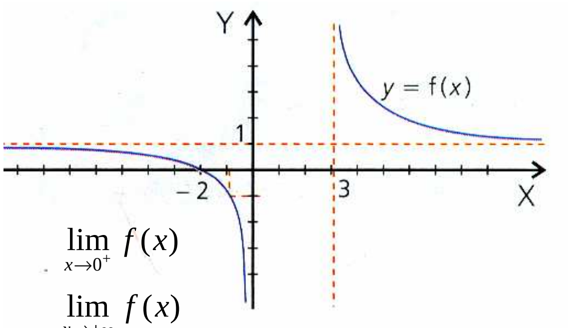
$e)\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x^3}{7x^2}$ $f)\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x^3}{7x}$ $g)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{x+1}\right)^{2x}$ $h)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{5x+1}\right)^{2x}$

$i)\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+3}{9x^2}}$ $j)\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x+3}{x^2}}$ $k)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+7x^2}}{2x+\sqrt{x}}$ $l)\lim_{x\to\infty}5^{1-x}$ $m)\lim_{x\to-\infty}5^{1-x}$

ARIKETAK

1. $f(x)=\begin{cases} 3-x & ; \quad x<1 \\ 2 & ; \quad 1\le x\le 3 \\ x+1 & ; \quad x>3 \end{cases}$ funtzioa emanda, kalkula itzazu $\lim_{x\to 1} f(x)$ eta $\lim_{x\to 3} f(x)$

2. Demagun $f(x)$ funtzioaren grafikoa.



Kalkulatu:

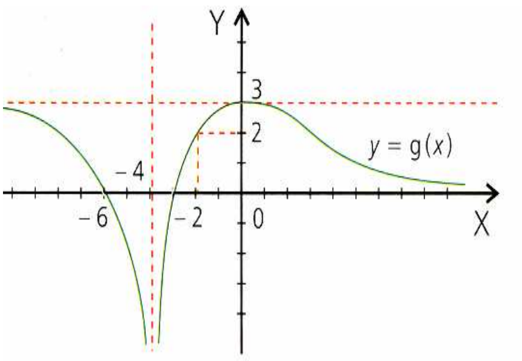
$\lim_{x\to -2} f(x)$; $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

$\lim_{x\to 3^+} f(x)$; $\lim_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

$f(0)$; $f(-2)$; $f(3)$

Zein zuzen du asintotatzat?

3. Demagun g(x) funtzioaren grafikoa.



Kalkula itzazu:

$\lim_{x\to -6} g(x)$; $\lim_{x\to -4^-} g(x)$

$\lim_{x\to -4^+} g(x)$; $\lim_{x\to -2} g(x)$

$\lim_{x\to 0} f(x)$; $\lim_{x\to -\infty} g(x)$

$\lim_{x\to +\infty} g(x)$; $g(0)$

$g(-4)$; $g(-6)$

4. Kalkula itzazu:

$a)\lim_{x\to\infty}(1-x+2x^3)$ $\quad b)\lim_{x\to\infty}(1+x-2x^3)$ $\quad c)\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{1-x}$ $\quad d)\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}$

$e)\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{1+x}$ $\quad g)\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x^2-4x+4}$ $\quad h)\lim_{x\to 3^-}\frac{2}{3-x}$ $\quad i)\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{4-x^2}$

$j)\lim_{x\to\infty}\frac{5x-1}{1+x^2}$ $\quad k)\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$ $\quad l)\lim_{x\to\infty}5^{-2x}$ $\quad m)\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{4x}$

$n)\lim_{x\to\infty}\frac{x+4x^3}{7+x^2}$ $\quad o)\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x^3-3x^2+3x-1}$ $\quad p)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x-1}\right)^{x+2}$ $\quad q)\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{5x^2}{1+2x^2}}$

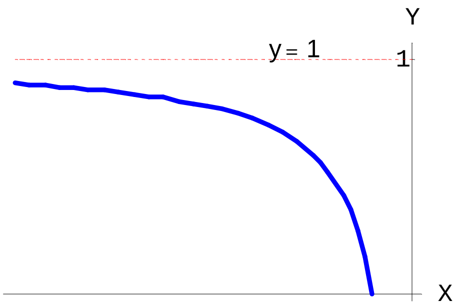
$r)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-\frac{3x^2+1}{3x}\right)$ $\quad s)\lim_{x\to -\infty}2^x$ $\quad t)\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2}{x+1}}$ $\quad u)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x-1}\right)^{2-x}$ $\quad v)\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{5x^2+1}}$

Adar infinituak. Asintotak

Adar infinitu bat zuzen batera hurbiltzen denean, zuzenari kurbaren **asintota** esaten zaio.

Asintota horizontalak

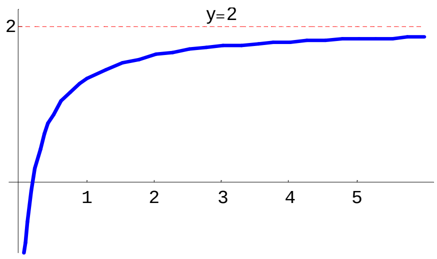
Behatu ondoko funtzioen adierazpen grafikoa:



Grafikoa *y = 1* zuzenera hurbiltzen da *x* aldagaia $-\infty$ rantz doanean. Hau da,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

y = 1 zuzena *f* funtzioaren asintota horizontala dela esaten da.



Grafikoa *y = 2* zuzenera hurbiltzen da *x* aldagaia $+\infty$ rantz doanean. Hau da,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

y = 2 zuzena *f* funtzioaren asintota horizontala dela esaten da.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$ betetzen da.

f funtzioak infinituan dituen limieetako bat *L* bada,
y = L zuzena *f* funtzioaren asintota horizontala da.

Futzio arrazionalen kasuan, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, asintota horizontalak lortzeko, nahikoa da frakzioko zenbakitzaileko eta izendatzaileko polinomioen mailak aztertzea.

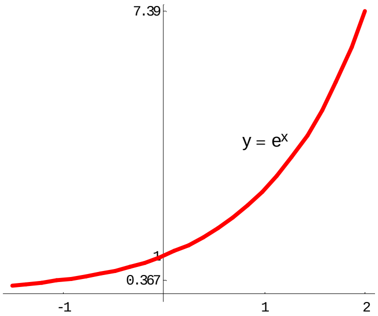
Hain zuzen, *P(x)*-ren maila *Q(x)*-ren maila baino txikiagoa bada, edo biak maila berekoak badira, infinituko limitea zenbaki erreala da, *L*. Beraz, *f(x)* funtzioak asintota horizontal bat izango du ***y = L*** ekuaziokoa.

Adibidea. Lortu $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 - 2}$ eta $g(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 2}$ funtzioen asintota horizontalak.

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$. Beraz, **y = 3 zuzena** *f*-ren asintota horizontala da, alde bietatik.

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Beraz, **y = 0 zuzena** (OX ardatza) *f*-ren asintota horizontala da, alde bietatik.

Funtzio esponentzialen kasuan ere agertzen dira asintota horizontalak. Ikus ditzagun bi adibide:

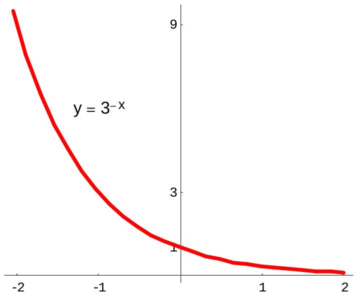


I) Demagun $y = e^x$ funtzioa.

x aldagaia $-\infty$ -rantz doanean, funtzioaren balioa *0*-rantz hurbiltzen da. Izan ere,

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

y = 0 zuzena (OX ardatza) da *f*-ren asintota horizontala, eta, kasu honetan, hurbilketa ezker aldetik soilik egiten da.



II) Demagun $y = 3^{-x}$ funtzioa.

x aldagaia $+\infty$ -rantz doanean, funtzioaren balioa *0*-rantz hurbiltzen da. Izan ere,

$$\lim_{x \to +\infty} 3^{-x} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

y = 0 zuzena (OX ardatza) da *f*-ren asintota horizontala, eta hurbilketa eskuin aldetik soilik egiten da.

Funtzio esponentzialetan, berretzailea $-\infty$ egiten den kasuetan, OX ardatza du asintota horizontaltzat.

Ariketa

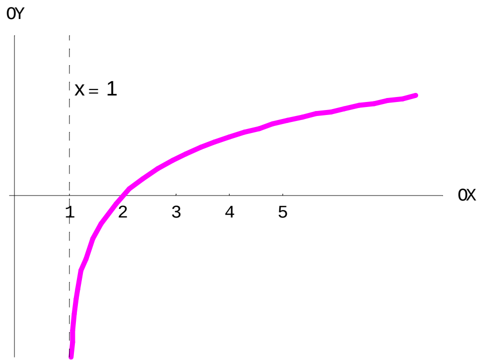
Lor itzazu ondoko funtzioen asintota horizontalak:

$$a)\ y = \frac{1-3x^2}{4x^2} \quad ; \quad b)\ y = \frac{2}{x} \quad ; \quad c)\ y = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$$

$$d)\ y = \frac{x^4-2}{x^2+1} \quad ; \quad e)\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$$

Asintota bertikalak

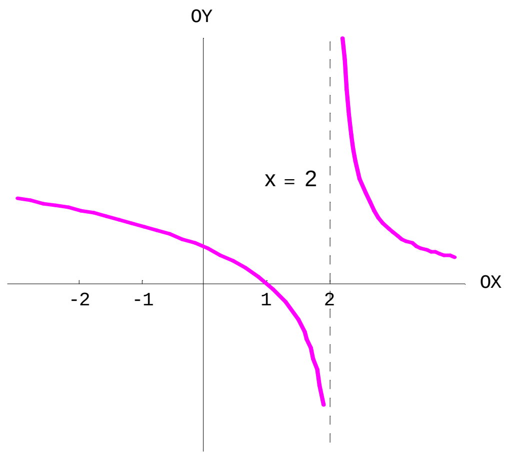
Behatu ondoko funtzioen adierazpen grafikoa:



Funtzioak $-\infty$ ra jotzen du *x* aldagaiak *1*erantz hurbiltzean eskuinetik. Hau da:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

***x= 1* zuzena** *f* funtzioaren asintota bertikala dela esaten da.



Ezkerreko grafikoan, funtzioak $-\infty$ -rantz jotzen du *x* aldagaiak *2*rantz hurbiltzean ezkerretik, eta $+\infty$ -rantz *x* aldagaia *2*rantz hurbiltzean eskuinetik. Hau da:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ eta $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

***x = 2* zuzena** *f* funtzioaren asintota bertikala dela esaten da.

Funtzio batek asintota bertikala izango du x = a puntuan, baldin eta $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ bada.

Futzio arrazionalen kasuan, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$,asintota bertikala edukiko dute Q(x) izendatzailea 0 egiten duten *x*-ren balioetan, baldin x-ren balio horiek P(x) zenbakitzailea ere anulatzen ez badute.

Adibidea. *Lortu* $f(x) = \dfrac{5}{3-x}$, $g(x) = \dfrac{5}{x^2-4}$ *eta* $h(x) = \dfrac{x-1}{(x-1)(x-3)}$ *funtzioen asintota bertikalak.*

I) x – 3 = 0 ; x = 3 . $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

Beraz, ***x = 3* zuzena** *f*-ren asintota bertikala da.

II) x^2-4 = 0 ; x = +2 eta x = -2

Beraz, ***x* = *-2* eta *x* = *2* zuzenak** dira *g*-ren asintota bertikalak

III) (x-1)(x-3) = 0 ; x=1 eta x=3

- **x=1 puntuan** zenbakitzailea ere anulatzen da; beraz, **ez du asintota bertikalik**.
- **x=3** puntuan **badu** asintota bertikala.

Ariketa

Lor itzazu ondoko funtzioen asintota bertikalak.

$$a)\ y = x^3 - 2x^2 \quad ; \quad b)\ y = \frac{2}{x} \quad ; \quad c)\ y = \frac{x-1}{x^2-5x+6} \quad ; \quad d)\ y = \frac{x}{x^2+4}$$

Oharrak:

- Funtzio polinomikoek ez dute asintotarik
- Funtzio batek infinitu asintota bertikal eduki ditzake. Adibidez, *y = tg x* funtzioak
- Funtzio batek gehienez asintota horizontal bat eduki dezake; batzutan alde batetik, eta beste batzuetan bi aldeetatik ($+\infty$ - rantz eta $-\infty$ - rantz).

Ariketa

Lor itzazu ondoko funtzioen asintota bertikalak eta horizontalak:

$$a)\ y = \frac{x^2-1}{3} \quad ; \quad b)\ y = -\frac{1}{x} \quad ; \quad c)\ y = \frac{1}{x^2-9} \quad ; \quad d)\ y = \frac{2x}{x-4}$$

$$e)\ \frac{x^2+2}{x^2-2x} \quad ; \quad f)\ y = \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad g)\ y = 4^x \quad ; \quad h)\ y = e^{-2x}$$

Ariketa ebatzia

Demagun $y = \dfrac{2x}{x-1}$ *funtzioa. Aurkitu existentzia-eremua eta asintota bertikalak eta horizontalak. Ondoren, adierazi grafikoki.*

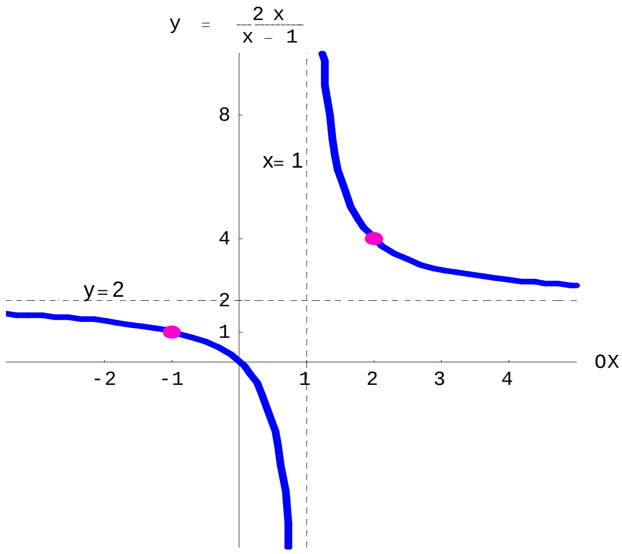
Existentzia-eremua: R – {1}

Asintota bertikala: x = 1 zuzena.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

Asintota horizontala: y = 2 zuzena.

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 2$$



x	y
0	0
-1	1
2	4

Ariketa

Egizu gauza bera (definizio eremua, asintotak eta grafikoa) ondoko funtzioekin:

$$y = -\frac{2}{x} \quad ; \quad y = \frac{x}{x-2} \quad ; \quad y = 4^x$$

Ariketa ebatzia

Demangun $f(x) = \dfrac{4x^2}{9 - x^2}$ *funtzioa.*

Asintotak kalkulatuko ditugu, eta, funtzioaren grafikoa eginda, kurbak eta asintoten arteko hurbilketa ikusiko dugu.

Asint. bertikalak: $x^2 - 9 = 0$; $x = 3$ eta $x = -3$

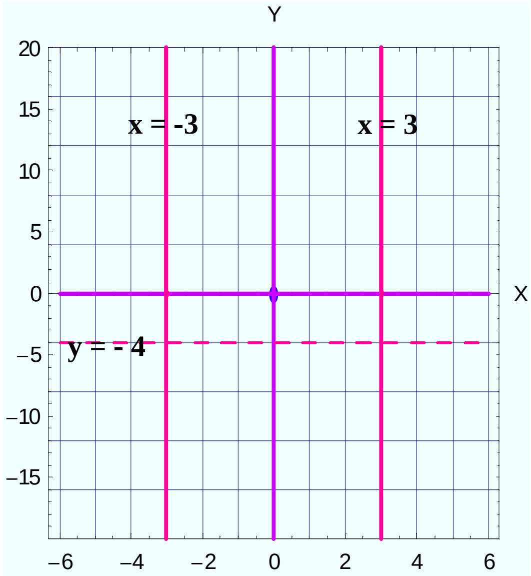
$$\lim_{x \to -3} f(x) = \frac{4x^2}{9 - x^2} = \lim_{x \to 3} f(x) = \frac{4x^2}{9 - x^2} = \infty$$

Beraz, **x = -3** eta **x = 3** zuzenak, *f* funtzioaren asintota bertikalak dira.

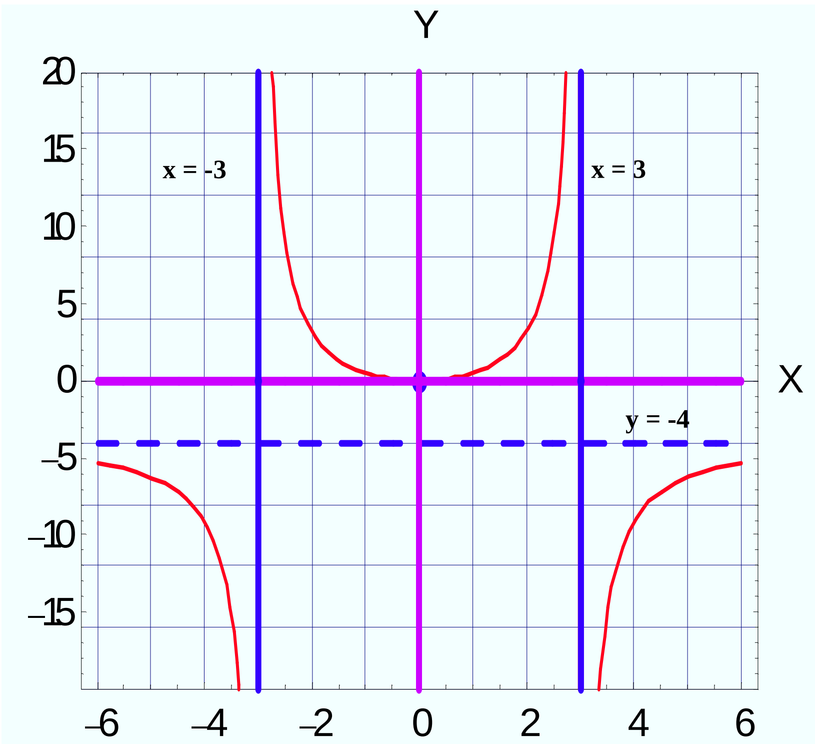
Asint. horizontalak. Zenbakitzaileak eta izendatzaileak maila bera dute. Beraz:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{4x^2}{9 - x^2} = \lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{4x^2}{9 - x^2} = -4$$

y = -4 **zuzena asintota horizontala da.**

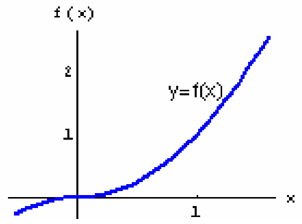


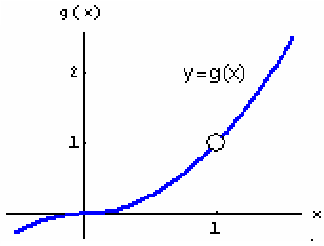
Hona hemen funtzioaren grafikoa:

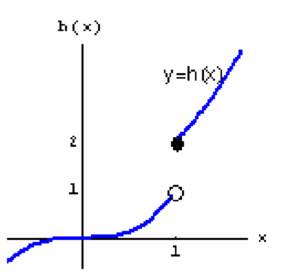


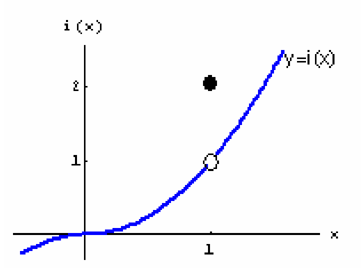
Jarraitutasuna

Behatu ondoko lau funtzioen grafikoak:









f(x) funtzioaren grafikoa lapitza paperetik jaso gabe marraz daiteke. **Funtzio jarraitua** dela esango dugu.
Ordea, *g*, *h* eta *i* funtzioak ezin daitezke marraztu lapitza paperetik jaso gabe. Guztiek dute etena $x = 1$ puntuan. Horregatik diogu **funtzio etenak** direla $x = 1$ puntuan.

Ikus dezagun zein den etenaren arrazoia kasu bakoitzean:

- ***g*** funtzioa ez da existitzen $x = 1$puntuan; hau da, **ez dago *g(1)* baliorik**.
- ***h*** funtzioa eten egiten da $x = 1$ puntuan, ezkeraldeko eta eskuinaldeko limiteak besberdinak direlako; hots, **ez da existitzen** $\lim_{x\to 1} h(x)$
- ***i*** funtzioa eten egiten da $x = 1$ puntuan, zeren $\lim_{x\to 1} i(x)$ **existitzen den arren, horren balioa ez da *i(1)* balioaren berdina.**

Definizioa. *f* funtzioa jarraitua da $x = a$ puntuan, baldin hiru baldintza hauek betetzen badira:

- *f(a)* existitzen da.
- $\lim_{x\to a} f(x)$ existitzen da eta finitua da.
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ da.

1. adibidea

Aztertu ondoko funtzioaren jarraitutasuna:

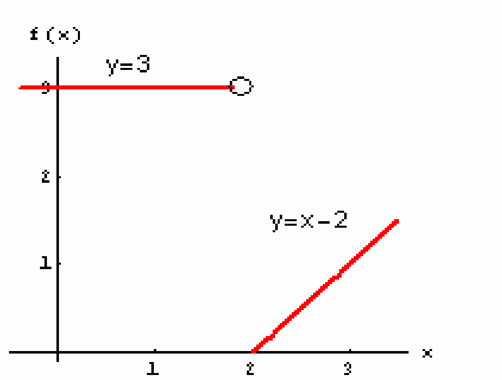
$$y = \begin{cases} 3 & ; \quad x < 2 \\ x - 2 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Azter dezagun x = 2 puntua:
f(2) = 2-2 = 0
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$

$\lim_{x\to 2+} f(x) = 2 - 2 = 0$

$\lim_{x\to 2} f(x)$ ez da existitzen .

Beraz, etena da x = 2 puntuan.



2. adibidea

Aztertu ondoko funtzioaren jarraitutasuna: $y = \begin{cases} 1+x^2 & ; \quad x \le -1 \\ 1 & ; \quad -1 < x < 0 \\ x+1 & ; \quad x \ge 0 \end{cases}$

- Azter dezagun x = -1 puntuan:

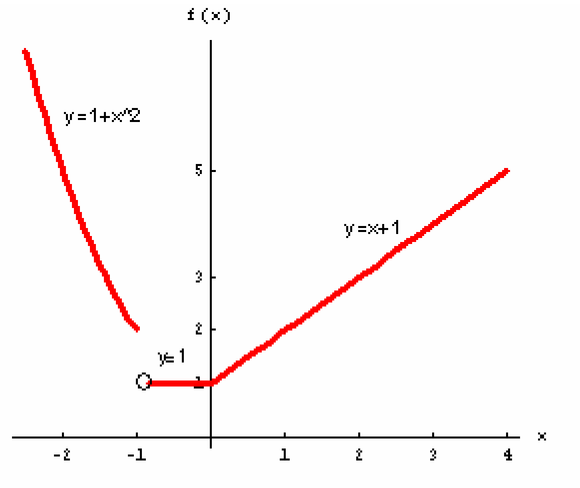
f(-1) = 1+ (-1)^2 = 2

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 1 + (-1)^2 = 2$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ ez da existitzen . Beraz,

etena da x = -1 puntuan.



- Azter dezagun x = 0 puntuan:

f(0) = 0 + 1 = 1

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 + 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ denez **jarraia da x=0 puntuan**.

3. adibidea

Aztertu ondoko funtzioaren jarraitasuna: $y = \dfrac{2}{x-3}$

f(3) ez da existitzen, x = 3 puntua ez baita *f*-ren existentzia-eremukoa. Beraz, ez da jarraitua x = 3an.

Zein motatako etena duen determinatzeko, x = 3 puntuko albo-limiteak kalkulatu behar ditugu.

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2}{x-3} = -\infty \qquad ; \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{2}{x-3} = +\infty$$

Kasu honetan, *f* funtzioak **asintota bertikala du** eta jauzi infinituko etena du **x = 3 puntuan**.

4. adibidea

Aurkitu k-ren balioa, $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & ; \quad x \ne 1 \\ k & ; \quad x = 1 \end{cases}$ *funtzioa jarraitua izan dadin x = 1 puntuan.*

f(1) = k

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

f(1) = $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ bete behar denez, **k = 2** izan beharko du

ARIKETAK (limiteak, asintotak, jarraitutasuna)

1. Kalkulatu ondoko limiteak:

$$a)\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x} \qquad b)\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x+5} \qquad c)\lim_{x\to\infty}\frac{1-6x^4}{x^2} \qquad d)\lim_{x\to -\infty} e^{1+2x}$$

$$e)\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2-3x} \qquad f)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-1}{2x^2}\right) \qquad g)\lim_{x\to\infty}\frac{1-6x^2}{x^2} \qquad h)\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}$$

2. Eman dezagun f(x)-ren grafikoa.

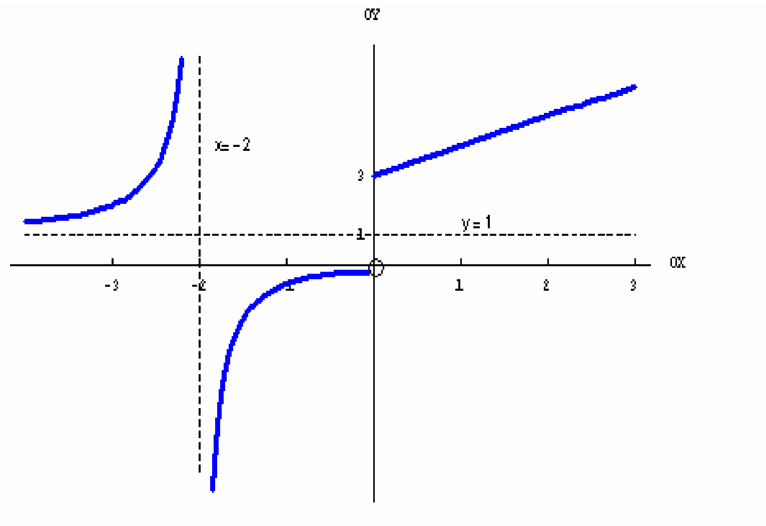
Lortu itzazu ondoko limiteak:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \qquad \lim_{x\to 0} f(x)$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)$$



3. Aurkitu ondoko funtzioen asintota bertikalak eta horizontalak:

$$a)y=\frac{5x}{x-4} \qquad b)y=\frac{x+1}{x^2-3} \qquad c)y=\frac{x}{x^2+3} \qquad d)y=e^{\frac{x}{2}}$$

4. Egizu ondoko funtzioen adierazpen grafikoa; horretarako, aurkitu, gutxienez, existentzia-eremua eta asintota bertikalak eta horizontalak.

$$a)y=\frac{3}{x} \qquad b)y=\frac{1}{3-x} \qquad c)y=\frac{2x}{x-3} \qquad d)y=3^{-x} \qquad e)y=\ln(x+2)$$

5. Azter ezazu ondoko futzioen jarraitutasuna:

$$a)y=\frac{5x}{x-4} \qquad b)y=\frac{x+2}{x^2+x-2} \qquad c)y=\sqrt{x-1} \qquad d)y=e^{\frac{x}{2}}$$

$$e)y=\begin{cases} x^2 & ; \quad x\le 1 \\ 3-x & ; \quad x>1 \end{cases} \qquad f)y=\begin{cases} 2x-3 & ; \quad x<1 \\ x+1 & ; \quad 1\le x\le 3 \\ 4 & ; \quad x>3 \end{cases} \qquad g)y=|x-2|$$

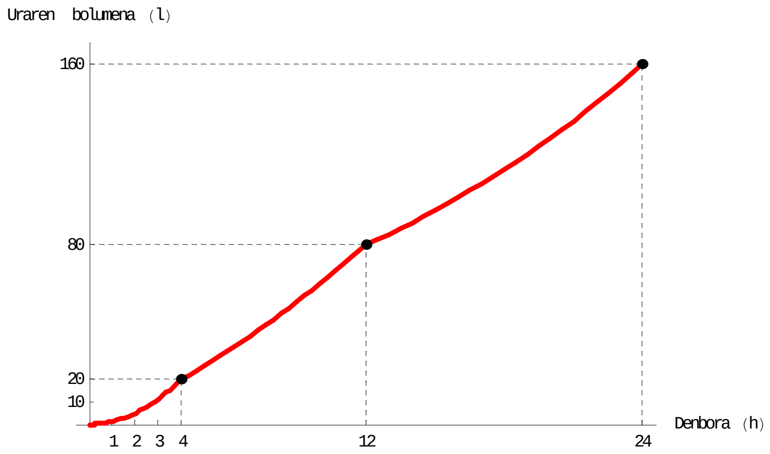
6. Lor ezazu *a* eta *b* parametroek izan behar duten balioa, ondoko funtzioa jarraitua izan dadin R multzoan.

$$y=\begin{cases} x-1 & ; \quad x<2 \\ ax+1 & ; \quad 2\le x\le 5 \\ x+b & ; \quad x>5 \end{cases}$$

DERIBATUA (I)

Funtzio baten batez besteko aldaketa-tasa

f funtzioaren grafikoak behatoki meteorologiko batean egunean zehar bilduriko ur-kantitatea adierazten du.



Bi aldiune jakinen artean, t_1 eta t_2, bilduriko ur-kantitatea lortzeko, nahikoa da $f(t_2) - f(t_1)$ kalkulatzea. Esate baterako:

Denbora-tartea	*Ur-kantitatea(litroak)*
0 h-tik 4 h-ra	f(4) – f(0) = 20 –0 = 20
4 h-tik 12 h-ra	f(12) – f(4) 80 – 20 = 60

Orain, euri gehien zein denbora-tartetan egin duen jakiteko, tarte bakoitzean denbora-unitateko zenbat ur erori den jakin behar dugu. Horretarako, ondoko zatidurak ebaluatu behar ditugu:

$$\frac{f(4) - f(0)}{4-0} = \frac{20-0}{4-0} = \frac{20}{4} = 5\ l/h$$

$$\frac{f(12) - f(4)}{12-4} = \frac{80-20}{12-4} = \frac{60}{8} = 7{,}5\ l/h$$

Ikus dezakegunez, 4 h eta 12 h bitartean intentsitate handiagoaz egin du euria.

Mota horretako zatidurak edozein *f* funtzioaren kasuan defini daitezke. Horrelakoetan, funtzioaren *batez besteko aldaketa-tasa* kalkulatu dela esaten da, *x* aldagaiaren bi baliok mugaturiko tartean.

a eta *b* bitartean ($a < b$ izanik) *f* funtzioak duen **batez besteko aldaketa-tasa**, **BBAT [a,b],** ondoko balioa da:

$$BBAT\ [a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

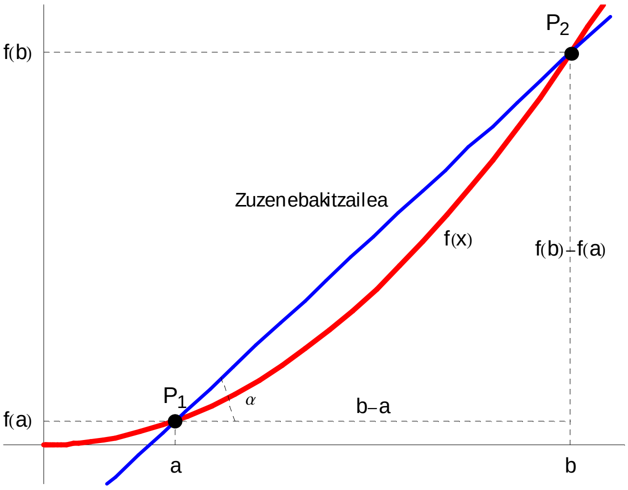
Honela, f(x) = 2x – 5 funtzioaren BBATa [2,3] tartean zera da:

$$BBBAT\ [2,3] = \frac{f(3) - f(2)}{3-2} = \frac{1-(-1)}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$$

> Batzuetan, *f* funtzioaren BBATa era honetan adierazten da:
>
> $$\frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ edo } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Interpretazio geometrikoa

Kontsidera dezagun irudiko grafikoan adierazitako *f* funtzioa, eta $P_1 = (a , f(a))$ eta $P_2 = (b , f(b))$ puntuak.



Funtzioaren batez besteko aldaketa-tasa *a*-ren eta *b*-ren artean hauxe da:

$$BBAT\ [a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Zatidura horren balioa α angeluaren tangente trigonometrikoaren balioaren berdina da eta, hori, aldi berean, P_1 eta P_2 puntuetatik pasatzen den zuzenaren (kurbarekiko ebakitzailea) maldaren berdina da. Beraz, hauxe esan dezakegu.

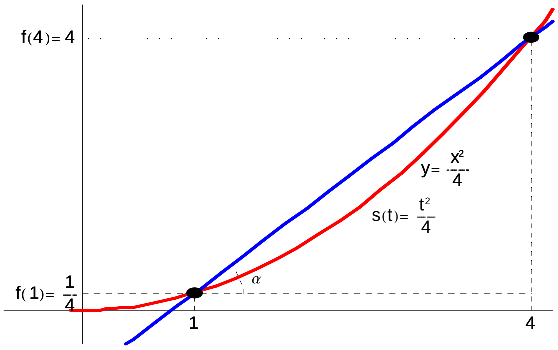
f funtzioak *[a , b]* tartean duen **batez besteko aldaketa-tasa** grafikoaren *(a , f(a))* eta *(b , f(b))* puntuetatik pasatzen den **zuzen ebakitzailearen malda**ren berdina da.

BBATaren interpretazio fisikoa

Higikari batek denboraren arabera duen posizioaren funtzioa kontsideratuz gero, tarte bateko batez besteko aldaketa-tasak higikari horrek tarte horretan duen *batez besteko abiadura* adieraziko du.

1. adibidea

Demagun $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ *funtzioa. Kalkulatu:*



- *Batez besteko aldaketa-tasa [1 , 4] tartean.*
- *x = 1 eta x = 4 abzisa puntuetatik pasatzen den zuzen ebakitzailearen malda.*
- *Aurreko zuzen ebakitzaileak OX ardatzarekin eratzen duen angeluaren tangentea.*
- *Higikari baten posizioa denboraren funtzioan* $s(t) = \dfrac{t^2}{4}$ *eran adierazten bada, zenbat da batez besteko abiadura 1 h eta 4 h bitartean?*

4 galderak modu berean kalkulatzen dira, eta balio bera dute; hau da:

$$BBAT\ [1\ ,4] = \frac{f(4) - f(1)}{4-1} = \frac{\frac{4^2}{4} - \frac{1^2}{4}}{4-1} = \frac{\frac{15}{4}}{3} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

Funtzioen deribatua puntu batean

Kontsidera dezagun $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ funtzioa, eta kalkula ditzagun *[1 , b]* motako tarteetako BBATak, *b* delakoa *1* baliotik gero eta hurbilago egonik. Horrela eginda, funtzioak *x= 1* puntuan duen aldaketa-moduari buruzko informazio gero eta zehatzagoa lortuko dugu.

$$BBAT\ \ [1\ ,1{,}5]=\frac{f(1{,}5)-f(1)}{1{,}5-1}=\frac{\frac{(1{,}5)^2}{4}-\frac{1^2}{4}}{1{,}5-1}=0{,}625$$

$$BBAT\ \ [1\ ,1{,}1]=\frac{f(1{,}1)-f(1)}{1{,}1-1}=\frac{\frac{(1{,}1)^2}{4}-\frac{1^2}{4}}{1{,}5-1}=0{,}525$$

$$BBAT\ \ [1\ ,1{,}01]=\frac{f(1{,}01)-f(1)}{1{,}01-1}=\ 0{,}5025$$

Ikus dezakegunez, BBAT horiek gero eta hurbilago daude *0,5* baliotik. Hain justu, balio hori BBAT horien limitea da *[1 , b]* tarteetan *b* balioa *1* baliorantz doanean. Limite horri honelaxe deritzo: *f* funtzioaren **aldiuneko aldaketa-tasa** *x = 1* balioko duen abzisa puntuan.

Puntu bateko alduiuneko aldaketa-tasak garrantzi handia du funtzioen azterketan eta matematikoki funtzioak puntu horretan duen *deribatua* deritzo.

***x = a* balioko abzisako puntuan** *f* funtzioak duen **deribatua** ondoko limitea da (baldin existitzen bada):

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Limite hori existitzen bada, ***f'(a)*** eran adierazten da.

Kontura zaitezkeenez, *h = b-a* eginez, *b = a+h* dugu. Gainera, *b* balioa *a*-rantz joaten denean *h = b-a* balioa zerorantz joaten da. Beraz, era honetan idatz dezakegu aurreko adierazpena:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Gehikuntzen notazioa erabiliz, era honetan adieraz dezakegu *f'(x)*:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Limite hori $\dfrac{df}{dx}$ moduan ere adierazten da. Hots:

$$f'(x)=\frac{df}{dx}$$

Horrelakoetan, f'(x) delakoa diferentzial *f*-ren eta diferentzial *x*-ren arteko zatidura dela esaten da.

2. adibidea.

Kalkulatu $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ *funtzioaren deribatua x = 1 abzisa puntuan.*

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(1+h)^2}{4}-\frac{1^2}{4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+2h+h^2)-1}{4h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{4h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{4h}=\lim_{h\to 0}\frac{2+h}{4}=\frac{2}{4}=0{,}5$$

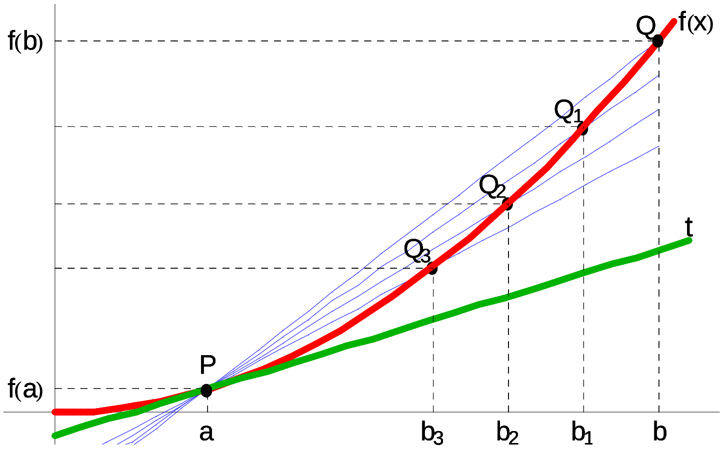
3. adibidea.

Kalkulatu $f(x)=x^2+1$ *funtzioaren deribatua x = 2 abzisa puntuan.*

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(2+h)^2+1\right]-(2^2+1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(4+4h+h^2+1)-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$

Interpretazio geometrikoa

Ikusi dugunez, *[a,b]* tartean *f* funtzioak duen batez besteko aldaketa-tasa funtzioaren grafikoaren *P=(a , f(a))* eta *Q=(b , f(b))* puntuetatik pasatzen den zuzen ebakitzailearen malda da.



Abzisak *a* baliotik gero eta hurbilago dauden b_1, b_2, b_3... balioak hartzean, horiei dagozkien PQ_1, PQ_2, PQ_3... zuzen ebakitzaileak hainbat eta hurbilago daude $x=a$ puntutik pasatzen den ***t*** zuzen tangentearekin edo zuzen ukitzailearekin.

Zuzen ukitzaile horren malda PQ_n zuzen ebakitzaileen malden limitea izango da, alegia, *[a , b_n]* tarteetan *f* funtzioak dituen BBATen limitea. Hain zuzen ere, limite hori lehenago *f'(x)* modura definituriko berbera da.

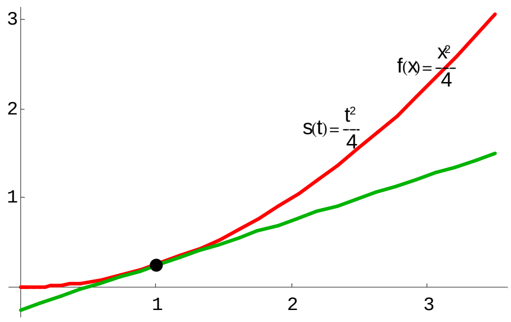
Beraz, honako hau baieztа dezakegu:

f funtzioak *x = a* abzisako puntuan duen **deribatua** funtzioaren grafikoko *(a , f(a))* puntuko **zuzen ukitzailearen malda** da.

Deribatuaren interpretazio fisikoa
Higikari batek denboraren arabera duen posizioaren funtzioa kontsideratuz gero, ***t*** aldiuneko deribatuak higikariaren ***aldiuneko abiadura*** adierazten digu.

4. adibidea

Demagun $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ *funtzioa. Kalkulatu:*



- *Aldiuneko aldaketa-tasa x = 1balioko abzisa puntuan.*
- *x = 1 abzisa puntutik pasatzen den zuzen ukitzailearen malda.*
- *f-ren deribatua x = 1 abzisa puntuan.*
- *Higikari baten posizioa denboraren funtzioan* $s(t)=\dfrac{t^2}{4}$ *eran adierazten bada, zenbat da aldiuneko abiadura t = 1 seg. denean?*

4 galderak modu berean kalkulatzen dira, eta balio bera dute; hau da: $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=0{,}5$

Zuzen ukitzailearen ekuazioa

Gogoan duzunez, ondokoa da zuzen baten puntu-malda motako ekuazioa:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

non (x_0 , y_0) delakoa zuzeneko puntu bat den eta *m* delakoa, zuzenaren malda.

f'(a) delakoak *x = a* abzisa puntuan *f*-ren grafikoaren zuzen ukitzaileak duen malda adierazten duenez,

(a , f(a)) puntuan *f*-ren zuzen ukitzailearen ekuazioa ***y – f(a) = f'(a) (x –a)*** da.

5. adibidea

Lortu $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ *funtzioaren grafikoak x = 1 abzisako puntuan duen zuzen ukitzailearen ekuazioa.*

x = 1 bada, $f(1)=\dfrac{1}{4}$ da. Beraz, zuzena (1 , ¼) puntutik pasatzen da

Malda, *f'(1)*, lehenago kalkulatu dugu, aurreko 2. adibidean: *m = f'(1) = 0,5*

Balio horiek $y - y_0 = m(x - x_0)$ ekuazioan ordezkatuz:

$$y-\frac{1}{4}=0{,}5(x-1) \quad \text{edo} \quad 2x - 4y - 1 = 0$$

Ariketak

1. Kalkula ezazu $f(x)=\dfrac{1}{x}$ funtzioaren deribatua x = 1 abzisako puntuan.

2. Lor ezazu $g(x)=\dfrac{1}{x}$ .funtzioaren grafikoak x = 1 abzisako puntuan duen zuzen ukitzailearen ekuazioa.

Funtzio deribatua

Ikusi dugunez, $x = a$ abzisako puntuan f funtzioak duen deribatuaren emaitza zenbaki erreala da.

Beraz, f' funtzio bat kontsidera dezakegu, x abzisako puntu bakoitzari f funtzioak puntu horretan duen deribatuaren balioa egokitzen diona.

$$x \to f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Horrela definituriko funtzioari f-ren funtzio deribatua deritzo edo, labur esanda, deribatua.

6. adibidea

Kalkulatu $f(x) = x^2$ funtzioaren deribatua

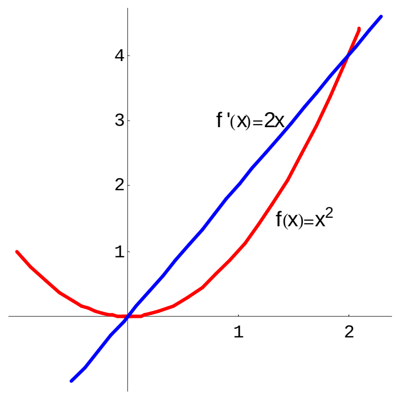
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2hx + h^2) - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$$

x	***f'(x)* = 2x**
x = 0	*f'(0)* = 2 . 0 = 0
x = -1	*f'(-1)* = 2 . (-1) = -2
x = 2	*f'(2)* = 2 . 2 = 4

Puntu batean kalkulatu nahi izanez gero, nahikoa da funtzio deribatuan x-ren balioa ordezkatzea.

Hona hemen $f(x) = x^2$ eta $f'(x) = 2x$ funtzio deribatuaren grafikoak



Funtzio batzuen deribatuak. Formulak

Aurreko orrialdean, $y = x^2$–aren deribatua kalkulatu dugu eta emaitza $y' = 2x$ izan da.

- Era berean,

  $f(x) = x^3$ funtzioa deribatuta, emaitza $f'(x) = 3x^2$ da.
  $f(x) = x^4$ " " , " $f'(x) = 4x^3$ "
  $f(x) = x^5$ " " , " $f'(x) = 5x^4$ "
  ....

$f(x) = x^n$ " " , " $f'(x) = nx^{n-1}$ " "

  Adibidez, $f(x) = x^{100}$ funtzioaren deribatua $f'(x) = 100x^{99}$ da.

  $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ bada, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ da.

  $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ bada, $f'(x) = -3.x^{-3-1} = \frac{-3}{x^4}$ da.

- $f(x) = x$ funtzioaren deribatua $f'(x) = 1$ da. Egizu ariketa gisa

- Funtzio konstantearen ($y = k$) deribatua 0 da; esaterako, $f(x) = 5$ bada $f'(x) = 0$ da. Arrazona ezazu.

- $f(x) = \sin x$ funtzioari deribatuaren definizioa aplikatuta, emaitza $f'(x) = \cos x$ ateratzen da.
  Eta $f(x) = \cos x$ funtzioa deribatuta, emaitza $f'(x) = -\sin x$ ateratzen da.

  Taula txiki honetan adierazten ditugu azken emaitza horiek:

Funtzioa	Funtzio deribatua
$f(x) = k$; hau da, zbki erreal bat	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$

Eragiketak

Dakizunez, edozein bi funtzio emanik, *f* eta *g*, horien arteko batuketa, kenketa, biderketa, zatiketa eta konposizioa egin ditzakegu

- **Konstante baten eta funtzio baten arteko biderkaduraren deribatua**

  $$y = k.g(x) \Rightarrow y' = k.g'(x)$$

  Adibideak.

  a) $f(x) = 4x^5$ funtzioaren deribatua $f'(x) = 4.(5x^4) = 20x^4$ da.

  b) $f(x) = 7x^{10}$ " " $f'(x) = 7.(10x^9) = 70x^9$ da.

- **Batura funtzioaren deribatua**

$$y = f(x) \pm g(x) \;\Rightarrow\; y' = f'(x) \pm g'(x)$$

Adibideak.

a) $y = 4x^5 + 7x^{10}$ funtzioaren deribatua $y' = 20x^4 + 70x^9$ da.

b) $y = x^6 - 3x^2 + 5x - 8 + 4\cos x$ bada, $y' = 6x^5 - 6x + 5 - 0 + 4.(-\sin x)$ da.

- **Biderkadura funtzioaren deribatua**

$$y = f(x).g(x) \;\Rightarrow\; y' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

Adibideak.

a) $f(x) = x.\sin x$ funtzioaren deribatua $f'(x) = 1.\sin x + x.\cos x$ da.

b) $y = 5x^6.\cos x$ funtzioaren deribatua $f'(x) = 30x^5.\cos x + 5x^6.(-\sin x)$ da.

- **Zatidura funtzioaren deribatua**

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \;\Rightarrow\; y' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Adibideak.

a) $y = \dfrac{3x^2}{\sin x} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{6x.\sin x - 3x^2.\cos x}{\left[\sin x\right]^2}$

b) $y = \dfrac{2-3x}{\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{(0-3).\sqrt{x} - (2-3x).\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

c) $y = \dfrac{3}{x^4}$. Deribatua bi eratan kalkula daiteke:

I) Berretura modura adierazita,

$$y = 3.x^{-4} \;\Rightarrow\; y' = 3.(-4x^{-4-1}) = \frac{-12}{x^5}$$

II) Zatiduraren formula aplikatuta,

$$y = \frac{3}{x^4} \;\Rightarrow\; y' = \frac{0.x^4 - 3.(4x^3)}{x^8} = \frac{-12}{x^5}$$

Ariketak

(Ondoko ariketak egiteko ez erabili lehenengo orrialdeetan azaldutako deribatuaren definizioaren formula, prozesu hori luzea eta astuna baita. Aplikatu zuzenean formulak)

1. Kalkulatu ondoko funtzioen deribatuak:

a) $y = 3x^3 - 2x + 4$ b) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ c) $y = \sqrt[3]{x^2}$ d) $y = \frac{1-x}{4-x^2}$

$e) y = \frac{x}{2}$ $f) y = 4.\sqrt[5]{x^4}$ $g) y = \frac{2}{\sqrt[7]{x^5}}$ $h) y = (5x^6 - 3x^2).(7x^4 - x)$

$i) y = x^3 .\cos x$ $j) y = \frac{2x^3 + 5x - 3}{2\sin x}$ $k)\ y = \frac{x.\sin x}{1-2x}$ $l) y = (1-3x^2).\sqrt{x}.\cos x$

2.-Eman dezagun $y = x^3$ funtzioa.

a) Lortu batez besteko aldaketa-tasaren balioa [1,2] tartean. Zein da bere esangura geometrikoa?

b) Lortu aldiuneko aldaketa-tasa x = 1 puntuan. Zein da bere esangura geometrikoa?

c) Lortu x = 1 eta x = 2 abzisa-puntuetatik pasatzen den zuzen ebakitzailearen ekuazioa

d) Lortu x = 1 puntutik pasatzen den zuzen ukitzailearen malda. Idatz ezazu zuzen horren ekuazioa.

3. Zein da $f(x) = x^3 - x - 2$ ekuazioko kurbak x = -2 abzisako puntuan duen zuzen ukitzailearen malda? Idatz ezazu zuzen horren ekuazioa

4. Determina ezazu $f(x) = x^3-12x$ ekuazioko kurbaren zein puntutan den zuzen ukitzailea abzisa-ardatzaren paraleloa.

5. Kalkula ezazu ondoko funtzioen grafikoei aipaturiko puntuetan zuzen ukitzaileen ekuazioak.

a) $y = \frac{1}{x}$, x = 2 abzisako puntuan

b) $y = x^3+2x+10$, x = -1 abzisako puntuan

6. Kalkula ezazu $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzailea x = 1 abzisako puntuan.

Zein puntutako zuzen ukitzailea da abzisa-ardatzaren paraleloa?

- **Funtzio konposatuaren deribatua: katearen erregela**

$$y = (f \circ g)(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'[g(x)] \,.\, g'(x)$$

Adibideak

I) $y = \sin x^2$ funtzioa funtzio konposatu bat da, $f(x) = \sin x$ *eta* $g(x) = x^2$ direlarik. Izan ere, $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2) = \sin x^2$

Bere deribatua: **y’** = f’[g(x)] . g’(x) = cos[g(x)].g’(x) = $\mathbf{\cos x^2 \,.\, 2x}$

II) Kalkula dezagun $y = (4x^2-1)^{10}$ funtzioaren deribatua.

Funtzio konposatua da. Izan ere, $f(x) = x^{10}$ eta $g(x) = (4x^2-1)$ hartuta, $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(4x^2-1) = (4x^2-1)^{10}$

Katearen erregela: **y’** = $f'[g(x)] \,.\, g'(x) = 4[g(x)]^9.g'(x) = \mathbf{4(4x^2-1)^9 \,.(8x-0)}$

Orokorrean, funtzioa konposatua denean **u** letraz adieraziko dugu
Laburbilduta, funtzio bakunetan eta funtzio konposatuetan, deribatuaren formulak ondoko hauek dira:

Funtzio bakuna	Funtzio konposatua
$y = x^n \rightarrow y' = n.x^{n-1}$	$y = u^n \Rightarrow y' = n.u^{n-1}.u'$
$y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$	$y = \sin u \rightarrow y' = u'.\cos u$
$y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$	$y = \cos u \rightarrow y' = -u'.\sin u$
$..........-$	

Adibideak

$$y = (5x^2+3x-1)^4 \rightarrow y' = 4(5x^2+3x-1)^3\,(10x+3)$$
$$y = (6x^4+5)^2 \rightarrow y' = 2(6x^4+5).24x$$
$$y = \cos(1+4x) \rightarrow y' = -4.\sin(1+4x)$$
$$y = \sqrt{1-3x} \rightarrow y' = \frac{0-3}{2\sqrt{1-3x}}$$

Ariketa

Deribatu ondoko funtzioak

$$a)\,y = \sin\frac{2}{x} \qquad b)\,y = \sin\frac{x}{2} \qquad c)\,y = (1+x+x^2)^2 \qquad d)\,y = \sqrt{(1+x+x^2)}$$
$$e)\,y = \frac{(4x^2-1)^5}{1-2x} \qquad f)\,y = x^2.\cos(7x^2+1) \qquad g)\,y = \cos^2 x \qquad h)\,y = \sin x^2.\sin^2 x$$

Deribatuen taula

Funtzio bakunak		**Funtzio konposatuak**	
f(x) = k	f ’(x) = 0	Notazioa errazteko, *u* delakoak *x*-ren funtzio bat adierazten du	
f(x) = x	f ’(x) = 1		
f(x) = x^n	f ’(x) = nx^{n-1}	f(x) = u^n	f ’(x) = $nu^{n-1}u'$
f(x) = $\sqrt{x}$	f ’(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	f(x) = $\sqrt{u}$	f ’(x) = $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
f(x) = $\sqrt[n]{x}$	f ’(x) = $\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	f(x) = $\sqrt[n]{u}$	f ’(x) = $\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
f(x) = ln x	f ’(x) = $\frac{1}{x}$	f(x) = ln u	f ’(x) = $\frac{u'}{u}$
f(x) = $\log_a x$	f ’(x) = $\frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$	f(x) = $\log_a u$	f ’(x) = $\frac{u'}{u}\frac{1}{\ln a}$
f(x) = e^x	f ’(x) = e^x	f(x) = e^u	f ’(x) = $e^u u'$
f(x) = a^x	f ’(x) = a^x . ln a	f(x) = a^u	f ’(x) = $a^u u' \ln a$
f(x) = sin x	f ’(x) = cos x	f(x) = sin u	f ’(x) = $u' \cos u$
f(x) = cos x	f ’(x) = -sin x	f(x) = cos u	f ’(x) = $-u' \sin u$
f(x) = tg x	f ’(x) = $\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	f(x) = tg u	f ’(x) = $\frac{u'}{\cos^2 u} = \sec^2 u$

<u>Ariketa</u>

Deribatu ondoko funtzioak

$y = \frac{5x-1}{(1-x)^4}$; $y = \ln\sqrt{x}$; $y = \sqrt{\ln x}$; $y = 4\sqrt[3]{3-2x}$; $y = \frac{e^{x3}}{1-\cos x}$

$y = \log(5x^2-1)^3$; $y = 3\log\ (2x\ \ -1)$; $y = tg\,(x^2-1)$; $y = \cos(\ln 2x)$

$y = \sin x\,.\,tg\,x$; $y = \ln(\cos 2x)$; $y = \frac{x\,.\,5^x}{\ln x}$; $y = \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}$; ; $y = 3^{2x}$

$y = \cos x^2\,.\cos^2 x$; $y = x^6\,.6^x.\ln 6x$; $y = \frac{x\cos x}{e^{-x}}$; $y = 6^{\frac{x}{4}}$; $y = (3x^4-6x^2-5x-7)^{10}$

DERIBATUA (ariketak)

1. Konparatu *f(x) = x^3* eta *g(x) = 3^x* funtzioen batez besteko aldaketa-tasak [1,2] tartean eta esan bietatik zein hazten den gehiago tarte horretan. Egizu grafikoak.

2. Marraztu *R* multzoan deribagarria den funtzio baten grafikoa, non grafikoaren puntu guztietako deribatua positiboa den.

3. Lor ezazu *f(x) = $2x^5$ +6* ekuazioko kurbaren zuzen ukitzailearen ekuazioa x = -1 abzisako puntuan.

4. Lor ezazu *f(x) = x.lnx* ekuazioko kurbaren zuzen ukitzailearen ekuazioa x = 1 abzisako puntuan.

5. Determina ezazu *f(x)=x^2+x+20* ekuazioko kurbaren zein puntutan den zuzen ukitzailea abzisa-ardatzaren paraleloa. Zein da zuzen ukitzaile horren ekuazioa?

6. Bilatu *f(x) = x^2 – 5x + 6* funtzioaren grafikoaren zein puntutan duen zuzen ukitzailea lehenengo eta hirugarren koadranteen erdikariaren paraleloa, eta lortu ukitzaile horren ekuazioa.

7. *y= x^2 + 4x +1* funtzioa emanda, aurkitu ukitzaile den zuzenaren ekuazioa, malda 2 duela jakinda

8. Kalkula itzazu ondoko funtzioen deribatuak:

$y=\left(1+x+x^2\right)^2$; $y=\sqrt{1+x+x^2}$; $y=\dfrac{7x}{(2-3x)^2}$; $y=4\sqrt[3]{2x+1}$

$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{1-\cos x}$; $y=ax^3+bx^2+cx+d$; $y=\cos ax+\sin ax$; $y=e^{\frac{x}{2}}$

$y=\dfrac{1}{4}\log(5x^2-1)$; $y=\dfrac{\ln(3-x^2)}{4}$; $y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$; $y=3\sin\dfrac{x}{4}$

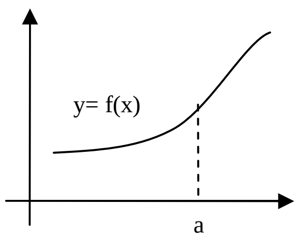
$y=tg(x^2-1)$; $y=\sqrt{\sin x}$; $y=\sin\sqrt{x}$; $y=\log_2(x^3-1)$

$y=\sin(\ln x)$; $y=\ln(\sin x)$; $y=\dfrac{\sqrt{3x}}{\cos x}$; $y=\cos x.tgx$

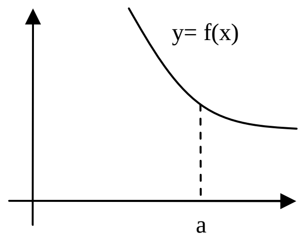
$y=\dfrac{x.2^x}{\ln x}$; $y=\dfrac{(x-2)^2}{(x+2)^2}$; $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$; $y=\dfrac{x-a}{x+a}$

DERIBATUEN ZENBAIT APLIKAZIO

Funtzio gorakorrak eta beherakorrak



Gorakorra x = a puntuan
f´(a) > 0

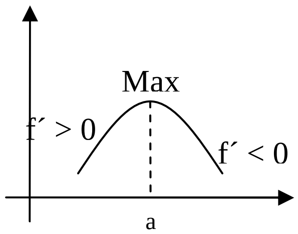


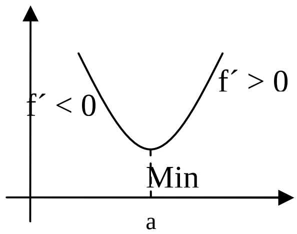
Beherakorra x = a puntuan
f´(a) < 0

Teoremak:

- *y = f(x)* funtzioa **gorakorra** da *x = a* puntuan baldin **f´(a)>0** bada
- *y = f(x)* funtzioa **beherakorra** da *x = a* puntuan baldin **f´(a)<0** bada

Maximo eta minimo erlatiboak (muturrak)





Maximoa bada “a”ren ezker aldean gorakorra da (*f´>0*) eta eskuin aldean beherakorra (*f´<0*). Beraz, deribagarria denez “a” puntuan, ezker eta eskuin deribatuak berdinak izan behar dira; hau da, *f´(a)=0*

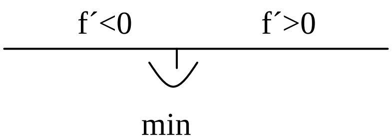
Minimoaren kasuan, “*a*”ren ezker aldean *f´<0* da eta eskuinean *f´>0*. Beraz, *x=a* puntuan *f´(a)=0* izan behar du.

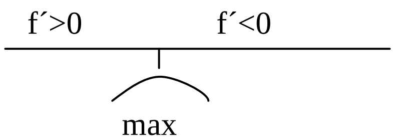
<u>Beharrezko baldintza</u>**.** *x = a* puntuan, maximo eta minimo erlatiborik badu, derrigorrean **f´(a) = 0** izan behar du,

Baldintza hori **ez da nahikoa**. Gerta daiteke *f´(a)=0* izatea eta *x=a* puntuan ez edukitzea ez maximo ez minimorik. Adibidez, $y = x^3$ funtzioak *x=0* puntuan

<u>Nahikotasun baldintza</u>. *f´(a)=0 izanik*, nola ziurtatu *x=a* puntuan maximo edo minimo erlatiborik duen ala ez?. Modu honetan egin daiteke:

f´(a)=0 izanda, horrez gain “a”ren alboetan deribatua zeinuz aldatzen bada, maximoa edo minimoa izango du;



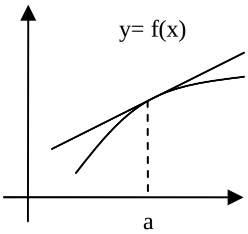


<u>Mutur</u> erlatiboa edo <u>lokala</u> deitzen diogu, alboetako puntuetan baino balio handiagoa (max) edo txikiagoa (min) hartzen duelako.

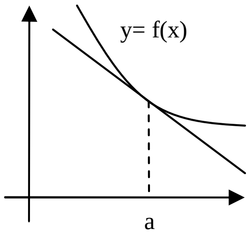
Ariketa. Azter itzazu funtzio hauen gorapena eta beherapena eta aurkitu mutur erlatiboak (maximo-minimoak).

a) $y = x^2 - 4x + 2$; b) $y = x^3 - 6x$; c) $y = x^7$

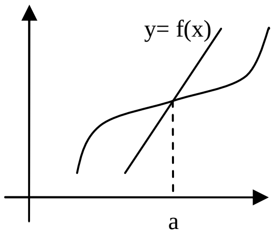
Ahur eta ganbiltasuna. Inflexio puntuak



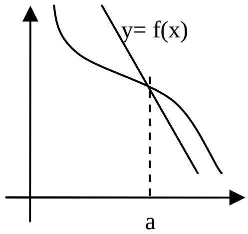
Ganbila



Ahurra

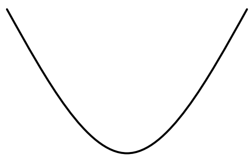


Inflexio puntua

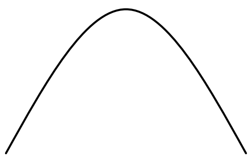


Inflexio puntua

- *x = a* **puntuan ahurra** edo **konkaboa** dela diogu, baldin "*a*"-ren ingurunean f(x) funtzioaren balioa zuzen ukitzailearena baino handiagoa denean; hots, kurba zuzenaren goitik doanean
- **Ganbila** edo **konbexua** da baldin *f(x)*-aren balioa zuzen ukitzailearena baino txikiagoa denean; hots, kurba zuzenaren azpitik doanean
- Alde batean handiagoa eta bestean txikiagoa (edo alderantziz) denean, inflexio-puntua du *x=a* denean



I) Kurba zati hori **konkaboa**(**ahurra**) da goitik ikusita.
Zuzen ukitzaileen maldak A, B, C...F puntuetan gero eta handiagoak dira (A-n negatiboa, B-n ez da hain negatiboa, D-n positiboa da...). Beraz, *f´(x)* funtzioa gorakorra da.
f' gorakorra bada, *f'*-ren deribatua (*f''*) positiboa da.
Beraz, **f(x) konkaboa ⇒ f' gorakorra ⇒ f´´(a)>0**



II) Kurba zati hori **konkexua (ganbila)** da.
Zuzen ukitzaileen maldak gero eta txikiagoak dira. Beraz, deribatu funtzioa, *f´(x)*, funtzio beherakorra da.
f(x) konkexua ⇒ f' beherakorra ⇒ f´´(a)<0

Beharrezko baldintza**: x = a puntua inflesioa baldin badu, derrigorrean f´´(a)=0 izan behar du**. Baldintza hori ez da nahikoa. Lehen gertatutako arazo bera daukagu.

Inflexio puntuaren nahikotasun baldintza. *f´´(a)=0* izanik, nola ziurtatu *x=a* puntuan inflexiorik duen ala ez?. Modu honetan egin daiteke:

f´´(a)=0 izanda, horrez gain "*a*"ren alboetan bigarren deribatua zeinuz aldatzen bada, badu inflexio puntua;

f´´<0 f´´>0 | f´´>0 f´´<0
"*a*" | "*a*"
Inf-puntua | *Inf-puntua*

Alboetako bigarren deribatuen zeinuak berdinak badira ez du inflexio-punturik

ARIKETAK

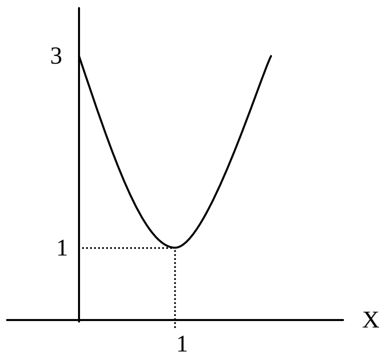
1.- Aurkitu $y = x^3 - 3x^2 + 1$ funtzioaren ahur eta ganbil tarteak eta inflexio-puntuak. Aurki itzazu ere gorapen eta beherapen tarteak eta mutur erlatiboak. Ondoren egizu adierazpen grafikoa

2.- Aurki itzazu *a* eta *b*ren balioak, $y = x^2 + ax + b$ funtzioak minimo erlatibo bat izan dezan (1, -9) puntuan.

3.- Bigarren mailako funtzio polinomiko batek badu inflexio punturik? Arrazoitu erantzuna. Eta hirugarren mailako batek?

4.- $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ funtzioa (0 , 0) puntutik pasatzen da eta inflexio puntua du (1 , -2)an. Aurkitu *a, b* eta *c*-ren balioak

5.- Zein da ondoko grafikoaren adierazpen analitikoa?



6.- Aztertu funtzio hauen gorapena eta beherapena, mutur erlatiboak, ahur eta ganbiltasuna eta inflexio-puntuak. Egizu adierazpen grafikoak

a) $y = 2x^2 + 4x + 3$; b) $y = 12x - 3x^2$; c) $y = x^3 - 1$

d) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$; e) $y = \frac{2}{x}$