Giza eta Gizarte Zientziak

Matematika I

1. eta 2. ebaluazioak

Zuzen erreala
Segida errealak
Ekuazio esponentzialak
Logaritmoak
Ekuazio linealen sistemak

ESTATISTIKA
- Aldagai diskretuak eta jarraiak
- Parametro estatistikoak
- Banaketa bidimensionala

Konbinatoria

Probabilitatea

Ignacio Zuloaga B.H.I. (Eibar)

ZENBAKI ERREALAK

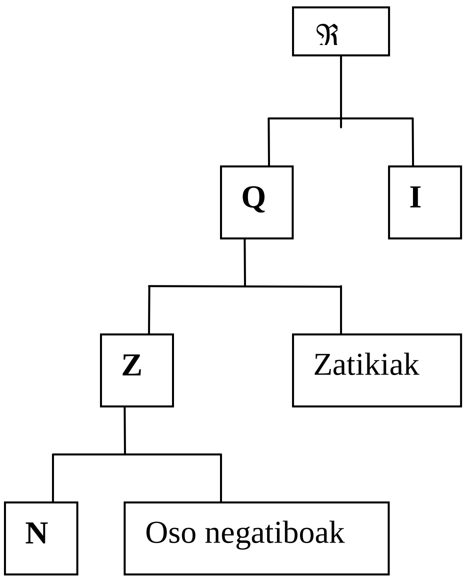
Zenbaki arruntak $\aleph$ = {0, 1, 2, 3, ...}

Zenbaki osoak Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

Zenbaki razionalak Q = zatikiak + zenbaki osoak
(Zatikiak: bi zenbaki osoren zatiketa)
↓
Zenbaki hamartar bezala adieraziz gero zifra hamartarrak finituak edo periodikoak dira.

Zenbaki irrazionalak $\Im$: infinitu zifra hamartar ez periodiko dituzten zenbakiak.

Zenbaki errealak $\Re$ = Razionalak + irrazionalak



Tarteak

Zenbaki errealen multzoan azpimultzoak defini daitezke; esaterako, zenbaki razionalek osatutakoa.

$\Re$ erabat ordenaturiko multzoa denez, tarteak eta inguruneak deritzen beste azpimultzo mota batzuk defini ditzakegu.

Adibideak

1- Idatz itzazu tarte eran jarraian definitzen diren multzoak:
a) $\{x \in \Re / x < -3\}$ b) $\{x \in \Re / -3 < x < 3\}$
c) $\{x \in \Re / -3 \leq x < 2\}$

Multzoen arteko eragiketak

A eta B multzoen bildura ($A \cup B$) A-ko elementu guztiek eta B-ko guztiek osatzen duten multzoa da.

A eta B multzoen ebakidura ($A \cap B$) A-k eta B-k komunak dituzten elementu guztiek osatutakoa da.

(Multzo hutsa, ϕ, elementurik ez daukana da.)

Ariketak

Zuzen errealean adierazi eta posible denean, tarte bakar baten bidez idatzi:

a) $(-5 , 3) \cap (1 , 8)$ b) $(-4 , 6) \cup [0 , 8)$
c) $[-3 , -1] \cap (-2 , 5]$ d) $[-3 , 0) \cup [-2 , \infty)$

INEKUAZIOAK

Inekuazioa adierazpen algebraikoen arteko desberdintza da.
Inekuazio baten soluzioa desberdintza betetzen duen x-en balio bat da.

Inekuazio bat ebaztea bere soluzio guztiak aurkitzea da. Normalean infinitu soluzio izaten dituzte eta soluzio horiek $\Re$-ko tarteetan taldekatzen dira.

Ezezagun bakarra duen inekuazio lineala ebazteko, ekuazioetan bezala jokatu behar dugu, baina kontuan izan behar ditugu desberdintzak.Soluzioak tarte infinitu bateko puntu guztiak izango dira.

Adibidea

Ebatzi $-2x + 1 < 7$

$-2x + 1 < 7$ Atal bakoitzean 1 kenduko dugu:
$-2x < 6$ Zati –2 egingo dugu (desberdintza aldatzen da)
$x > -3$

Soluzioak $\{ x / x > -3\} = (-3, \infty)$

Ariketak

1- Ebatzi hurrengo inekuazioak:

a) $3x + 2 \leq 10$ b) $2x - 3 < x - 1$ c) $\frac{3x-2}{2} \leq \frac{2x+7}{3}$

d) $-3x - 2 < 5 - \frac{x}{2}$ e) $\frac{3x}{5} - x > -2$ f) $5(2 + x) > -5x$

2- Egiaztatu zenbaki erreal guztiak ondorengo inekuazio honen soluzioak direla:
$5(x - 2) - 4(2x + 1) < -3x + 1$

3- Ziurtatu ez dagoela ondoko inekuazioa egiaztatuko duen zenbakirik:
$3(x - 2) + 7 < x + 2(x - 5)$

Zenbaki erreal baten balio absolutua

a zenbaki erreal baten balio absolutua **a** zenbaki bera izango da positiboa den kasuetan, edo alderantzizkoa, **-a** , negatiboa den kasuetan.

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \quad bada \\ -a, & a < 0 \quad bada \end{cases}$$

Adibideak

1- x-en zein baliorekin betetzen dira hurrengo berdintza hauek?

a) $|x|$ =3 b) $|x|$ = 0 c)) $|x|$ = $\sqrt{3}$

Ebazpena:

a) x = 3 eta
-x = 3 $\Rightarrow$ x = -3

b) x = 0 eta
-x = 0 $\Rightarrow$ x = 0

c) x = $\sqrt{3}$ eta
-x = $\sqrt{3} \Rightarrow$ x = -$\sqrt{3}$

2- x-en zein baliorekin betetzen dira hurrengo desberdintza hauek?

a) $|x|$ < 3 b) $|x|$ $\geq$3 c) $|x|$ $\leq$ 3

Ebazpena:

a) $\begin{cases} x < 3 & eta \\ -x < 3 \Rightarrow & x > -3 \end{cases}$ $\Rightarrow -3 < x < 3$ Emaitza (-3, 3)

b) $\begin{cases} x \geq 3 & eta \\ -x \geq 3 \Rightarrow & x \leq -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$-3$\geq x \geq 3$ Emaitza (-∞,-3] $\cup$ [3,∞)

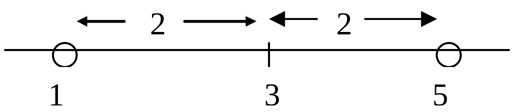
c) $\begin{cases} x \leq 3 & eta \\ -x \leq 3 \Rightarrow & x \geq -3 \end{cases}$ $\Rightarrow -3 \leq x \leq 3$ Emaitza [-3 , 3]

Distantzia erdiko puntu batera

Adibideak:

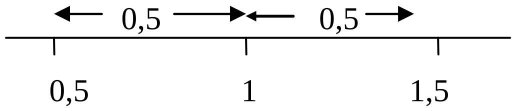
a) $|x - 3| < 2$

Zeintzu zenbaki dira 3-ra arteko distantzia 2 baino txikiagoa dena ?



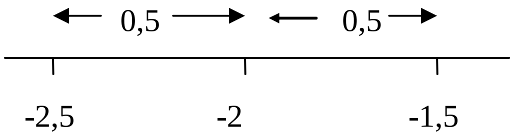
Soluzioa: (1 , 5)

b) $|x-1| \le 0{,}5$



Soluzioa: [0'5 , 1'5]

c) $|x+2| \le 0{,}5$ edo $|x-(-2)| \le 0{,}5$



Soluzioa: (-2'5 , -1'5)

Ariketa

Aurkitu x-ren balioak ondoko adierazpenetan:

$|x-7| < 3$; $|x| \le 1$; $|x-7| > 3$; $|x+3| < 2$; $|x| > 3$

ARIKETAK

1- Adierazi tarte moduan eta zuzen errealean ondorengo zenbaki multzoak:
   a) 3 baino zenbaki handiagoak
   b) $\{x \in \Re / 2 \leq x < 5\}$
   d) $\{x \in \Re / 3 \leq x \leq 7\}$

2- Adierazi hurrengo esaldi hau desberdintza eta tarte baten bitartez:
“x zenbakia -3 baino handiagoa edo berdina eta 5 baino txikiagoa da.”

3- Adierazi desberdintza eta tarte moduan eta irudikatu:
   a) x txikiagoa da -5 baino.
   b) 3 handiagoa da x baino edo berdina.
   c) x, -5 eta 1 bitartean dago.
   d) x, -2 eta 0 bitartean dago , muturrak barne.

4- Irudikatu grafikoetan eta adierazi tarte bidez honako desberdintza hauek:
a) $-3 \leq x \leq 2$ b) $5<x$ c) $x \geq -2$
d) $-2 \leq x < \frac{3}{2}$ e) $4<x<4{,}1$ f) $-3 \leq x$

5- Idatzi tarte hauetako x zenbakiak egiaztatzen dituen desberdintzak:
a) $[-2, 7]$ b) $[13, \infty)$ c) $(-\infty, 0)$
d) $(-3, 0]$ e) $[\frac{3}{2}, 6)$ f) $(-\infty, \infty)$

6- Adierazi tarteak erabiliz, hurrengo zenbaki multzoa:
“1 baino zenbaki txikiagoa, 0 kenduta”

7- Adierazi zuzen errealean honako zenbaki multzo hauek:
a) $(-3, -1)$ b) $[4, \infty)$ c) $\{x \in \Re / -2 \leq x < 5\}$
d) $[-2, 5) \cup (5, 7]$ e) $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ f) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

8- Idatzi tarte moduan $(A \cap B)$ eta $(I \cap J)$
a) $A = [-3, 2]$ $B = [0, 5]$
b) $I = [2, \infty)$ $J = (0, 10)$

9- Idatzi tarte bidez deberdintza hauek egiaztatzen dituzten zenbakiak:
   a) $x<3$ edo $x \geq 5$
   b) $x>0$ eta $x<4$
   c) $x \leq -1$ edo $x>1$
   d) $x<3$ eta $x \geq -2$

10- Idatzi tarteak erabiliz *x*-k zein balio izan beharko dituen kasu bakoitzean, erroa kalkulatu ahal izateko:
   a) $\sqrt{x-4}$ b) $\sqrt{2x-1}$ c) $\sqrt{-x}$
   d) $\sqrt{3-2x}$ e) $\sqrt{-x-1}$ f) $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

11- Adierazi tarteen bitartez $|x-3| \leq 2$ desberdintza egiaztatzen duten zenbakiak.

12- Aurkitu x-en zein baliok beteko duten hau: a) $|x-4| \leq 7$; b) $|x+3| \geq 6$

ZENBAKI ERREALEN SEGIDAK

Definizioa

Zenbaki errealen segidak **N** eta **R**-ren arteko aplikazioak dira. a_n-ren bidez adierazten dira.

$$
\begin{array}{lcl}
N & \xrightarrow{f} & R \\
1 & \longrightarrow & a_1 \\
2 & \longrightarrow & a_2 \\
3 & \longrightarrow & a_3 \\
\text{-------------------} & & \\
n & \longrightarrow & f(n) = a_n
\end{array}
$$

a_n gai orokorra deitzen da. Lehenengo gaia a_1 , bigarrena a_2 , e.a.

Adibideak

a) 2, 4, 6, ... segidaren gai orokorra $a_n = 2n$ da. $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, ...
b) 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, ... segidaren gai orokorra $a_n = \frac{1}{n}$ da. $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ...
c) 0, 1, 2, ... segidaren gai orokorra $a_n = n-1$ da. $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, ...

Gai orokorraren kalkulua

Normalean zaila izaten da kalkultzea. Badira bi segida mota bereziak, zeinentzat kalkulua erregela batzuren bidez egiten den; baina orain gure habilidadeari ezker asmatu beharko ditugu.

Ariketak

1- Idatzi ondorengo segiden gai orokorrak:
a) **–1, -4, -9, -16, ...**
b) $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, ...$
c) **2, 5, 10, 17, ...**
d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}. \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, ...$

2- Ondorengo segidetan kalkulatu a_1, a_3, a_{10}, a_{2n}, a_{n+1}

a) $a_n = \frac{1}{n+1}$ **b)** $a_n = \sqrt{n^2 - 1}$ **c)** $a_n = \frac{4n-1}{2-n}$

Segida gorakor eta beherakorra

a_n segida gorakorra izango da, edozein n-rentzat $a_n \leq a_{n+1}$ betetzen bada.

a_n beherakorra izango da, edozein n-rentzat $a_n \leq a_{n+1}$ betetzen bada.

Segida baten gai guztiak berdinak baldin badira, segida konstantea deitzen da.

Hau kontutan hartuta, segida bat gorakorra ala beherakorra den frogatzeko, $a_{n+1} - a_n$ kenketaren ikurra zein den jakitea nahikoa da.

$a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow a_n$ gorakorra da
$a_{n+1} - a_n < 0 \Rightarrow a_n$ beherakorra da

Adibidea

Frogatu ondorengo segida gorakorra ala beherakorra den $a_n = \frac{1}{n}$.

- Lehenengo a_{n+1} kalkulatuko dugu: $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$
- Ondoren $a_{n+1} - a_n$ kenketa kalkulatuko dugu, hau da : $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$$\frac{n \cdot 1 - (n+1) \cdot 1}{(n+1) \cdot n} = \frac{n - n - 1}{(n+1) \cdot n} = \boxed{\frac{-1}{(n+1) \cdot n}}$$

- Orain emaitza honen ikurra aztertu behar da.
  Zenbakitzailea negatiboa da (-1).
  Izendatzailea positiboa (n zenbaki arrunta da, beraz n eta n+1 positiboak dira. Ondorioz (n+1)n positiboa da.

  $\Rightarrow \frac{negatiboa}{positiboa} = negatiboa$, hau da
- $a_{n+1} - a_n < 0 \Rightarrow a_n$ segida beherakorra da.

Ariketak

Frogatu ondorengo segidak gorakor edo beherakorrak diren:

a) $a_n = 2n$ b) $a_n = \frac{n+1}{n}$ d) $a_n = n^2 + 5n$ e) $a_n = \frac{n+2}{3+n}$

Segida bornatuak

$\{a_n\}$ segidak goi bornea izango du $\forall$ n-rentzat $M \geq a_n$ betetzen duen M-rik baldin badago.

$\{a_n\}$ segidak behe bornea izango du $\forall$ n-rentzat $m \leq a_n$ betetzen duen m-rik baldin badago.

$\{a_n\}$ bornatua da, alde bietatik bornatua bada, hau da $\forall$ n-rentzat $m \leq a_n \leq M$.

Adibideak

Aurkitu ondorengo segiden behe eta goi borneak:

a) {2, 4, 6, 8,…}	**M ez dago**	**m = 2**
b) {1, 4, 9, 16,…}	**M ez dago**	**m = 1**
c) {-2, -4, -6, -8,…}	**M = -2**	**m ez dago**
d) $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},...\right\}$	**M =** $\frac{1}{2}$	**m = 0**

Segiden arteko eragiketak

- Batuketa

(a_n) eta (b_n) bi segida izanik: $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$

- **Zenbaki bat eta segida baten arteko biderketa**

k zenbaki bat eta (a_n) segida bat izanik: $k \cdot (a_n) = (k \cdot a_n)$

(a_n) eta (b_n) bi segida izanik:

- **Biderketa**

$$(a_n)\cdot(b_n) = (a_n \cdot b_n)$$

- **Zatiketa**

$$(a_n) \div (b_n) = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

- **Berreketa**

$$(a_n)^{(b_n)} = \left(a_n^{\,b_n}\right)$$

SEGIDEN LIMITEAK

Hainbat segidatako gaiak gero eta gehiago hurbiltzen dira balio jakin batera, eta horri **segidaren limitea** esaten zaio; balio hori $\lim_{n\to\infty} a_n$-ren bidez adierazten dugu, edo lim a_n –ren bidez, besterik gabe.

<u>Adibidea</u>

Har dezagun $a_n = \frac{1}{n}$ gai orokorra duen segida.

Hona segida horretako gaiak: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, …, $a_{1000} = \frac{1}{1000}$, …

Argi ikus daiteke balioak gero eta hurbilago daudela 0 baliotik, beraz lim $\frac{1}{n} = 0$

Limite finitua duten segidei **segida konbergente** esaten zaie, eta limiterik ez dutenei edo limite infinitua dutenei **segida dibergente** deitzen zaie.

<u>Segiden limiteen kalkulua</u>

Ikus dezagun, ondoren, zenbait segidaren limiteak nola kalkulatzen diren:

- **Segida konstante baten limitea**
  Baldin $a_n = k$ bada, $k \in \Re$ izanik, orduan: lim $a_n = k$.
- **Segida polinomiko baten limitea**
  Maila altueneko monomioa bakarrik hartzen da kontutan.
  - Monomioa positiboa bada, limitea $+\infty$ da eta
  - Monomioa negatiboa bada, limitea $-\infty$.

  <u>Adibideak</u>

  a) $\lim(7n^3 + 1) = \infty$ b) $\lim\left(-2n^2 + n\right) = -\infty$

- **Zenbakitzaile konstanteko segida arrazional baten limitea**
  Baldin $a_n = \frac{k}{b \cdot n^p}$ bada, $k \in \Re$ eta $p \in \mathrm{N}$ izanik, orduan lim $a_n = 0$

  <u>Adibideak</u>

  a) lim $\frac{3}{2n^4} = 0$ b) lim $\frac{-2}{5n^2} = 0$

- **Polinomioen zatidura baten limitea**

  Baldin $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ bada, P(n) eta Q(n) polinomioak izanik, segidaren limitea zenbakitzailearen eta izendatzailearen mailarik handieneko monomioen arteko zatiduraren limitea da.
  (Praktikan, lehenengo mailarik handieneko monomioak hartuta geratzen den zatidura sinplifikatu egin behar da eta ondoren, limitea kalkulatu).

  Adibideak

  a) $\lim\left(\dfrac{6n^2+n-2}{2n^2+1}\right)=\lim\dfrac{6n^2}{2n^2}=\lim 3=3$

  b) $\lim\dfrac{1-n^2}{n}=\lim\dfrac{-n^2}{n}=\lim(-n)=-\infty$

  c) $\lim\dfrac{n^2+6n-2}{3n^3+1}=\lim\dfrac{n^2}{3n^3}=\lim\dfrac{1}{3n}=0$

Segiden eragiketekin erlazionaturiko propietateak

- $\lim(a_n+b_n)=\lim a_n+\lim b_n$
- $\lim(a_n-b_n)=\lim a_n-\lim b_n$
- $\lim(a_n\cdot b_n)=\lim a_n\cdot\lim b_n$
- $\lim(a_n/b_n)=\lim a_n/\lim b_n$ baldin $b_n\neq 0$
- $\lim((k\cdot a_n)=k\cdot\lim a_n$
- $\lim\ a_n^{b_n}=(\lim a_n)^{\lim b_n}$
- $\lim(a_n)^k=(\lim a_n)^k$
- $\lim\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{\lim a_n}$

Adibideak

a) $\lim(3n^2+\dfrac{1}{2n})=\lim 3n^2+\lim\dfrac{1}{2n}=\infty+0=\infty$

b) $\lim(\dfrac{2n}{3n}.\dfrac{5n^2}{3n^2})=\lim\dfrac{2n}{3n}.\lim\dfrac{5n^2}{3n^2}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{3}=\dfrac{10}{9}$

c) $\lim 2.\dfrac{2n}{3n^2}=2.\lim\dfrac{2n}{3n^2}=2.0=0$

d) $\lim\left(\dfrac{4n^3}{3n^3}\right)^2=\left(\lim\dfrac{4n^3}{3n^3}\right)^2=\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{16}{9}$

e) $\lim\sqrt[3]{\dfrac{2}{3n}}=\sqrt[3]{\lim\dfrac{2}{3n}}=\sqrt[3]{0}=0$

Zenbait segiden limiteak kalkulatzeko propietate hauek erabili beharko dira.

Batzuetan, propietate hauek erabiliz honelako adierazpenak ager daitezke: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, edo $\infty \cdot 0$. Kasu hauetan, limitea *indeterminazio* bat dela esango dugu, hau da, ezin dugu zuzenean limitearen emaitza eman, eta beste tresna batzuk erabili behar ditugu hura kalkulatzeko.

Indeterminazioak

- $\frac{\infty}{\infty}$

Horrelako indeterminazio hau polinomioen zatidura dugunean agertzen da eta kasu honetan ikusi dugu zein den limitea kalkulatzeko metodoa. Metodo bera erabiliz hurrengo limiteak era kalkula daitezke:

Ariketak

1- $\lim \frac{3n+1}{\sqrt{4n^2+1}+2n}$ 2- $\lim \frac{2n^2+5n}{\sqrt{3n^5+2n}+\sqrt{n^3}}$ 3- $\lim \frac{5-3n^2+4n}{\sqrt{2n^2-1}+n}$

4- $\lim \frac{3}{\sqrt{3n^3-2}+2n}$ 5- $\lim \frac{2n-3}{\sqrt{2n^2-3}+\sqrt{n^2-n}}$

- $\infty - \infty$

Bi kasu bereiztuko ditugu:

a) *Bi segida arrazionalen kenketa*

Indeterminazioa kentzeko, aipatutako eragiketa egiten da segida arrazional bat ateratzeko, eta ondoren segida honen limitea kalkulatzen da.

Adibidea

Kalkulatu ondorengo limitea: $\lim \left(\frac{n^2-1}{n} - \frac{2n^3+1}{n+1} \right)$

Ebazpena:

Kenketa baten limitea denez ,bi segiden arteko kenketaren limitea kalkulatzeko propietatea erabili daiteke, hau da,

$$\lim \frac{n^2-1}{n} - \lim \frac{2n^3+1}{n+1} = \lim \frac{n^2}{n} - \lim \frac{2n^3}{n} = \lim n - \lim 2n^2 = \infty - \infty$$

Emaitza hau indeterminazioa da, beraz ezin dugu oraindik emaitza eman. Horretarako, metodoa deskribatu denean esan denez, zatikien arteko kenketa egin behar da. Hau da:

$$\lim \left(\frac{n^2-1}{n} - \frac{2n^3+1}{n+1} \right) = \lim \frac{(n^2-1)\cdot(n+1)-(2n^3+1)\cdot n}{n\cdot(n+1)} =$$

$$\lim \frac{(n^3+n^2-n-1)-(2n^4+n)}{n^2+n} = \lim \frac{-2n^4+n^3+n^2-2n-1}{n^2+n} = \lim \frac{-2n^4}{n^2} =$$

$\lim (-2n^2) = -\infty$

Ariketak:

Kalkulatu hurrengo limiteak

1- $\lim\left(\frac{n^2+5n}{3-n} - \frac{2n^2+2}{n} \right)$

2- $\lim\left(\frac{2+3n}{5n+2n^2} - \frac{3+n}{5-n} \right)$

3- $\lim\left(\frac{n^3+3n}{n+1} - \frac{n^3-4n}{n} \right)$

b) *Erro karratudun segiden arteko kenketa*

Kasu honetan, indeterminazioa kentzeko segidaren adierazpen konjokatuarekin biderkatu eta zatituko dugu. Adierazitako eragiketak egin eta zatidura lortzen dugunean orain arte erabili den metodoa jarraituko da.

Adibidea

Kalkulatu $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$

Ebazpena:

Aurreko kasuan bezala, propietateak erabiliz ondorengoa lortzen da $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = \lim \sqrt{n+1} - \lim \sqrt{n-1} = \infty - \infty$ Indeterminazioa

Beraz deskribatutako metodoa erabiliz, segidaren adierazpen konjokatua $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ da, eta berorrekin biderkatu eta zatituko dugu:

$$\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = \lim \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})\cdot(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} =$$

$$\lim \frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \lim \frac{2}{2\cdot\sqrt{n}} = 0$$

Ariketak

Kalkulatu hurrengo limiteak:

1- lim $\left(\sqrt{n^2+9}-4n\right)$

2- lim $\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

3- lim $\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n}\right)$

4- lim $\left(\sqrt{n^4+7}-n^2\right)$

5- lim $\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{2n+1}\right)$

6- lim $\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$

7- lim $\left(\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+2}\right)$

- $0\cdot\infty$

Indeterminazioa kentzeko, segiden arteko biderketa egin eta gero limitea kalkulatu.

Adibidea

Kalkulatu lim $\frac{n+1}{2n^2}\cdot\frac{n^3}{n}$

Zuzenean segida bakoitzaren limitea kalkulatu eta biderketa egiten badugu, $0\cdot\infty$ indeterminazioa dugu.

Beraz lehenengo biderketa egin eta gero limitea kalkulatuko dugu:

$$\lim\frac{n+1}{2n^2}\cdot\frac{n^3}{n} = \lim\frac{n^4+n^3}{2n^3} = \lim\frac{n^4}{2n^3} = \lim\frac{n}{2} = \infty$$

- 1^∞

Horrelako limiteak kalkulatzeko, lehenengo "e" zenbakia definituko dugu. "e" zenbakia limite baten emaitza da eta horrela definitzen da:

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$(a_n)^{b_n}$ moduko segida baten limitea kalkulatzerakoan 1^∞ indeterminazioa ematen bada, hau kentzeko ondorengo berdintza erabiltzen da:

$$\lim (a_n)^{b_n} = e^{\lim b_n (a_n-1)}$$

Adibidea

Kalkulatu lim $\left(1+\frac{1}{n+6}\right)^n$

Ebazpena:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n+6}\right)^n = e^{\lim n\cdot\left(1+\frac{1}{n+6}-1\right)} = e^{\lim n\cdot\frac{1}{n+6}} = e^{\lim\frac{n}{n+6}} = e^1 = e$$

Ariketak

1- $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-3}$

2- $\lim\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^{2n+3}$

3- $\lim\left(\frac{n+1}{n-5}\right)^{6n+2}$

4- $\lim\left(\frac{2n+5}{2n-3}\right)^{4n}$

5- $\lim\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n-3}$

6- $\lim\left(\frac{n^2+5n}{n^2-3}\right)^{2n}$

7- $\lim\left(\frac{3n-5}{4+3n}\right)^{3n-2}$

8- $\lim\left(1+\frac{3}{n}\right)^{4n}$

ARIKETAK

Kalkulatu hurrengo limiteak:

1- $\lim \dfrac{3n+2}{5n+4}$; 2- $\lim \left(\dfrac{2}{5n} - \dfrac{3n}{2n^2+7} \right)$

3- $\lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)$; 4- $\lim \left(\sqrt{9n^2+3} - 3n \right)$

5- $\lim \dfrac{n^2+2}{3n-n^2}$; 6- $\lim \sqrt{\dfrac{9n-2}{3n-6}}$

7- $\lim \left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2-3n+2} \right)$; 8- $\lim \left(\sqrt{n^2+n+1} - n \right)$

9- $\lim \left(\dfrac{2n+5}{6n} \right)^3$; 10- $\lim \left(\dfrac{2n^2-1}{2n+1} - \dfrac{n^2}{n-1} \right)$

11- $\lim \left(\dfrac{3n-5}{4+3n} \right)^{3n-2}$; 12- $\lim \left(\sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2+2} \right)$

13- $\lim \left(\dfrac{2n+5}{2n-3} \right)^{4n}$; 14- $\lim \dfrac{n^2+6n-2}{3n^2+1}$

15- $\lim \sqrt[3]{\dfrac{n^2+5}{3n^2+6}}$; 16- $\lim \left(\dfrac{n+2}{n-2} \right)^{2n+3}$

17- $\lim \sqrt{n^2+1-n}$; 18- $\lim \dfrac{(n+1)^2-3n}{2-n}$

19- $\lim \left(\dfrac{5n+2n^2}{2n^2+3n} \right)^{3n+1}$; 20- $\lim \left(\sqrt{4n^2-2n} - 2n \right)$

21- $\lim \sqrt[3]{\dfrac{2n-3}{2+3n^2}}$

EKUAZIO ESPONENTZIALAK

Ekuazio esponentzialak ezezaguna berretzailean duten ekuazioak dira.

Adibidez:

$a)\ 3^{1-x^2} = \dfrac{1}{27}$; $b)\ 5^{x^2-5x+6} = 1$; $c)\ 3^{1-x^2} = 2$; $d)\ 2^x + 2^{x+1} = 12$

Propietateak

$a^0 = 1$; $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$; $\sqrt[x]{a^n} = a^{\frac{n}{x}}$

$a^x . a^y = a^{x+y}$; $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; $a^x . b^x = (a.b)^x$; $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

<u>Azter ditzagun goian idatzitako lau adibideak</u>:

a) eta b) ekuazioak ebazteko, bigarren atala lehenengo atalaren oinarri bereko berretura moduan adierazi behar dugu: $\dfrac{1}{27} = 3^{-3}$; $1 = 5^0$

c) kasuan ezin dugu horrelakorik egin 2 zenbakia ez delako 3 zenbakiaren berretura osoa ez eta zatikizkoa ere. Ekuazio horiek atal bietan logaritmoak hartuta ebatzi behar ditugu

d) kasuan, berriz, aldagaiaren aldaketa bat egin beharko dugu.

Ebatzi ditzagun a), b) eta d), eta utz dezagun c) ariketa logaritmoak aztertu arte.

a) $3^{1-x^2} = \dfrac{1}{27}$

$\dfrac{1}{27}$ adieraziko dugu 3 oinarriko berretura moduan: $\dfrac{1}{27} = \dfrac{1}{3^3} = 3^{-3}$

$$3^{1-x^2} = \frac{1}{27} \rightarrow 3^{1-x^2} = 3^{-3} \rightarrow 1 - x^2 = -3 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$b)\ 5^{x^2-5x+6} = 1$

1 zenbakia 5 oinarriko berretura moduan adieraziko dugu: $1 = 5^0$

$$5^{x^2-5x+6} = 5^0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

Soluzioak: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$

$d)\ 2^x + 2^{x+1} = 12$

Aldagai aldaketa hau egingo dugu: $2^x = a$

Horrela, $2^{x+1} = 2^x . 2 = 2a$ izango da.

Beraz, $a + 2a = 12 \quad \rightarrow \quad 3a = 12 \quad \rightarrow \quad a = 4 \quad \rightarrow \quad 2^x = 4 \quad \rightarrow \quad x = 2$

Ariketa ebatziak: a) $\dfrac{5^{x+1}}{\left(\sqrt{5}\right)^{2x+3}} = 125^{6-x}$; b) $3^x + 3^{2-x} = 10$

a) $\dfrac{5^{x+1}}{\left(\sqrt{5}\right)^{2x+3}} = 125^{6-x} \quad \rightarrow \quad 5^{x+1-\frac{2x+3}{2}} = 5^{3(6-x)} \quad \rightarrow \quad x + 1 - \dfrac{2x+3}{2} = 3(6 - x)$

$2x + 2 - 2x - 3 = 36 - 6x \quad \rightarrow 6x = 37 \quad \rightarrow$ **soluzioa: x =** $\dfrac{37}{6}$

b) $3^x + 3^{2-x} = 10$

$3^x = a \quad \rightarrow \quad a + \dfrac{3^2}{a} = 10 \quad \rightarrow \quad a^2 - 10a + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \dfrac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \dfrac{10 \pm 8}{2}$

$a = 9$ eta $a = 1$; $3^x = 9 \quad \rightarrow \quad x = 2$

$3^x = 1 \quad \rightarrow \quad x = 0$

Kalkulagailuaren erabilpena

- Idazkera zientifikoa: $5{,}7 \,.\, 10^9$ idazteko $\rightarrow$ 5,7 $\boxed{\text{exp}}$ 9

  $2{,}94 \,.\, 10^{-13}$ idazteko $\rightarrow$ 2,94 $\boxed{\text{exp}}$ 13 $\boxed{\pm}$

- Azter itzazu tekla hauek: $\sqrt{\ }$, x^2 , $\sqrt[3]{\ }$, x^y , $x^{1/y}$

- $y = 10^x$ eta $y = e^x$ funtzioen balioak lortu ahal izateko 10^x eta e^x teklak izaten dituzte, hurrenez hurren.

Gogoratu
e zenbakia zenbaki irrazionala da eta bere balioa hau da:
e = 2,7182818...
Goi mailako matematikan agertzen den zenbakirik garrantzitsuenetarikoa da.

Ariketak

1. Ebatzi ondoko ekuazioak

$a)\ 2^{\frac{1}{x}} = 16$; $b)\ \sqrt{7^x} = \dfrac{1}{49}$; $c)\ 2^x . 2^{x+1} = 8$; $d)\ 2^x + 2^{1-x} = 3$

$e)\ 2^{3x} = 0{,}5^{3x+2}$; $f)\ 3^{4-x^2} = \dfrac{1}{9}$; $g)\ 10^x . 100 = \sqrt{100^2}$

$h)\ 5^{2x-1} = \sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}}$; $i)\ 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 7 = 0$; $j)\ 9^x - 2.3^{x+2} + 81 = 0$

$k)\ \sqrt{a^{x-1}} . \sqrt[4]{a^{2x+1}} . \sqrt[6]{a^{x+1}} = \sqrt{a^{2x-1}}$; $l)\ \dfrac{27^{x+2}}{9^{2x-2}} = 81^{3x-4}$; $m)\ 9^x - 3^x - 6 = 0$

2.Ebatzi ondoko sistemak: $a)\ \left.\begin{array}{l} \sqrt[x]{x+y} = 2 \\ (x+y)^3 = 2097152 \end{array}\right\}$ $\quad b)\ \left.\begin{array}{l} 2.3^x + 2^{y+3} = 86 \\ 3^x - 2^y = 23 \end{array}\right\}$

LOGARITMOAK

Funtzio logaritmikoa funtzio esponentzialaren alderantzizkoa da.

$\log_2 8 = 3$ da zeren $2^3 = 8$ baita

$\log_5 25 = 2$ da $5^2 = 25$ delako

$\log_3 \frac{1}{9} = -2$ da $3^{-2} = \frac{1}{9}$ delako

$\log_{100} 0{,}01 = -1$ da $100^{-1} = 0{,}01$ delako

....

a oinarriko *P*-ren logaritmoa $\log_a P$ idazten da. Bere balioa *x* da baldin $a^x = P$ bada; hau da, $\log_a P = x \iff a^x = P$

$\boxed{\text{Ez dago zenbaki negatiboen logaritmorik}}$

<u>Adibidea.</u> $\log_x 169 = 2$ bada, zenbat da *x*-ren balioa?

$x^2 = 169 \quad \to \quad x = 13$ Soluzio negatiboak (-13) ez du balio.

Ariketa.

Aurkitu *x*-ren balioak ondoko ekuazioetan:

$\log_2 128 = x \quad ; \quad \log_x \frac{1}{81} = -4 \quad ; \quad \log_4 x = \frac{1}{2}$

Logaritmo hamartarrak

Oinarria 10 denean ez da ezer adierazten azpiindizean; hau da, $\log_{10} A$ eta $\log A$ bat dira.

Hori dela eta, $\log 10000 = 4 \quad \leftrightarrow \quad 10^4 = 10000$

$\log 0{,}1 = -1$

....

$\boxed{\log}$ teklak, kalkulagailuan idazten duzun zenbakiaren logaritmo hamartarra ematen dizu.

Oinarri aldaketa. Zenbaki baten *a* oinarriko logaritmoa lortzeko, logaritmo hamartarretatik abia gaitezke ondoko formularen arabera: $\boxed{\log_a P = \frac{\log P}{\log a}}$

Beraz, kalkulagailuarekin edozein oinarritako logaritmoak lor ditzakegu:

$\log_a P: \quad P \ \boxed{\log} \ \boxed{\div} \ a \ \boxed{\log} \ \boxed{=}$

Adibidez.

$\log_5 80:\quad \log_5 80 = \dfrac{\log 80}{\log 5} = 2{,}7227$; *80* $\boxed{\log}$ $\boxed{\div}$ *5* $\boxed{\log}$ $\boxed{=}$

$\log_{12} 100:\quad \log_{12} 100 = \dfrac{\log 100}{\log 12} = 1{,}8532$; *100* $\boxed{\log}$ $\boxed{\div}$ *12* $\boxed{\log}$ $\boxed{=}$

Propietateak

- Oinarriaren logaritmoa 1 da: $\log_a a = 1$
- $\log_a a^x = x$. Esaterako, $\log_3 3^4 = 4$; $\log_5 \sqrt{5} = 1/2$ ...
- Edozein oinarritan, 1 zenbakiaren logaritmoa 0 da
  $\log_4 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad 4^0 = 1$; $\log 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad 10^0 = 1$ ....
- Biderkadura baten logaritmoa: $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
- Zatidura baten logaritmoa: $\log_a (\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$
- Berretura baten logaritmoa: $\log_a x^p = p.\log_a x$

<u>Ariketa ebatziak</u>

1. Har ditzagun logaritmo hamartarrak ondoko kasuetan:

$$a)\ A = \frac{x^2 . y^3}{z} \qquad ; \qquad b)\ B = \frac{100\sqrt[3]{x}}{y^2 z^7}$$

Ebazpena:

$$a)\ \log A = \log(x^2 y^3) - \log z = \log x^2 + \log y^3 - \log z = 2\log x + 3\log y - \log z$$

$$b)\ \log B = \log(100\sqrt[3]{x}) - \log(y^2 z^7) = \log 100 + \log x^{1/3} - (\log y^2 + \log z^7) =$$

$$= 2 + \frac{1}{3}\log x - 2\log y - 7\log z$$

2. Egin dezagun alderantzizko ariketa; hau da, kalkulatu *E* ondoko kasuan:

$$\log E = 4\log a + \frac{1}{2}\log b - \log c - \frac{3}{5}\log d$$

Ebazpena:

$$\log E = \log a^4 + \log\sqrt{b} - (\log c + \log\sqrt[5]{d^3}) \ \rightarrow\ \log E = \log a^4\sqrt{b} - \log c\sqrt[5]{d^3} \ \rightarrow\ E = \frac{a^4\sqrt{b}}{c\sqrt[5]{d^3}}$$

3. *log 2 = 0,3010* bada, zenbat da *log 20, log 2000* eta *log 500?*

log 20 = log 10.2 = log 10 + log 2 = 1 + 0,3010 = 1,3010
log 2000 = log 1000.2 = log 1000 + log 2 = 3 + 0,3010 = 3,3010
log 500 = log 1000 : 2 = log 1000 – log 2 = 3-0,3010 = 2,6990

Ariketak

1. Kalkulagailua erabili barik, lor itzazu ondoko balioak:

$$a)\log_5 625 \quad ; \quad b)\log 0{,}001 \quad ; \quad c)\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. Aurkitu hurrengo logaritmoen balioak kalkulagailuaren laguntzaz.

$$a)\ \log 60 \qquad ; \qquad a)\log_2 1500 \qquad ; \qquad b)\log_{100} 200$$

3. Egia ala gezurra al dira ondoko erlazioak? Arrazoitu.

$$a)\ \log 2x + \log 1 = \log(2x+1)$$
$$b)\ \log x + \log 10 = 3 \quad \rightarrow \quad x.10 = 3$$
$$c)\ \log 5x - \log 5 = \log x$$
$$d)\ \log x + \log 7 = \log y \quad \rightarrow \quad x + 7 = y$$
$$e)\ \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$$

4. Har itzazu logaritmo hamartarrak ondoko kasuetan:

$$a)\ A = \sqrt[3]{\frac{0{,}01}{5}} \qquad b)\ B = \frac{1000}{\sqrt{80^5 .6}} \qquad c)\ C = \frac{\sqrt[4]{100\,x^3\,y}}{0{,}1(1+z)^5}$$

5. Aurki ezazu M eta N ondoko kasuetan:

a) $\log M = 3 + 2\log a + \frac{1}{3}\log b - \frac{1}{2}\log d$

b) $\log N = \log a + \frac{1}{2}\log b - \frac{5}{3}\log(1-c)$

Ekuazio logaritmikoak

Adibidez,

$a)\ \log x + \log 50 = 3 \quad ; \quad b)\ 5\log_2 (x+3) = \log_2 32 \quad ; \quad c)\ \log(x+1) - \log\left(\dfrac{1}{2x-8}\right) = 2$

Ekuazio horiek ebazteko, kontuan hartu behar dira logaritmoen propietateak. Gainera, jakinean egon zenbaki positiboen logaritmoak bakarrik existitzen direla.

Ebatz ditzagun goiko hiru ekuazioak.

a) $\log x + \log 50 = 3$

Kontuan izan *log A + log B = log (A.B)* dela eta *3 = log 1000* dela.

Beraz, $\log(50x) = \log 1000 \quad \rightarrow \quad 50x = 1000 \quad \rightarrow \quad x = 20$

b) $5\log_2 (x+3) = \log_2 32$

Kontuan izango dugu $a\log b = \log b^a$ dela.

Beraz, $\log_2 (x+3)^5 = \log_2 2^5 \quad \rightarrow \quad x+3 = 2 \quad \rightarrow \quad x = -1$

c) $\log(x+1) - \log\left(\dfrac{1}{2x-8}\right) = 2$

$$\log\left(\dfrac{(x+1)}{\dfrac{1}{2x-8}}\right) = \log 100$$

$(x + 1)(2x - 8) = 100 \rightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 100 \rightarrow x^2 - 3x - 54 = 0 \rightarrow$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+216}}{2} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = 9 \\ x = -6 \end{matrix}}$ x = - 6 soluzioak ez du balio **Soluzioa: x = 9**

```
Ariketa
Ebatzi ondoko ekuazio logaritmikoak
```

$a)\ 3\log x - \log 32 = \log\dfrac{x}{2} \quad ; \quad b)\ 2\log x - \log(x-16) = 2 \quad ; \quad c)\ 3\log x - 2\log(x/3) = 2\log 3 + \log 2$

$d)\ 2\log x = 3 + \log\dfrac{x}{10} \quad ; \quad e)\ \log\sqrt{3x+5} + \log\sqrt{x} = 1 \quad \rightarrow \quad f)\ 4\log_3 (x^2+1) = \log_3 625$

$g)\ \log x + \log 2x + \log 4x = -3 \quad ; \quad h)\ \log\sqrt{3x+1} - \log\sqrt{2x-3} = 1 - \log 5$

....

Ekuazio esponentzialetan aipatu dugu ekuazio mota bat logaritmoen bidez ebatzi behar dena; esaterako, $3^x = 7$. Bigarren atala ezin denez 3 oinarriko berretura moduan adierazi, logaritmoak hartu behar ditugu eta kalkulagailua erabili. Hau da:

$$\log 3^x = \log 7 \quad \to \quad x \log 3 = \log 7 \quad \to \quad x = \frac{\log 7}{\log 3} = \frac{0{,}8451}{0{,}4771} = 1{,}77$$

<u>Ariketa ebatzia</u>.

Ebatz dezagun $2^{x+1}.3^{x+1} = \sqrt{30}$ ekuazioa:

$$(2.3)^{x+1} = \sqrt{30} \quad \to \quad \log 6^{x+1} = \log 30^{1/2} \quad \to \quad (x+1)\log 6 = \frac{1}{2}\log 30$$

$$\to \quad x+1 = \frac{\log 30}{2\log 6} \quad \to \quad x+1 = \frac{1{,}4771}{2(0{,}7781)} = 0{,}9492 \quad \to \quad x = -0{,}0508$$

Ariketa

Ebatzi ekuazio hauek logaritmo hamartarrak hartuta:

$a)\ \frac{1}{4^x} = 27 \quad ; \quad b)\ 3^{x-9} = \sqrt{73} \quad ; \quad c)\ 5^{x+2} = 40 \quad (\text{sol}: \ x = 0{,}29)$

Logaritmo nepertarrak

Goi mailako matematikan $y = \log_e x$ funtzioa oso garrantzitsua da. Logaritmo nepertarra esaten zaio, eta honela adierazten da: $y = \ln x$ edo $y = L\,x$

Logaritmoen propietateak erabilita zera betetzen da:

$$\ln 1 = 0 \quad ; \quad \ln e = 1 \quad ; \quad \ln e^P = P$$

Ariketa. Zenbat dira $\ln\frac{1}{e}$ eta $\ln\sqrt{e}$?

$\boxed{\text{ln}}$ teklak, kalkulagailuan idazten den zenbakiaren logaritmo nepertarra ematen du; adibidez, ln 20 $\to$ 20 $\boxed{\text{ln}}$

<u>Ariketa ebatziak</u>.

1. Ebatz ezazu $3^x = 7$ ekuazioa logaritmo nepertarrak hartuta.

$$\ln 3^x = \ln 7 \quad \to \quad x \ln 3 = \ln 7 \quad \to \quad x = \frac{\ln 7}{\ln 3} = \frac{1{,}9459}{1{,}0986} = 1{,}7712$$

2. Ebatzi *ln (x-3)* = *2* ekuazioa.

$$x - 3 = e^2 \quad \to \quad x-3 \approx 7{,}4 \quad \to \quad x \approx 10{,}4$$

e^2: 2 $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{e^x}$

Ariketak

1. Logaritmoen definizioa erabiliz, kalkulatu:

a) $\log(0{,}0001)$; b) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$; c) $\log_3\left(\sqrt[5]{3}\right)$; d) $\log_5\left(\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{5}}\right)$; e) $\ln\frac{1}{e^2}$

Soluzioak: a) –4 ; b) –3/2 ; c) 1/5 ; d) 7/6 e) –2

2. log 2 = 0,3010 bada, zenbat da $\log\sqrt{0{,}2}$? Eta $\log\sqrt[3]{64}$?

3. Ebatzi ondoko ekuazioak:

a) $\frac{1}{2}\log(2x+3)=\log x$; $b)\log(x-1)+\log(x+6)=\log(3x+2)$

Soluzioak: a) x=3 ; b) x=2

4. Ebatzi ondoko ekuazioak:

$a)\ 10^{x^2-1}=400$; b) $e^{2x}=40$ (sol: x = 1,84)

5. Lortu x-ren balioa ondoko kasuan (erabili logaritmoen propietateak):

$a)\ \ln x=\ln\sqrt{A}+5\ln B-3\ln C$; $b)\ \ln x=\frac{4}{5}\ln A-\ln B+2\ln C-\frac{1}{2}\ln D$

6. Bakterio bat $y=1+e^{x/10}$ funtzioaren arabera ugaltzen da (y:milaka bakterio ; x: orduak).
   a) Zenbat bakterio zeuden hasieran?
   b) Eta handik 10 ordura?
   c) Kalkulatu zenbat denbora beharko duen kopurua bikoizteko.

EKUAZIO LINEALEN SISTEMAK

Ekuazio linealak

Adibidea

"Parisera astebete pasatzera joateak 300 euro balio du. Ikasgelan 5.400 euro bildu baditugu, zenbat lagun joan gaitezke?"

300 x = 5400 Honelako adierazpenari , "ekuazio lineala" deitzen zaio.

Era orokorrean **a.x = c** adierazten da. Zein da soluzioa ? ....

Demagun, baldintza berri hau eransten diogula : ... "*eta gurasoak langabezian dituzten ikasleek 150 baino ez dute ordainduko* ". Orain, hauxe da ekuazioa:

300 x + 150 y = 5400 .

Orokorrean, **a.x + b.y = c**. Zein da soluzioa ? ....

Zenbat eta baldintza gehiago sartu, ekuazioa luzeagoa egiten da .

"*a*" eta "*b*" koefizienteak dira ; "*x*" eta "*y*" ezezagunak dira eta "*c*" gai independentea

Ekuazio sistemak

Adibidea

Hiru "butaka" eta sei "palko" sarrerengatik 150 euro ordaindu dira . Aztertu honako hauek ordaindu diren kasuak ere :

a) Bi butaka eta bi palko sarrerengatik 70 euro
b) Butaka sarrera bat eta bi palkogatik 50 euro ordaindu dira
c) Bi butaka eta lau palko sarrerengatik 110 euro.

Bilatu jarleku bakoitzaren prezioa, posible den kasuetan .

a) $\left.\begin{array}{l} 3x+6y=150 \\ 2x+2y=70 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=50 \\ x+y=35 \end{array}\right\}$ **x = 20** **y = 15**

Soluzio bakarra. Sistema bateragarri determinatua

b) $\left.\begin{array}{l} 3x+6y=150 \\ x+2y=50 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=50 \\ x+2y=50 \end{array}\right\} \rightarrow$ **x = 50 - 2y**

Infinitu soluzio. Sistema bateragarri indeterminatua

c) $\left.\begin{array}{l} 3x+6y=150 \\ 2x+4y=110 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=50 \\ x+2y=55 \end{array}\right\} \rightarrow$ **0 = 5 ?**

Ez du soluziorik. Sistema bateraezina

Sistema baliokideak

Soluzio berberak dituzten ekuazio-sistemak sistema baliokideak direla esaten da.

Zein transformazio erabil ditzakegu sistema batetik beste sistema baliokide batera pasatzeko?

- Ekuazioen ordena aldatzea: $\left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ x+2y=15 \end{array}\right\}$ eta $\left.\begin{array}{l} x+2y=15 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$ baliokideak dira.

- Ekuazio baten atal biak zero ez den zenbaki erreal batez biderkatzea:
$\left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ x+2y=15 \end{array}\right\}$ eta $\left.\begin{array}{l} 2x-2y=4 \\ x+2y=15 \end{array}\right\}$ baliokideak dira.

- Ekuazio bati zenbaki erreal batez biderkaturiko, sistemako beste ekuazio bat batzea:
$\left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ x+2y=15 \end{array}\right\}$ eta $\left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ 4x-y=21 \end{array}\right\}$ baliokideak dira zeren $ek_2 \to ek_2 + 3ek_1$ baita.

Gauss-en metodoa

Ekuazio linealen sistemak ebazteko, Gauss-en metodoa erabil daiteke. Metodo horren bidez, hasierako sistema *sistema mailakatu baliokide* batean bihurtzen da, eta, ondoren, oso erraz ebatzi ahal da.

Adibidez, ikus dezagun nola ebatz daitekeen $\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=5 \\ x-y+2z=-3 \\ 3x-2y+z=-2 \end{array}\right\}$ sistema.

Pausuak:

I) Ezezagunen koefizienteekin eta gai independenteekin ondoko matrizea (koadroa) eratzen dugu: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$

Lehen zutabea *x*-ri dagokio, 2.a *y*-ri, 3. zutabea *z*-ri eta 4.a gai independenteei.

x ezezagunak lehen errenkadan duen koefizientea 2 da, baina hobe litzateke 1 baliokoa izatea, kalkuluak errazagoak izan daitezen. Horretarako, lekuz trukatuko ditugu lehenengo bi errenkadak; hau da:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

II) Lor dezagun matrize triangeluar baliokide bat ; hau da, **diagonal nagusiaren azpiko elementu guztiak 0 izatea lortuko dugu**. Horretarako:

Bigarren errenkadari –2 balioaz biderkaturiko lehenengo errenkada gehituko diogu, eta hirugarrenari –3 balioaz biderkaturiko lehenengoa; hau da:

$$\begin{array}{l} E_2 \to E_2 - 2E_1 \\ E_3 \to E_3 - 3E_1 \end{array} \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \end{array}\right)$$

Hirugarren errenkada eta bigarren zutabeko balioa, 1 dena, 0 bihurtzea gelditzen zaigu. Kalkuluak errazteko asmoz, hobe dugu beren gaineko balioa 3 izan beharrean 1 edo –1 izatea. Kasu honetan, hori lortzeko nahikoa da azken bi errenkadak trukatzea; hau da:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \end{array}\right)$$

Orain, azken errekadaren ordez, hirugarren errenkada gehi bigarrena bider –3 idatziko dugu:

$$E_3 \to E_3 - 3E_2 \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{array}\right)$$

III) Lortutako matrize triangeluar horri dagokion ekuazio-sistema hauxe da:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 2z = -3 \\ y - 5z = 7 \\ 10z = -10 \end{array}\right\}$$

Sistema hori hasieran emandako sistemaren baliokide da.

Era horretan, sistema mailakatu bat lortu dugu. Soluzioa aurkitzeko, azken ekuaziotik hasiko gara ebazten; ondoren, 2. ekuaziora pasatuko gara, eta, azkenean 1.ra. Hau da,
z = **-1**

y = 7+5(-1) = **2**
x = -3 +2 – 2 (-1) = **1**

Soluzio bakarra: **(1 , 2 , -1)**
Sistema bateragarri zehatza

2. adibidea

Gauss-en metodoaren aplikazioan hainbat egoera ager daitezke. Azter dezagun zer gertatzen den errenkadekin eragiketak egitean elementu guztiak nuluak dituen errenkada bat azaltzen denean; hau da: $\left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Adibidez, ebatz dezagun $\left.\begin{array}{l} 2x+y \quad\;\; =4 \\ x+ \quad\;\; z \;=4 \\ 3x+y+z=8 \end{array}\right\}$ sistema

I) Adierazpen matriziala: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right)$

Truka ditzagun lehen eta gigarren errenkadak, goi-ezkerreko erpineko balioa 1 izan dadin:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

II) Egin ditzagun 0 lehen zutabeko 2 eta 3 balioak. Horretarako,

$$\begin{array}{l} E_2 \to E_2 - 2E_1 \\ E_3 \to E_3 - 3E_1 \end{array} \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Hirugarren errenkada eta bigarren zutabeko 1 balioa 0 bihurtzeko, nahikoa da hirugarren errenkadari bigarrena kentzea: $E_3 \to E_3 - E_2$. Honela gelditzen zaigu matrizea:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Azken errenkadak ez du inolako garrantzirik sistema ebazteko eta, horregatik ezabatu egingo dugu: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$

III) Matrize horri dagokion sitema hauxe da: $\left.\begin{array}{r} x+ \quad\;\; z=4 \\ y-2z=-4 \end{array}\right\}$

Kasu honetan, sistemak **2** ekuazio eta **3** ezezagun ditu. **Sistema bateragarri indeterminatua da; infinitu soluzio ditu.**

Soluzioak lortzeko, prozedura hau erabiliko dugu:

Azken ekuazioan ezezagun bat bakanduko dugu (adibidez, *y*), eta beste ezezaguna (*z*) parametro lez adieraziko dugu letra greko batekin (λ, μ ...). Hau da:

$z = \lambda$
$y = 2\lambda - 4$

Azkenik, lehenengo ekuazioan *x* ezezaguna kalkulatuko dugu: $x = 4 - z = 4 - \lambda$

λ parametroa duten gai guztiak ekuazioen bigarren atalera pasatu behar dira

Soluzioa: $(4-\lambda \ , \ 2\lambda-4 \ , \ \lambda)$

3. adibidea.

Ebatz dezagun $\left.\begin{aligned} x-2y+3z &= -3 \\ 2x+y &= 2 \\ -x-8y+9z &= 3 \end{aligned}\right\}$ sistema

Ekuazio-sistema horrekin elkarturiko matrize zabaldua hauxe da:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -8 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

Gauss-en metodo aplikatuko dugu:

$$\begin{aligned} E_2 &\to E_2 - 2E_1 \\ E_3 &\to E_3 + E_1 \end{aligned} \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -6 & 8 \\ 0 & -10 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

$$E_3 \to E_3 + 2E_2 \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right)$$

Hirugarren errenkada ekuazio honi dagokio: 0x + 0y + 0z = 16 $\to$ 0 = 16

Beraz, **sistema bateraezina** da.

Laburpena

Sistemaren ebazpenean hiru kasu dira posible. Taula honetan biltzen ditugu hirurak:

Sistema	Lortzen den matrize triangeluarra (adibidea)	Soluzioak
Bateragarri determinatua	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$	**Soluzio bakarra** 2z = 6 $\rightarrow$ z=3 y-3=2 $\rightarrow$ y=5 x-5+2.3 = 9 $\rightarrow$ x= 10
Bateragarri indeterminatua	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ Ekuazio baino ezezagun gehiago.	**Infinitu soluzio** $z = \lambda$ $y = 2 + z = 2 + \lambda$ $x = 9 + (2 + \lambda) - 2\lambda = 11 - \lambda$
Bateraezina	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$	0 = 6 ?? **Ez du soluziorik**

Ariketa ebatziak

1. Sailkatu eta ebatzi, posible bada sistema hau: $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ x+y-2z=-3 \\ -2x+5y-z=5 \\ 3x-2y+z=2 \end{array}\right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[E_4 \to E_4 - 3E_1]{\substack{E_2 \to E_2 - E_1 \\ E_3 \to E_3 + 2E_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[E_4 \to E_4 - 4E_2]{E_3 \to E_3 - 3E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_4 \to E_4 - E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 \to -\frac{1}{6}E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Laugarren errenkada alde batera utz dezakegu: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Sistema baliokide mailakatua hauxe da: $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ y+z=5 \\ z=3 \end{array}\right\}$

Soluzioa: **z = 3**
y + 3 = 5 → **y=2**
x – 2(2) + 3 = 0 → **x = 1**

Soluzio bakarra. **Sistema bateragarri determinatua**

2. Sailkatu eta ebatzi, posible bada sistema hau: $\left.\begin{array}{l} x-y+2z+3t=1 \\ 2x+3y-z+t=-3 \\ x+y+z+t=0 \end{array}\right\}$

Ebazpena:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 \to E_3 - E_1]{E_2 \to E_2 - 2E_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_2 \to \frac{1}{5}E_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 \to E_3 - 2E_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sistema baliokidea: $\left.\begin{array}{r} x-y+2z+3t=1 \\ y-z-t=-1 \\ z \quad =1 \end{array}\right\}$

Ekuazio-sistema horrek ekuazio baino ezezagun gehiago ditu; **bateragarri indeterminatua** da. **Infinitu soluzio ditu**

Soluzioak:

Higarren ekuazioan $\boxed{z = 1}$ ateratzen da.

Bigarren ekuazioan $y - 1 - t = -1 \;\to\; y = t$

t aldagaia λ parametroaren bidez adieraziko dugu; beraz $\boxed{t = \lambda}$. Horrela, $\boxed{y = \lambda}$

Lehenengo ekuazioan $x - \lambda + 2.1 + 3\lambda = 1 \;\to\; \boxed{x = -1 - 2\lambda}$

Soluzioa: $(-1-2\lambda \;,\; \lambda \;,\; \lambda \;,\; 1)$

Ariketak

1. Emanik ekuazio-sistema hau: $\left.\begin{array}{l} 3x-y+2z=1 \\ x+y+z=3 \\ 2x-2y-3z=-2 \end{array}\right\}$ aztertu

   hirukote hauetatik zein diren sistemaren soluzio:

   a) (4,0,3)   b) (1,-1,2)   c) (1,2,0)

2. Sailkatu eta ebatzi, posible bada, honako sistema hauek:

$$a)\ \left.\begin{array}{l} 2x+3y-z=15 \\ 2x-y+z=-3 \\ x-y \qquad =0 \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{l} -2x-4y=2 \\ -8x-16y=1 \end{array}\right\} \qquad c)\ \left.\begin{array}{l} x+y-z=10 \\ x-y+z=5 \end{array}\right\}$$

$$f)\ \left.\begin{array}{l} x-4y=-5 \\ 2x+y=-1 \\ 2x-8y=-10 \end{array}\right\} \qquad g)\ \left.\begin{array}{l} 2x-y+z=1 \\ x-2y+3z=4 \\ x+y+3z=0 \end{array}\right\} \qquad h)\ \left.\begin{array}{l} 3x+2y-z=1 \\ -x+3y-2z=-1 \\ x+5y-3z=0 \end{array}\right\}$$

3. Sailkatu eta ebatzi, posible bada, honako sistema hauek:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+5y=16 \\ x+3y-2z=-2 \\ x+z=4 \end{array}\right\}$ (Baterag. Det: x=-2, y=4, z=6)

b) $\left.\begin{array}{l} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=3 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\}$ (Bateraezina)

c) $\left.\begin{array}{r} 2x+y+3z=0 \\ 4x+2y-z=0 \\ 6x+3y+2z=0 \end{array}\right\}$ (Baterag indet: $x=-\dfrac{\lambda}{2}$; $y=\lambda$; $z=0$)

d) $\left.\begin{array}{l} x+2y+z=9 \\ x-y-z=-10 \\ 2x-y+z=5 \end{array}\right\}$ (Baterag. det: x=-1 , y=1 , z=8)

e) $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=3 \\ 2x-y+z=-1 \end{array}\right\}$ (Baterag. indet: $x=3\lambda-4$, $y=\lambda$, $z=7-5\lambda$)

f) $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x+y+2z=2 \\ 2x+y+z=11 \\ y+z=7 \end{array}\right\}$ (Bateraezina)

g) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=3 \\ x+y+z=1 \\ 2x-3y+z=-1 \end{array}\right\}$ (Baterag det: x=2/3 , y=2/3 , z=-1/3)

ESTATISTIKA

Gizartean eragin handia duen matematikaren adar bat da ESTATISTIKA; datu-kantitate handiak nola bildu, antolatu eta analizatu aztertzen du, ondorioak ateratzeko asmoz. Hasiera batean, erroldak egiteko sortu izan arren, gaur egun eremu askotan erabiltzen da, esaterako, biologian, nekazaritzan, psikologian, ea.

Oinarrizko kontzeptuak

Pentsa dezagun ikastetxe bateko ikasleen altuerak neurtu nahi ditugula, edo ikasleek gustokoen duen ikasgaia jakin nahi dugula.

Populazioa. Aztertu nahi den elementuen multzoa. Gure kasuan ikastetxeko ikasle guztiak.

Indibiduoa. Populazioaren elementu bakoitza.

Lagina. Populazioaren edozein zati; adibidez, 100 ikasle.

Ezaugarriak. Aztertu nahi den propietatea; adibidez, “ikasleen altuera”, “gustuko duen asignatura”...

Bi motako ezaugarriak bereiz ditzakegu:

- *Kuantitatiboak*, zenbakizko balioak hartzen dituenean. Izan daitezke:
  - **Diskretuak**, balio konkretu batzuk soilik har ditzakeenean (seme-alaba kopurua, hileko egunak...)
  - **Jarraiak.** Edozein balio har dezake (altuerak, pisua...). Kasu honetan, balioak tartekatzea komeni da.
- *Kualitatiboak***.** Balio ez-numerikoak ditu. Adibidez, asignatura gustokoena, mutila ala neska...

TAULAK

➢ Hona hemen 40 ikasleen notak:

7	3	6	7	3	4	2	2	10	1
6	8	5	9	1	9	3	6	6	8
6	3	5	5	8	5	7	3	6	5
7	3	6	1	9	8	2	4	5	4

Aldagaia **diskretua** da.

Nota bakoitzari *(x_i)* bere **maiztasun absolutua** *(f_i)* erantsiko diogu:

x_i	f_i
1	3
2	3
3	6
4	3
5	6
6	7
7	4
8	4
9	3
10	1
	40

Gehienetan komeni da maiztasun erlatiboa (f_r) ere adieraztea:

f_r-ren balioa ehunetan zein batekotan ematen da (biak batera ez)

x_i	f_i	f_{r_i}	f_{r_i} (%)
1	3	0,075	7,5
2	3	0,075	7,5
3	6	0,15	15
4	3	0,075	7,5
5	6	0,15	15
6	7	0,175	17,5
7	4	0,1	10
8	4	0,1	10
9	3	0,075	7,5
10	1	0,025	2,5
	40	**1**	**100**

Maiztasun metatua.

Balio bakoitzeraino dauden aurreko balioen arteko batura da maiztasun metatua **(f_a):**

x_i	f_i	f_{r_i} (%)	f_a	f_a(%)
1	3	7,5	3	7,5
2	3	7,5	6	15
3	6	15	12	
4	3	7,5	15	
5	6	15	21	
6	7	17,5	28	
7	4	10	32	
8	4	10	36	
9	3	7,5	39	
10	1	2,5	40	100
	40	**100**		

- **Datuak taldeka adierazita**

34 pertsonen altuerak zentimetrotan:

172	170	180	167	168	175	166	170	176	178
191	184	185	184	170	175	163	181	174	185
172	174	175	176	185	181	173	173	180	182
165	168	168	174						

<u>Datuak antolatu. Pausuak:</u>

- Hartu balio handiena (B_{max}) eta txikiena (B_{min}): $R = B_{max} - B_{min} = 191 - 163 = 28$
- Zehaztu tarte kopurua (ez larregi ez gutxiegi) eta zabalera:

$$\text{Tarte kopurua} \cong \sqrt{\text{datu kopurua}} = \sqrt{34} \approx 6$$

$$\text{Tartearen tamaina} \cong \frac{28}{6} \approx 5$$

Datu guztiak sartu behar dira taulan eta datu bat ezin da bi tarte ezberdinetan egon. Horregatik, balio bat tarte batekoa edo bestekoa den ziurtatzeko, bi motako tarteak eraiki daitezke:

x_i	f_i
162,5 – 167,5	4
167,5 – 172,5	8
172,5 – 177, 5	10
177,5 182,5	6
182,5 –187,5	5
187,5 – 192,5	1
	34

x_i	f_i
[163 , 168)	4
[168 , 173)	8
[173 , 178(	10
[178 , 183)	6
[183 , 188)	5
[188 , 193)	1
	34

Bitarte bakoitzak bere erdiko puntua hartzen du ordezkaritzat (c_i). *Klase-marka* deitzen zaio: 165’5, 170’5, 175’5, 180’5...

ARIKETAK

1. Ondoko koadroan 50 familien seme-alaba kopurua adierazten da:

2	1	0	3	0	1	1	2	2	0
1	1	3	2	2	4	1	0	5	2
3	2	1	0	1	2	2	1	1	0
4	2	2	3	3	1	0	1	2	2
5	4	3	2	2	3	2	1	0	1

Bildu datuak taula batean

Adierazi maiztasun absolutuak eta metatuak.

2. 40 lagunen pisuak honako hauek dira:

62	64	60	56	55	70	48	46	62	76
40	44	48	50	68	48	60	69	78	46
76	72	65	49	50	52	54	65	68	62
43	64	60	60	54	75	70	55	58	60

Bildu datuak taula batean

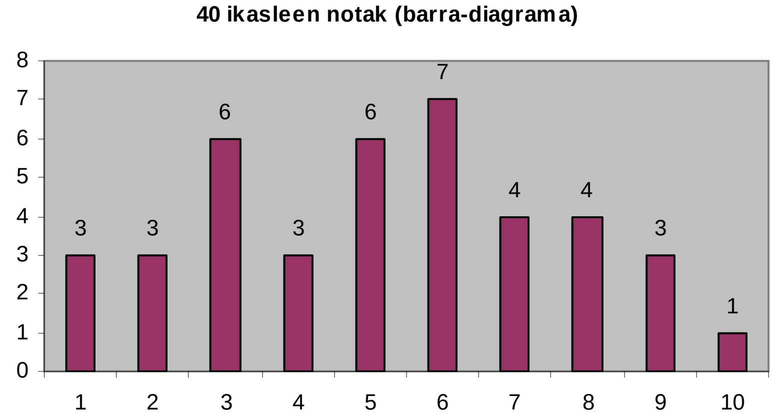
Adierazi maiztasun absolutuak eta metatuak.

GRAFIKOAK

Aldagaia diskretua denean

40 ikasleen notak. Barra-diagrama

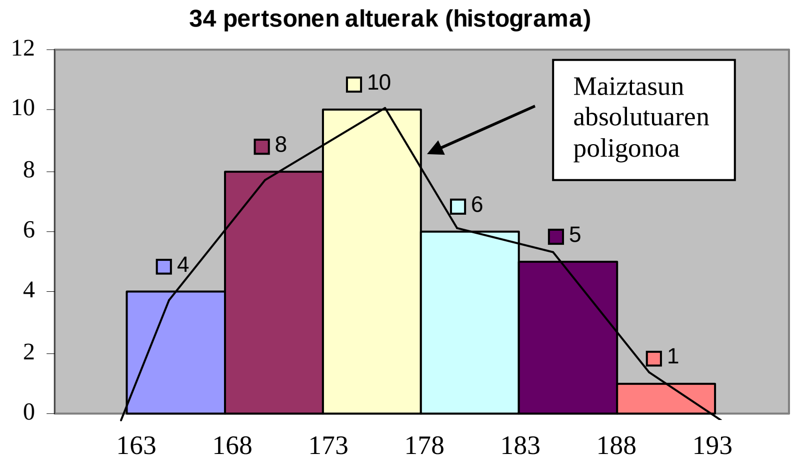
x_i	f_i
1	3
2	3
3	6
4	3
5	6
6	7
7	4
8	4
9	3
10	1
	40



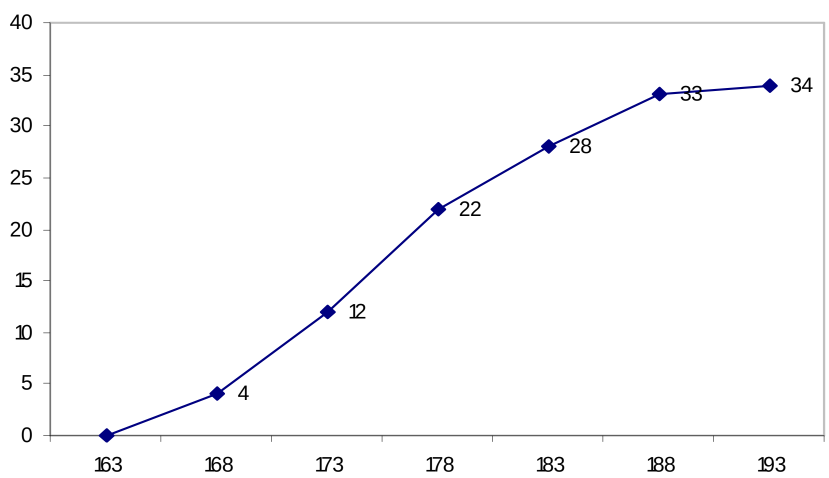
Datuak tartekatuta taulatzen direnean.

34 pertsonen altuerak
Histograma

x_i	f_i	f_a	fa(%)
[163 , 168)	4	4	12%
[168 , 173)	8	12	35%
[173 , 178)	10	22	65%
[178 , 183)	6	28	82%
[183 , 188)	5	33	97%
[188 ,193)	1	34	100%
	34		



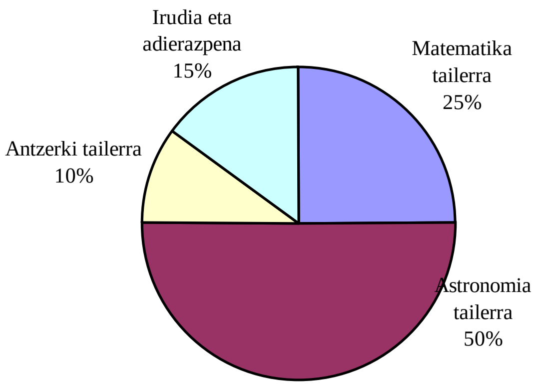
Maiztasun metatuaren poligonoa



Sektore-diagramak

Ikastetxe bateko D.B.H-ko 100 ikasleek gustukoen duten asignaturen taula :

Asignatura gustukoena	f_i
Matematika tailerra	25
Astronomia tailerra	50
Antzerki tailerra	10
Irudia eta adierazpena	15



ARIKETAK

1. Egizu 3. orrialdeko 50 seme-alaben taularen grafikoa
2. Egizu 3. orrialdeko 40 lagunen pisuen grafikoa
3. Batxilergoko lehen mailan matrikulatutako ikasleek lau aukera hautatu dituzte:

Aukerak	A	B	C	D
Ikasle kopurua	72	54	42	30

Egizu:

a) Barra-diagrama

b) Sektore-diagrama

4. Institutu batean matrikulatutako lehen mailako 100 ikasleei 100 galderen test bat banandu zaie, eta hona hemen ateratako puntuazioak:

Puntuazioak	[20 , 30)	[30 , 40)	[40 , 50)	[50 , 60)	[60 , 70)	[70 , 80)	[80 , 90)	[90 , 100)
Ikasle kopurua	8	8	12	20	18	14	12	8

a) Egizu maiztasun taula

b) Adierazi grafikoki banaketa

PARAMETRO ESTATISTIKOAK

Orain arte, tauletan eta grafikoetan bildu ditugu datuak. Bai batean zein bestean, datu gehiegi erabiltzen da, eta ez da modu egokiena ondorio azkarrak ateratzeko.

Parametro estatistikoen helburua da zenbaki gutxirekin banaketaren informazio orokorra eta zorrotza ematea.

Bi motako parametroak aztertuko ditugu:

- Erdialdeko informazioa ematen diguten parametroak: *batezbesteko aritmetikoa*, *moda*, *mediana*...
- Datuak elkarrengandik zenbatean dauden sakabanatuta adierazten diguten parametroak: *batezbesteko desbidazioa*, *bariantza*, *desbidazio estandarra*...

<u>Erdialdeko informazioa ematen diguten parametroak:</u>

➢ Batezbeste aritmetikoa

1. <u>adibidea.</u>

1 , 3 , 5 , 6 , 8 zenbakien batezbeste aritmetikoa: $\bar{x} = \dfrac{1+3+5+6+8}{5} = 4{,}6$

2. <u>adibidea.</u>

$\mathbf{x_i}$	2	4	6	8	9
$\mathbf{f_i}$	3	2	5	1	10

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{2.3+4.2+6.5+8.1+9.10}{21} = 6{,}76$$

3. <u>adibidea.</u>

37 ikasleko gela batean, test bat egin dute, eta taula honeta jasotzen dira emaitzak:

Puntuazioa	[22,28)	[28,34)	[34,40)	[40,46)	[46,52)	[52,58)	[58,64)	[64,70)
Ikasle kopurua	1	1	2	7	12	9	3	2

$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{f_i}$	$\mathbf{c_i}$	$\mathbf{f_i.c_i}$
[22,28)	1	25	25
[28,34)	1	31	31
[34,40)	2	37	74
[40,46)	7	43	301
[46,52)	12	49	588
[52,58)	9	55	495
[58,64)	3	61	183
[64,70)	2	67	134
	37		1831

c_i : klase-marka

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1} c_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1831}{37} = 49{,}5$$

ARIKETAK

1.- Umeen klinika batetan, ume txiki bat ibiltzen hasten den egunean, jarraian eta jausi gabe zenbat metro ibiltzen den neurtu da, ondoko datuak lortuz

Metro kopurua	2	3	5	6	10
Ume kopurua	16	6	4	2	8

a) Osatu maiztasun metatuen taula

b) Egizu maiztasun absolutuen diagrama-barra

c) Kalkulatu batezbesteko aritmetikoa

2.- Elkarren segidako berrogei sesiotan, enpresa batek burtsan dituen akzioak honela kotizatzen dira:

x	f_i
[320 , 330)	7
[330 . 340)	9
[340 . 350)	10
[350 , 360)	8
[360 , 370)	6
	40

a) Osatu maiztasun metatuen taulak

b) Egizu maiztasun absolutuen diagrama-barra

c) Egizu maiztasun metatuen poligonoaren grafikoa

c) Kalkulatu batezbesteko aritmetikoa.

- **Moda.** Gehien errepikatzen den aldagaiaren balioa da.

1. adibidea.

32 lagunek erabiltzen dituzten zapata-zenbakiak:

Zapata-zenbakia (x_i)	37	38	39	**40**	41	42	43	44
Lagun kopurua (f_i)	3	2	4	7	4	5	4	3

Lagun kopururik handienak erabiltzen duen zapata zenbakia 40 da. **Moda = 40**

2. adibidea

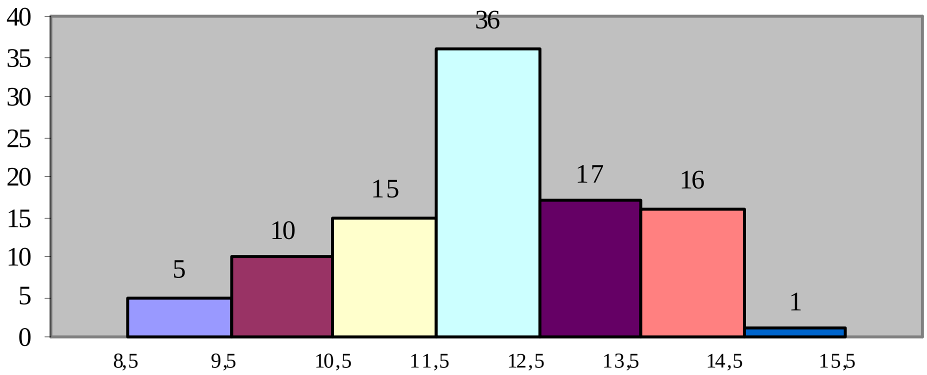
2 , 3 , 4 , 4 , 4 , 5 , 6 , 6 , 8 , 8 , 8 , 9 (**Modabikoa: 4 eta 8**)

3. adibidea.

Umeak zenbatgarren hilabetean hasten diren oinez zehazteko, pediatra batek bere kontsultako 100 umeri buruzko datu hauek bildu ditu:

Hilabeteak	[8,5-9,5)	[9,5-10,5)	[10,5-11,5)	[11,5-12,5)	[12,5-13,5)	[13,5-14,5)	[14,5-15,5)
Ume-kopurua	5	10	15	36	17	16	1

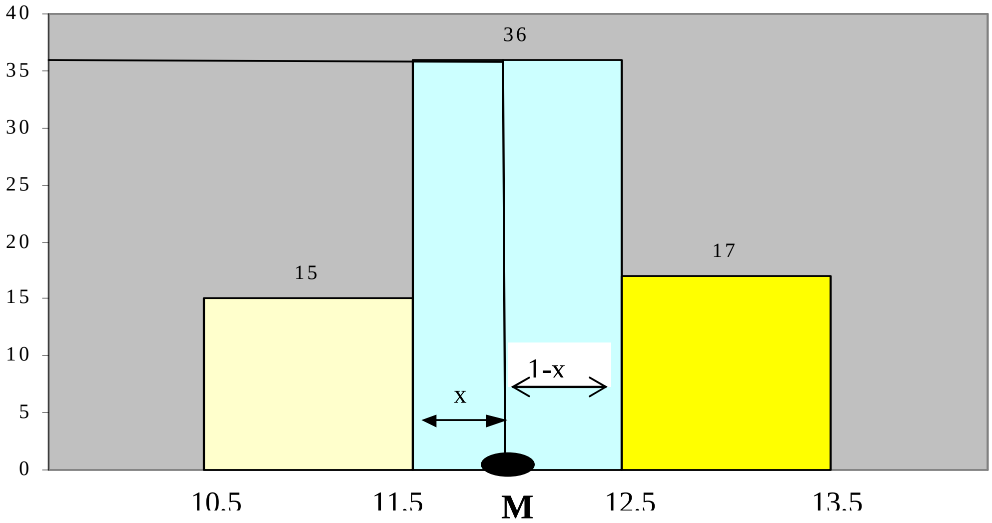
Kopururik handiena [11,5 – 12,5) tartean dago; beraz, moda tarte horretakoa da.



Zein da zehazki bere balioa?

Histograman, kontuan hartzen ditugu [10,5 – 11,5) , [11,5 – 12,5) eta [12,5 – 13,5) tarteak.

Ondoko erlazio matematikoa betetzen da:



$$\frac{x}{36-15} = \frac{1-x}{36-17}$$

$19x = 21 - 21x \rightarrow$

$x = 0{,}525$

Moda (M) $= 11{,}5 + 0{,}525 =$

$= 12{,}025$

> ARIKETA. 7. orrialdeko bi ariketen taulak hartuta (36 umeen oinez hastea, eta burtsako 40 akzioak), aurkitu kasu bakoitzean modaren balioa.

➢ Mediana

Datu guztiak txikienetik handienera ordenatzean, erdiko lekuan kokatzen den balioari **mediana** deitzen diogu. Balio horretatik behera, populazioaren erdia egongo da (%50) eta berarengandik gora beste erdia.

Koartilak. Populazioaren laurdena (%25) behe aldetik eta hiru laurdena (%75) banatzen duen balioari *behe-koartila* (**Q_1**) deritzo. Eta, alderantziz, behetik %75 eta goitik %25, *goi-koartila* (**Q_3**)

Populazioa 10 zatitan banatzen bada, **dezilak** lortzen dira. Esaterako, 4. dezilak (D_4) populazioaren %40a behe aldetik izango du eta %60a goitik

Era berean, 100 zatitan bananduz, **zentilak** (edo **perzentilak**) lortzen dira.

Mediana nola kalkulatu.

- **Aldagaia diskretua denean**

1. adibidea

x_i	f_i	f_a
1	2	2
2	1	3
3	2	5
4	2	7
5	6	13

Datu kopurua (13) bakoitia da.

Erdia: $\frac{13}{2} = 6{,}5$

f_a = 6,5 balioa 5 eta 7ren artean dago. Bietatik handienari, 7ri, dagokion x_i balioa hartzen da medianatzat; hau da, 4. Beraz, **Me = 4** .

Datuak ordenatuz, erdiko balioa da mediana:

1 1 2 3 3 **4** 5 5 5 5 5 5

<------50%------>¡<-----50%--------->

2. adibidea.

x_i	f_i	f_a
1	3	3
2	1	4
3	2	6
4	3	9
5	3	12

$$\frac{12}{2} = 6$$

f_a = 6 balioa x_i = 3-ri dagokio. $\text{Mediana} = \frac{3 + \text{hurrengokoa}(4)}{2} = 3{,}5$

Datuak ordenatuz:

1 1 1 2 3 3 4 4 4 5 5 5

<----------------------> <----------------------->

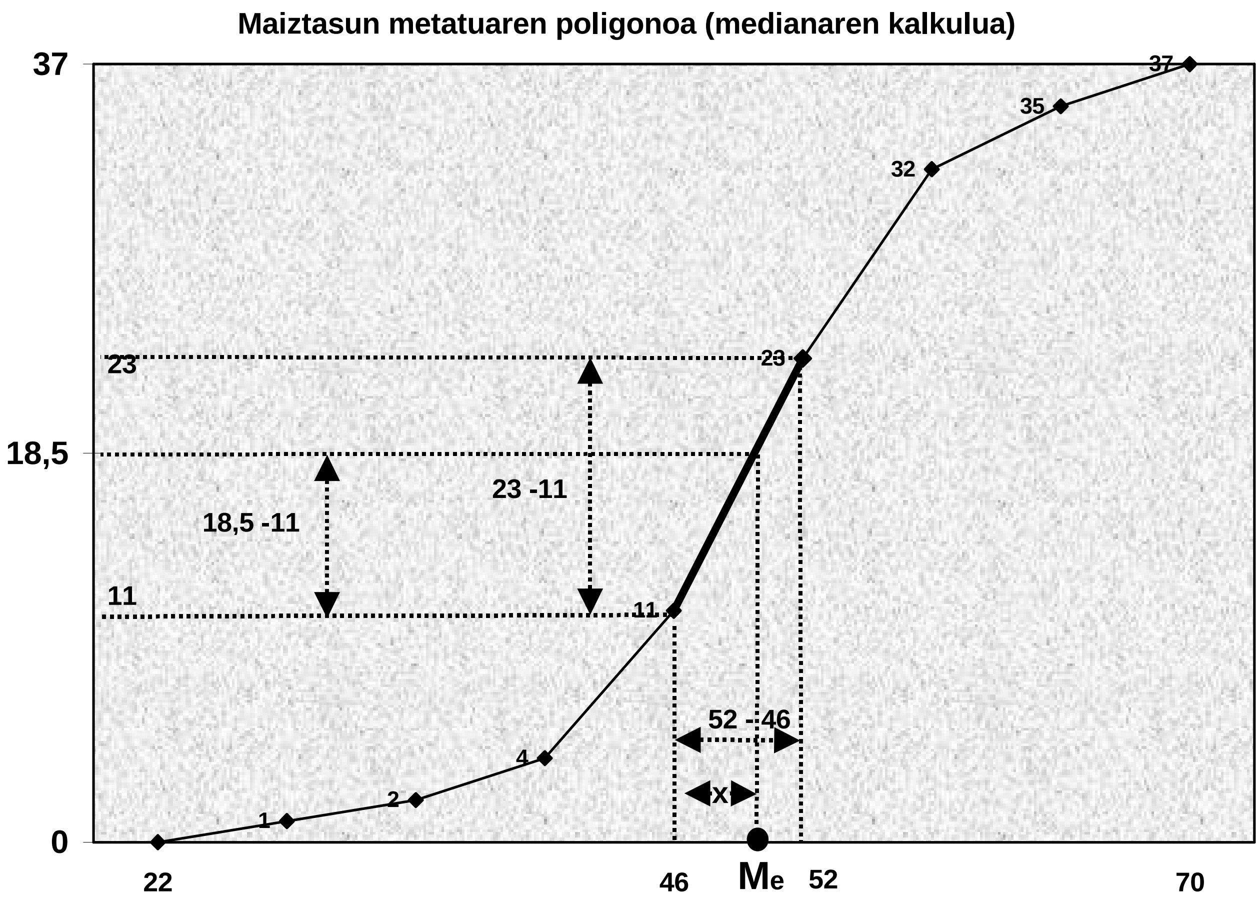
M_e = 3,5

- <u>Aldagaia tartekatuta dagoenenan.</u>

Adibidea

37 ikasleko gelan egindako test-ean jasotako emaitzak:

x_i	f_i	f_a	f_a (%)
[22 , 28)	1	1	2,70%
[28 , 34)	1	2	5,41%
[34 , 40)	2	4	10,81%
[40 , 46)	7	11	29,73%
[46 , 52)	12	23	62,16%
[52 , 58)	9	32	86,49%
[58 , 64)	3	35	94,59%
[64 , 70)	2	37	100,00%
	37		



Populazioaren erdia: $\frac{37}{2} = 18{,}5$. Zein da 18,5-i dagokion puntuazioa?; hori da mediana.

f_a zutabean 18,5 balioa 11 eta 23ren artean dago, eta x_i zutabean [46 , 52) tarteari dagokio; beraz, mediana tarte horretako balio bat da. Kalkulatzeko, interpolazio metodoa erabiliko dugu:

$$\left.\begin{array}{lcl} 23-11 & \rightarrow & 52-46 \\ 18{,}5-11 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{lcl} 12 & \rightarrow & 6 \\ 7{,}5 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 3{,}75$$

Mediana = 46 + 3,75 = **49,75**

<u>ARIKETA</u>. 7. orrialdeko bi ariketen taulak hartuta hartuta (36 umeen oinez hastea, eta burtsako 40 akzioak), kalkulatu kasu bakoitzean medianaren balioa

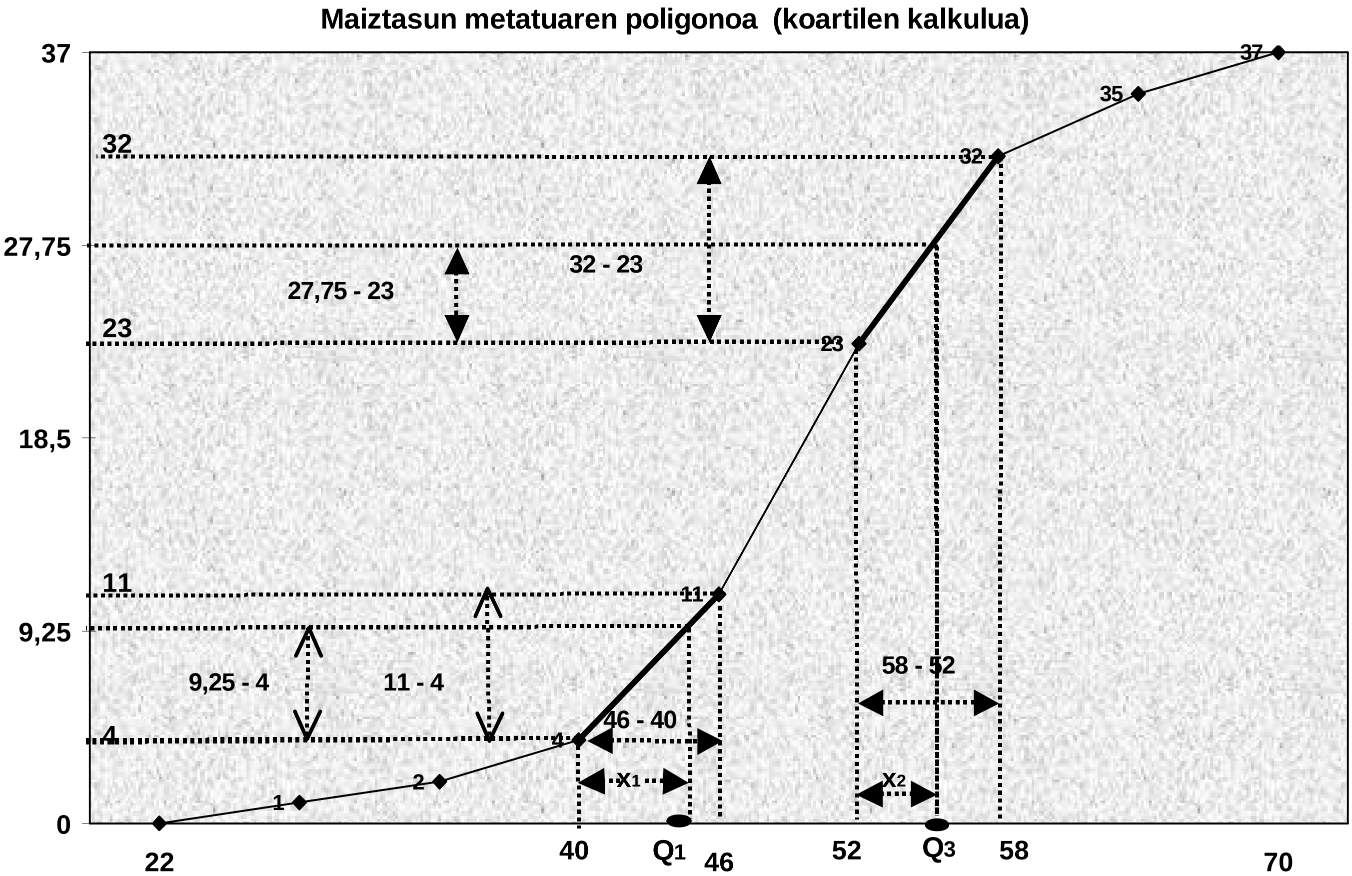
➢ Koartilak eta zentilak kalkulatzen

Adibidea

Demagun 37 ikasleekin egindako test-aren emaitzak:

x_i	f_i	f_a	f_a (%)
[22 , 28)	1	1	2,70%
[28 , 34)	1	2	5,41%
[34 , 40)	2	4	10,81%
[40 , 46)	7	11	29,73%
[46 , 52)	12	23	62,16%
[52 , 58)	9	32	86,49%
[58 , 64)	3	35	94,59%
[64 , 70)	2	37	100,00%

Kallkula ditzagun lehen koartila (Q_1), hirugarren koartila (Q_3) eta 15. perzentila (P_{15})



<u>Lehen koartila (Q_1):</u>

Populazioaren laurdena: $\frac{37}{4} = 9{,}25$. balio hura, f_a zutabean 4 eta 11 artean dago eta x_i zutabean [40 , 46) tartean. Tarte horretako balio bat da Q_1; kalkula dezagun, interpolazio metodoa erabilita:

$$\left.\begin{array}{lcl} 11-4 & \to & 46-40 \\ 9{,}25-4 & \to & x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{lcl} 7 & \to & 6 \\ 5{,}25 & \to & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 4{,}5$$

$Q_1 = 40 + 4{,}5 =$ **44,5**

Era berean, hirugarren koartila (Q_3):

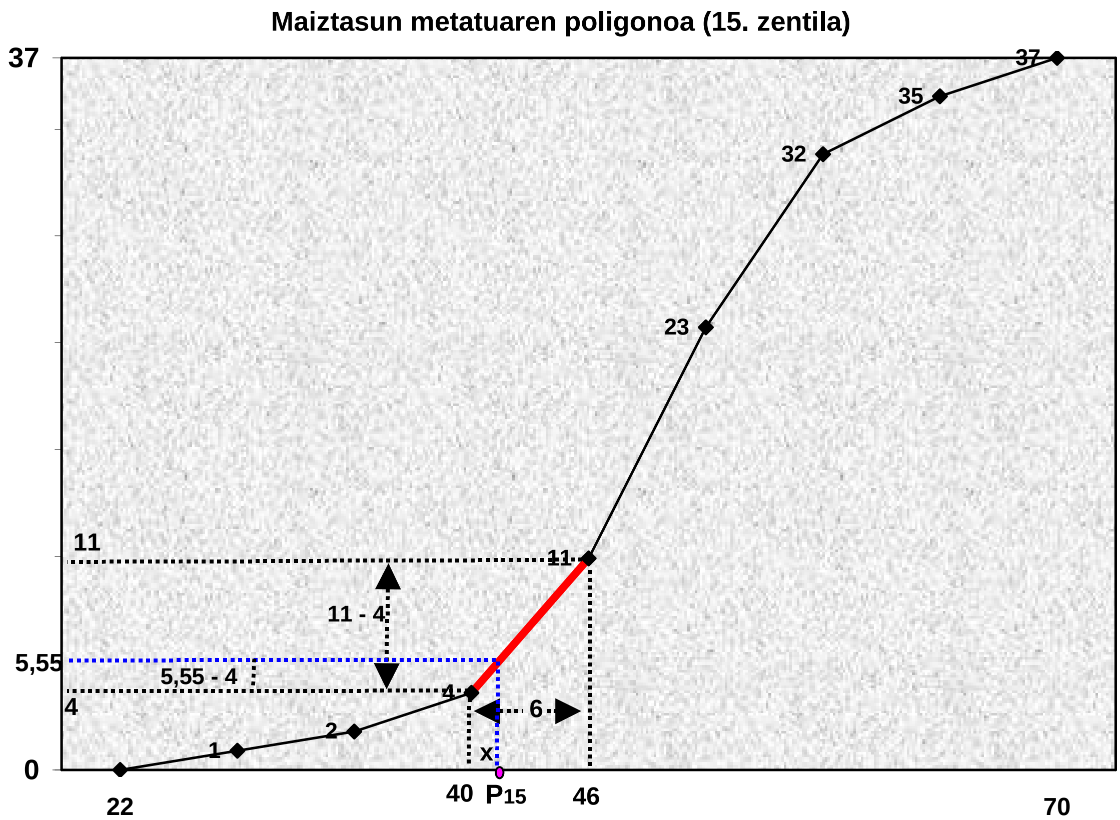
$37 \cdot \frac{3}{4} = 27,75$. Balio horri dagokion x_i da Q_3:

$$\left.\begin{array}{lcl} 32-23 & \rightarrow & 58-52 \\ 27,75-23 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{lcl} 9 & \rightarrow & 6 \\ 4,75 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 3,16$$

$Q_3 = 52 + 3,16 =$ **55,16**

ARIKETA. 7. orrialdeko burtsako 40 akzioen datuak hartuta, kalkulatu lehen eta hirugarren koartilak.

15. perzentila (P_{15}):



$$37 \cdot \frac{15}{100} = 5,55$$

$$\left.\begin{array}{lcl} 11-4 & \rightarrow & 46-40 \\ 5,55-4 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{lcl} 7 & \rightarrow & 6 \\ 1,54 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1,32$$

$P_{15} = 40+1,32 =$ **41,32**

ARIKETAK

1. Dentista batek bere kontsulta doazen 200 bezeroen txantxar kopurua idatzi du. Hona hemen informazioa:

Txantxar kopurua	f_i	$(f_a)_r$
0	50	0,25
1	40	0,2
2	x	z
3	44	0,22
4	y	0,05

a) Kalkulatu *x, y* eta *z*.

b) Aurkitu batezbestekoa eta moda.

2. Ondoko balioei buruz, kalkulatu moda, mediana eta batezbestekoa:

3,4,6,4,5,8,8,4,3,5,6,6,8,4,2,5,5,4,2,8

3. Hona 32 ikasleren informatikako notak:

Notak (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ikasle kopurua (f_i)	2	3	2	5	3	8	4	3	1	1

Kalkulatu mediana, Q_1 , Q_3 , D_2 eta P_{17}

(Soluzioak: $M_e = 6$; $Q_1 = 4$; $Q_3 = 7$, $D_2 = 3$ eta $P_{17} = 3$)

4. 36 ikasleren altuerak neurtu dituzte.

Altuera (metroak)	[1,50 – 1,57)	[1,57 – 1,64)	[1,64 – 1,71)	[1,71 – 1,78)	[1,78 – 1,85)	[1,85 – 1,92)
Ikasle kopurua (f_i)	1	4	11	10	8	2

Kalkulatu Me (mediana), Q1 , Q3 , D6 eta P92

5. Populazio baten adinen banaketa aztertu eta honako emaitzak atera dituzte:

Adina (urteak)	[0 , 20]	[20 , 40]	[40 , 60]	[60 , 80]
Indibiduo kopurua	15		15	16

Ikusten duzunez [20 , 40] tarteari dagokion balioa ez da agertzen

a)Zein litzateke datu horren balioa adinen batezbestekoa 35 urte balitz?

b)Zein litzateke datu horren balioa adinen mediana 35 urte balitz?

DATUEN DISPERTSIOA NEURTZEN DUTEN PARAMETROAK

- **Bariantza** (σ^2)

Formula: $$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$$ (Ez dugu erabiliko)

Azter dezagun ondoko taula azken formula aplikatzeko

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
0	4	0	0
1	18	18	18
2	41	82	164
3	32	96	288
4	11	44	176
5	3	15	75
6	1	6	36
	110	261	757

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{261}{110} = 2{,}3727$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 f_i}{N} - \bar{x}^2 = \frac{757}{110} - (2{,}3727)^2 =$$
$6{,}8818 - 5{,}6298 = 1{,}252$

- **Desbidazio estandarra** (σ)

$$\sigma = \sqrt{\text{Bariantza}} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

Aurreko adibidean, $\sigma = \sqrt{1{,}252} = 1{,}1189$

2. adibidea.

37 ikasleei egindako test-aren emaitzak

x_i	f_i	c_i	$f_i.c_i$	$f_i.c_i^2$
[22,28)	1	25	25	625
[28,34)	1	31	31	961
[34,40)	2	37	74	2738
[40,46)	7	43	301	12943
[46,52)	12	49	588	28812
[52,58)	9	55	495	27225
[58,64)	3	61	183	11163
[64,70)	2	67	134	8978
	37		1831	93445

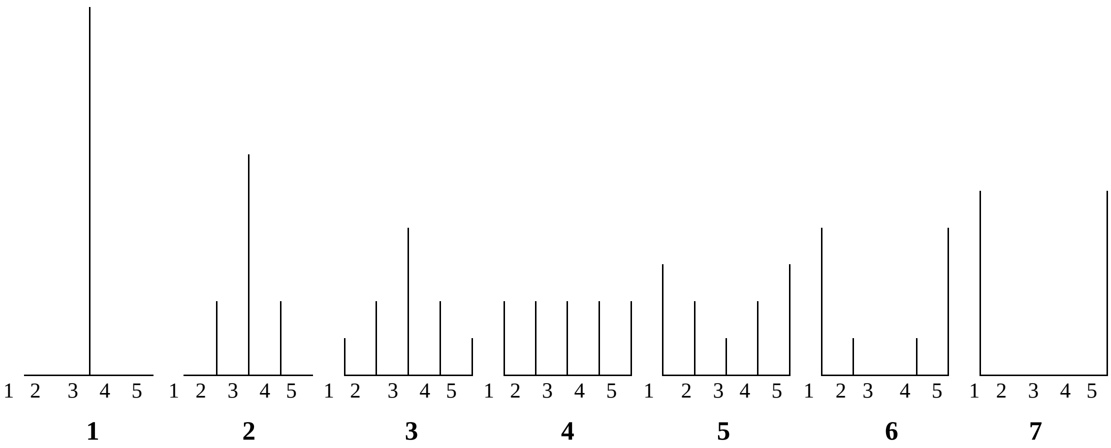
$$\bar{x} = \frac{1831}{37} = 49{,}5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{93445}{37} - 49{,}5^2} = 8{,}68$$

Parametro horrek elementuen distribuzioaren ideia hau ematen digu:
$(\bar{x}-\sigma\ ,\ \bar{x}+\sigma)$ tartean indibiduoen *%68,3* dago
$(\bar{x}-2\sigma\ ,\ \bar{x}+2\sigma)$ tartean indibiduoen *%95,4* dago

σ parametroaren esanahia

Desbidazio estandarrak esaten digu batez bestekotik zein urrun, zein dispertsatuta dauden datuak
Azter ditzagun ondoko banaketak. Guztiek batez besteko bera dute, baina euren desbidazio estandarrak desberdinak dira:



Lehenengoan, balio guztiak daude metatuta batez bestekoan. Bere desbideratze estandarra zero da (ez dago sakabanatzerik).
Bigarrenera igarotzean, sakabanatzea areagotu egiten da, indibiduo batzuk batezbestekotik banatuta daude eta.
Eta, orokorrean, batetik bestara igarotzeko, indibiduoak baten bestekotik urruntzen dira eta, beraz, sakabanatzea handitu egiten da.

➤ **Bariazio koefizientea**

Ganadutegi jakin bateko zezenen pisuak $\bar{x}_1$ = 510 kg-ko batezbestekoarekin eta σ_1 = 25 kg-ko desbideratze estandarrarekin banatzen dira.
Txakur erakusketa beteko txakurren pisuak $\bar{x}_2$ = 19 kg-ko batezbestekoarekin eta σ_2 = 10 kg-ko desbideratze estandarrarekin banatzen dira.
Zezenen pisuen desbideratze estandarra txakurrena baino handiagoa da. Baina 25 kg horiek oso gutxi dira zezenen pisu handiaren ondoan (hau da, talde horretako zezenek antzeko pisua dute denek); 10 kg, berriz asko da txakur baten pisuaren ondoan (pentsa ezazu txakur erakusketan mota guztietako txakurrak egongo direla: kanitxeak, dobatxakurrak, artzakurrak, ardi txakurrak…).

Oso populazio desberdinen sakabanatzea konparatzeko, desbideratze estandarra ez da ona. Hori dela eta, sakabanatze neurri berri bat definituko dugu: **bariazio koefizientea**

$$\text{B.K.} = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

Desbideratze estandarraren eta batezbestekoaren arteko zatiketa egitean, bariazioa erlatibizatzen ari gara.
Batezbestekoa eta desbideratze estandarra, datuak emanda agertzen diren unitateen bitartez adierazten dira; bariazio koefizientea ordea, zenbaki abstraktu bat da (ez du unitaterik).

Zezen eta txakurren adibidean, kasu horiei dagozkien bariazio koefizienteak hauek dira hurrenez hurren:

$$B.K._1 = \frac{25}{510} = 0{,}049 \qquad B.K._2 = \frac{10}{19} = 0{,}526$$

Batzuetan bariazio koefizientea ehunekotan adierazten da. Kasu horretan hauek dira ehunekoak:

$B.K._1 = \%4{,}9$ $\qquad$ $B.K._2 = \%52{,}6$

Parametro horrekin argi eta garbi ikusten da txakur erakusketako txakurren pisua askoz dispertsatuago dagoela zezenen pisua baino.

Kalkulagailuaren erabilpena

ARIKETAK

1.- **A** taldean, 25 ikasleen Matematikako notak hauek izan dira:

6, 6, 7, 6, 7, 5, 5, 6, 7, 5, 4, 5, 4, 9, 3, 3, 5, 5, 5, 9,5, 4, 5, 4, 8

Eta, **B** taldean, 20 ikasleenak, beste hauek:

6, 6, 7, 3, 10, 3, 5, 5, 2, 5, 4, 3, 9, 4, 9, 5, 6, 6, 6, 7

a) Zein taldetan lortu da batezbesteko hoberena?
b) Zein taldetan daude notak sakabanatuagoak?

2.- Pila elektrikoen iraupena neurtzeko 75 pilako lagin bat hartzen da, emaitza hauek lortuz:

Iraupena (orduak)	25-30	30-36	35-40	40-45	45-50	50-55
Pila kopurua	3	5	21	28	12	6

a) Egizu grafikoa
b) Kalkulatu mediana eta 3. koartila
c) Kalkulatu desbidazio tipikoa
d) Zenbat pila daude $(\bar{x}-\sigma\,,\ \bar{x}+\sigma)$ tartean?

3.- Gizonezkoen oinetako denda batean egunean 40 zapata-pare saltzen dira, neurri honetakoak:

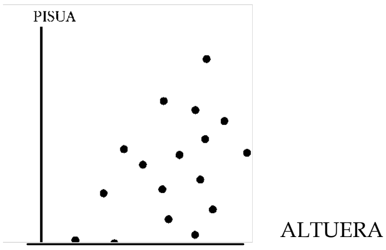
Zapata zenbakia	37	38	39	40	41	42	43	44
Zenbat?	1	2	5	8	11	7	4	2

a) Zein neurritako zapata saltzen da gehien (moda)?
b) Batazbeste, ze neurritako zapata saltzen da?
c) Aurkitu mediana. Azaldu esanahia
d) Kalkulatu desbidazio tipikoa. Zenbat zapata-pare daude $(\bar{x}-\sigma\,,\ \bar{x}+\sigma)$ tartean?

BANAKETA BIDIMENTSIONALAK

Unitate honetan ikusiko duzuna

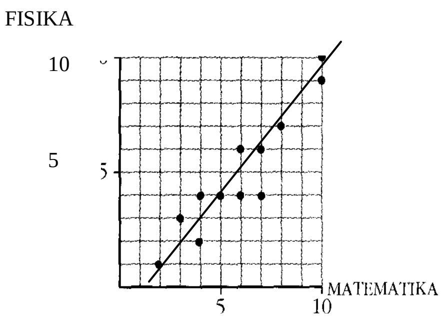
Aldagai pare batzuk nahiz eta formula baten bitartez erlazioan jarri ezin diren, lotu egin daitezke euren artean erlazio estatistikoren bat badago. Puntuen diagrama erabiliz, argiago ikusten da erlazio hori zein eta nolakoa den **(korrelazioa).** Baina, horrez gain, badago formula bat korrelazio horren balioa zehaztasunez lortzeko.



Puntuen diagrama hauen joera markatzeko modu on bat zuzen bat, **erregresio zuzena,** irudikatzea da.

Korrelazioa indartsua denean, puntuak zuzenetik oso hurbil daude. Horrelakoetan erregresio zuzena oso baliagarria da **aurreikuspenak egiteko:** talde horretako beste indibiduo bat agertzen bada eta bere aldagai bat bakarrik zein den badakigu, erregresio zuzena oinarritzat hartuta ia-ia ziur esan dezakegu beste aldagaiaren gutxi gorabeherako balioa zein den.

1 - Puntu hodeia. Korrelazioa

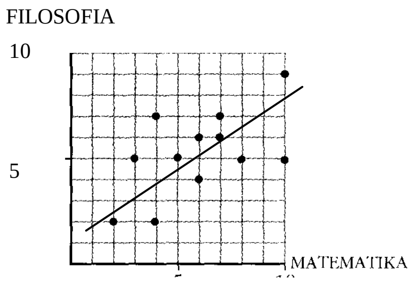


- Honako hauek 12 ikaslek matematika eta fisika ikasgaietan izan dituzten notak dira.

IKASLEA	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	1
MATEMATIKA	2	3	4	4	5	6	6	7	7	8	10	10
FISIKA	1	3	3	4	4	4	6	4	6	7	9	10

Banaketa bidimentsional, edo bi dimentsioko banaketa, indibiduo bakoitzari bi aldagairen balioak dagozkiolako da. Bi balio horiek puntu baten koordenatutzat hartzen baditugu, banaketa 12 punturen bitartez adieraz daiteke: **puntu hodeia** deritzona.

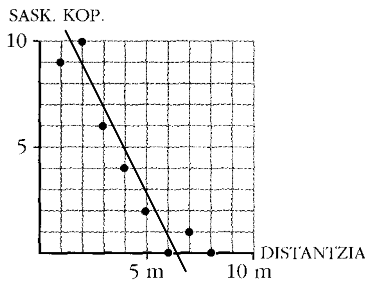
Bi aldagairen artean erlazio bat badagoela argi dago: zenbat eta nota hobea izan *Matematikan* nota hobea *Fisikan* ere; eta zenbat eta nota txarragoa izan *Matematikan* nota txarragoa *Fisikan* ere. Baina orokorrean bakarrik. Bi aldagai horien artean **korrelazioa** dagoela esaten da.



⬩ Orain ikasle horiek *Matematikan* duten nota beste ikasgai bateko notarekin lotuko dugu: *Filosofian* duten notarekin.

IKASLEA	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	1
MATEMATIKA	2	3	4	4	5	6	6	7	7	8	10	10
FILOSOFIA	2	5	2	7	5	4	6	6	7	5	5	9

Datuen taulari edota puntu hodeiari begiratzen badiogu, bi aldagai horien artean ere **korrelazio** bat dagoela ikusten dugu, baina aurrekoa baino **ahulagoa** da.



⬩ Saskibaloi jokalari batek 10 baloi jaurti ditu saskira zenbait distantziatatik eta, normala denez, zenbat eta hurbilago egon, baloi gehiago sartu ditu saskian.

DISTANTZIA (m)	1	2	3	4	5	6	7	8
SASKIAN SARTU	9	10	6	4	2	0	1	0

Kasu honetan **korrelazio gogorra eta negatiboa** dago, aldagai bat handitzen den neurrian bestea txikitu egiten delako.

Banaketa bidimentsional batean bi aldagaiek era berean aldatzeko duten joera **erregresio zuzenaren** bitartez marrazten da. Puntuak zuzenetik zenbat eta hurbilago egon, gogorragoa da korrelazioa.

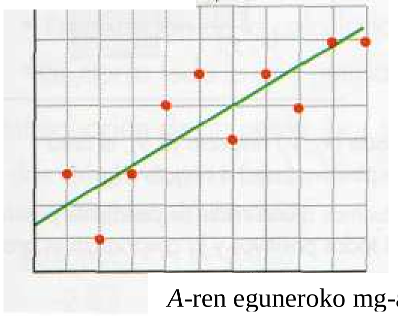
<u>Orokorrean</u>

n indibiduoko talde bat dugu. Bi aldagai, x eta y, aztertzen ditugu indibiduo horietan. Balio bakoitzerako aldagaiek zein balio duten ezagutzen dugu.
$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ balio pareen multzoari **banaketa bidimentsional** esaten zaio. Balio pare bakoitza puntu baten koordenatu moduan interpretatzen badugu, guztien multzoari **puntu hodei edo dispertsio diagrama** esaten diogu.
Korrelazioak *n* indibiduoko talde baterako bi aldagai horien artean dagoen erlazioa adierazten du. Hodeiko puntuak zuzenetik gertuago edo urrunago dauden arabera, korrelazioa gogorragoa edo ahulagoa izango da. Zuzen horrek joera adierazten du eta **erregresio zuzena** da.
Erregresio zuzenaren malda positiboa edo negatiboa den arabera, **korrelazioari positiboa edo negatiboa dela** esaten diogu.

<u>1. adibidea</u>
Demagun 10 arratoiekin egindako esperimentua:
- 10 egunetan zehar *A* botika ematen diegu, egunean 1 mg, 2 mg ... 10 mg-ko dosiak hurrenez hurren, handik hilabete batera zenbat loditu diren kalkulatzeko.
- Beste 10 arratoiei B botika
- Beste 10ei *C* botika

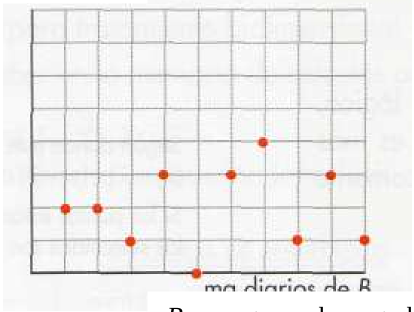
Emaitzak grafiko honetan adierazten dira:

Hilabeteko pisu handitzea (g)



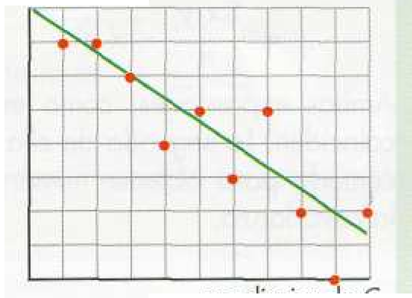
A-ren eguneroko mg-ak

H. P. H. (g)



B-ren eguneroko mg-ak

H. P. H. (g)



C-ren eguneroko mg-ak

Grafiko horiek ikusita, argi dago da A botikak arratoiak loditu egiten dituela; B-k ez duela eraginik eta C kaltegarria dela.
I grafikoaren korrelazioa positiboa da eta III grafikoarena negatiboa; bata eta bestearen erregresio zuzenen maldak bezala.
II grafikoan, aldiz, puntu hodeia amorfoa da eta ezin da zuzenik irudikatu: ez dago korrelaziorik aldagaien artean.

1. ariketa

Beheko taula honek A, B, C, … hamar herri bi aldagairen arabera sailkatuta erakusten ditu: PCE (per capita errenta) eta JI (jaiotza indizea).
Adierazi emaitzak puntu hodei batean, irudikatu erregresio zuzena eta esan korrelazioa nolakoa iruditzen zaizun.

HERRIAK	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
PCE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
JI	10	6	9	5	7	4	1	3	8	2

2 - Korrelazioaren neurria

Bi aldagaien arteko korrelazioa (gogorra edo ahula, positiboa edo negatiboa) hodeia osatzen duten puntuen arteko "estutasun" mailak adierazten du. Korrelazio hori zenbakiz eta agerian adierazteko balioko digun formula bat ikasiko dugu orain.

Formula horri **korrelazio koefizientea** esaten zaio eta korrelazio linealaren kasuan, **Pearson-en koefizientea**.

Koefizientearen adierazpenera iristeko, lehenik **kobariantza** deritzon parametro estatistikoa definitu behar dugu.

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i y_j f_{ij}}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Orain prest gaude Pearson-en koefizientea definitzeko:
Pearson-en koefizientea, **r**, ondoko adierazpenaz definituriko parametro estatistikoa da:

r = $\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$ non σ_{xy} *kobariantza* σ_x *eta* σ_y *aldagai bakoitzaren desbideratze tipikoa* dira

Korrelazio koefizienteak, *r*, honako propietate hauek ditu:

- Ez dauka dimentsiorik. Hau da, bi aldagaien balioak adierazteko erabiltzen diren unitateekin ez du zerikusirik. Beraz, unitate aldaketa egiten bada ere, r ez da aldatzen.

- r-ren balioa -1 eta 1 artekoa da.

  • Korrelazioa perfektua bada (hodeiko puntuak ilaran daude), orduan $|r| = 1$ da; hau da, r = 1 edo r = -1 da.

  • Korrelazioa gogorra bada, $|r|$ letik hurbil dago.

  • Korrelazioa ahula bada, $|r|$ 0tik hurbil dago.

<u>2. adibidea</u>

Kalkulatu gai honen lehenengo puntuan aipatutako 12 ikasleren notak Matematika eta Fisikan.

Kasu honetan bikote bakoitza behin bakarrik ematen da beraz, bakoitzaren maiztasun absolutua 1 da eta horregatik ez da f_i zutabea azaltzen.

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i\,y_i$
2	1	4	1	2
3	3	9	9	9
4	2	16	4	8
4	4	16	16	16
5	4	25	16	20
6	4	36	16	24
6	6	36	36	36
7	4	49	16	28
7	6	49	36	42
8	7	64	49	56
10	9	100	81	90
10	10	100	100	100
72	60	504	380	431

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{72}{12} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{60}{12} = 5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{504}{12} - 6^2} = \sqrt{6} = 2{,}45$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{380}{12} - 5^2} = \sqrt{6{,}67} = 2{,}58$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{N} - \bar{x}\cdot\bar{y} = \frac{431}{12} - 6\cdot 5 = 5{,}92$$

Beraz, $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \dfrac{5{,}92}{2{,}45\cdot 2{,}58} = 0{,}94$. Oso korrelazio handia da.

<u>2. ariketa</u>

Kalkulatu gaiaren 1. atalean agertzen diren *Matematika-Filosofia* eta *Distantzia-Saskian sartze kopurua* banaketen korrelazio koefizienteak. Nolakoak dira?

Balio pare gutxi daudenean, aurreko adibidean egin dugun moduan jokatuko dugu, hau da bikotean banan-banan aipatuta eta bikoteren bat errepikatzen bada maiztasuna adierazteko zutabe bat erabiliko dugu.
Baina datu kopurua handia denean, **sarrera bikoitzeko taula** erabiliko dugu.

3. adibidea

117 lagunek ortografiako proban, x, eta zenbakizko kalkuluari buruzko beste batean, y, zenbat akats egin dituzten aztertu dugu.
Kalkulatu zein den bi aldagaien arteko Pearson-en koefizientea.

y_i \ x_i	0	1	2	3	4	$(f_y)_i$
0	24	6	1	0	0	31
1	11	19	2	3	0	35
2	7	8	6	2	0	23
3	2	3	3	7	1	16
4	1	0	2	4	5	12
$(f_x)_i$	45	36	14	16	6	N = 117

x-en **bazter banaketa**

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
0	45	0	0
1	36	36	36
2	14	28	56
3	16	48	144
4	6	24	96
	117	136	332

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N} = \frac{136}{117} = 1{,}16$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{332}{117} - 1{,}16^2} = 1{,}22$$

y-ren **bazter banaketa**

y_i	f_i	$y_i f_i$	$y_i^2 f_i$
0	31	0	0
1	35	35	35
2	23	46	92
3	16	48	144
4	12	48	192
	117	177	463

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i \cdot f_i}{N} = \frac{177}{117} = 1{,}5$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{463}{117} - 1{,}5^2} = 1{,}3$$

Kobariantza

Hasierako taulan x_i eta y_i-ren arteko biderkadurak eta euren maiztasunak aztertuko ditugu:

$$\sum x_i \cdot y_i \cdot f_i = 1\cdot 1\cdot 19 + 1\cdot 2\cdot 8 + 1\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 6 + 2\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 4 + 4\cdot 3\cdot 1 + 4\cdot 5\cdot 5 = 330$$

Beraz, $\sigma_{xy} = \dfrac{\sum x_i y_i f_i}{N} - \bar{x}\cdot\bar{y} = \dfrac{330}{117} - 1{,}16\cdot 1{,}5 = 1{,}08$

Korrelazio koefizientea: $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{1{,}08}{1{,}22\cdot 1{,}3} = 0{,}68$

3. ariketa

64 familiako lagin batean lan egiteko adina dutenen kopurua, x, eta lanean daudenen kopurua, y, aztertu dugu. Emaitzak ondoko taulan bildu ditugu. Kalkulatu zein den bi aldagaien arteko korrelazio linealaren koefizientea eta interpretatu.

x \ y	1	2	3
1	6	0	0
2	10	2	0
3	12	5	1
4	16	8	4

3 – Erregresio lineala

x eta y aldagaiak batera aztertzean lortu nahi den helburuetako bat honako hau da: baten balioak ezagututa bestearenak aurresateko modua aurkitzea. Eta hori lortzeko erregresio lineala aztertuko dugu, hau da, puntu-hodei bati gehien hurbiltzen zaion zuzena determinatzea.

Erregresio-zuzenak eta iragarpenak

Erraza da banaketa bati gutxi gorabehera hurbiltzen zaion zuzena lortzea. Nahikoa da begi-bistaz puntu-hodeiari egokitzen zaion zuzena marraztea. Dena den, metodo hori subjektiboa da.

Arazo hori saihesteko, irizpideren bat bilatu behar da banaketari ondoen doitzen zaion zuzena objektiboki determinatzeko. Gehien erabiltzen den irizpidea *minimo karratuen irizpidea* da,eta horren arabera zuzenik egokiena ondokoa da:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\left(x - \bar{x}\right)$$

Zuzen horri **y aldagaiaren x-en gaineko erregresio-zuzena** deritzo.

Zuzen horren bidez, x-en balioa emanik, aurresan edo iragarri egin dezakegu populazioko batek izango duen y-ren balioa. Dena den, emaitza hori ez da benetako balioa izango, oro har, horren estimazioa baizik.

Era berean, y-ren baliotik abiatuz x-en balioari buruzko iragarpena egitea interesatzen bazaigu, alderantzikatu egin behar dugu aldagai bien zeregina. Kasu honetan, x **aldagaiaren y-ren gaineko erregresio-zuzena** kontsideratuko dugu:

$$x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}\left(y - \bar{y}\right)$$

Iragarpenen balioztapena

Erregresio-zuzenak ahalbidetu egiten digu aldagai baten balioak aurresatea beste aldagaiaren balioetatik abiatuz. Hala ere, ondoko mugak izan behar dira kontuan:

- Erregresio-zuzen batetik abiatuz eginiko iragarpenak ez dira fidagarriak, x eta y aldagaien arteko korrelazio linealaren maila altua edo bortitza ez bada; hots, $|r|$-ren balioa 1 baliotik hurbil ez badago.
- Zuzena kalkulatzeko zenbat eta datu gehiago erabili, hainbat eta fidagarriagoa izango da erregresio-zuzena.
- Banaketako erdigunetik hurbil dauden puntuen kasuetarako eginiko iragarpenak urrun dauden puntuetarako eginikoak baino fidagarriagoak dira.

4. adibidea

2. adibideko ariketan kalkulatu x-en gaineko y-ren erregresio-zuzena.

$$y - 5 = \frac{5{,}92}{6}(x - 6)$$
$$y - 5 = 0{,}986(x - 6)$$
$$y = 5 + 0{,}986x - 5{,}917$$
$$y = 0{,}986x - 0{,}917$$

Zein espero da izatea Matematikan 9 izan duen ikasle baten Fisikako nota?

x = 9 beraz $y = 0{,}986 \cdot 9 - 0{,}917 = 7{,}957$

Fisikako nota 7,957 izatea espero da.

4. ariketa

a) 2. ariketako Mate eta Filosofiako noten adibidean kalkulatu erregresio zuzenak eta egin estimazio hau:
Zein espero da izatea ikasle baten Filosofiako nota, matematiketan 9 atera badu?

b) 2. ataleko saskibaloi jokalariaren adibidean kalkulatu erregresio-zuzenak eta egin estimazio hauek:
Zenbat baloi saskiratuko ditu 5,5 m.-tara jaurtitzen baditu?
7 baloi saskiratu ditu, zein distantziatara egin ditu jaurtiketak?

ARIKETAK

1- Honako taula honek hazkuntza jakin batean, zentimetro kubiko bakoitzean dagoen germen patogeno kopurua adierazten du igarotako denboraren arabera:

Ordu kopurua	0	1	2	3	4	5
Germen kopurua	20	26	33	41	47	53

a) Kalkulatu Pearson-en koefizientea eta esan nolakoa den korrelazioa.
b) Kalkulatu erregresio zuzena cm^3-ko dagoen germen kopurua aurresateko denboraren funtzioan.
c) cm^3-ko zein germen kantitate aurkituko dugula itxaron genezake, 6 ordu igaro ondoren? Igarpen ona al da?

2- Malguki batetik pisuak eskegi eta luzamendu hauek lortu ditugu:

Pisuaren masa (g)	0	10	30	60	90	120	150	200	250	350
Sortutako luzapena (cm)	0	0,5	1	3	5	6,5	8	10,2	12,5	18

Aurkitu x-en gaineko y-ren erregresio zuzena eta estimatu zein luzamendu eragingo duten 100 g eta 500 g-ko pisuek. Bi estimazioetatik, zein da fidagarriagoa?

3- Zilindro itxurako depositua, uraren altuera aldatu egiten da denbora igaro ahala ondoko taulak adierazten duen moduan:

Denbora (h)	8	22	27	33	50
Altuera (m)	17	14	12	11	6

a) Kalkulatu zein den denboraren eta altueraren arteko korrelazio linealaren koefizientea eta esan zer adierazten duen.
b) Zein izango da uraren altuera 40 orduren buruan?
c) Uraren altuera 2 m-koa denean alarmak jotzen du. Zenbat denbora igaroko da alarmak jo arte?

4- Disko konpainia batek informazioa bildu du uda batean 15 musika taldek emandako kontzertuei eta talde horiek saldutako disko kopuruari buruz (milaka CDtan adierazita):

tzertuak (y))	0,30)	0,40)	0,50)
[1,5)			
[5,10)			
[10,20)			

Datuak tartetan ematen badira x_i eta y_i klase markak izango dira.

a) Zein da korrelazio koefizientea?
b) Lortu y-ren gaineko x-en erregresio zuzena.
c) Musika taldeak 50 kontzertu eman baditu, zenbat CD saltzea espero da?

5- Futbol talde batek 21 partidatan sarturiko golen kopurua (x) eta harturikoena (y) ondoko taulan adierazitakoak dira:

x \ y	0	1	2	3	4
0	2		1	1	
1	1	4	2		
2	2	2		1	
3		2			1
4		1		1	

a) Kalkulatu Pearson-en koefizientea. Nolakoa da korrelazioa?
b) Kalkulatu erregresio zuzenak.
c) Zein espero da izatea hartutakoa golen kopurua 3 gol sartzen baditu?
d) 3 gol hartzen baditu, zein espero da izatea sartutako golen kopurua?
e) Fidagarriak al dira emaitza horiek?

6- Azken hamabost urteotan Espainiar Estatuan izandako baso-suteen kopurua (x) eta kaltetuetako hektareen kopurua (y) ondoko taulan daude bildurik:

x \ y	[0,5)	[5,10)	[10,15)	[15,20)
[0,100)	0	0	2	0
[100,200)	1	4	1	1
[200,300)	0	2	1	0
[300,400)	0	0	0	1
[400,500)	0	0	1	1

x milakotan eta y mila hektareako unitatetan.

a) Lor ezazu Pearson-en koefizientea eta esan nolakoa den korrelazioa.
b) Zenbat hektarea erreko direla iragar daiteke 12.500 sute diren urte batean?

7- Ospitale batean esperimentuak egiten ari dira gorputzaren tenperatura erregulatzen duen medikamentu batekin. Horretarako, produktuaren dosi desberdinak eman zaizkie sukar handia zuten 10 pazienteri, eta tenperatura normaltzeko behar izan den denbora neurtu da. Ondoko emaitzak lortu dira:

Dosia (mg)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Denbora(min)	136	126	115	98	75	60	55	42	38	31

11,5 mg-ko medikamentua eman zaion paziente baten tenperatura normaltzeko, zenbat denbora beharko dela iragar daiteke? Eta 25 mg-ko dosia hartuz gero?

KONBINATORIA

Zenbaketa-problemak

1. Zenbat kiniela desberdin egin daitezke?
2. Errelebutako lasterketa batean lau taldek hartu dute parte. Zenbat era desberdinetan hel daitezke helmugara?

Ikus ditzagun zenbait teknika baliagarri mota horietako galderei erantzuteko.

1. Aldakuntzak

Zozketa batean bi sari emango dira eta lau pertsonak hartuko dute parte. Zenbat eratan bana daitezke sariak, kontuan izanik pertsona batek ezin dituela bi sariak jaso?

1. saria	2. saria	
A	B	AB
	C	AC
	D	AD
B	A	BA
	C	BC
	D	BD
C	A	CA
	B	CB
	D	CD
D	A	DA
	B	DB
	C	DC
4 .	3 =	12

Parte-hartzaileei A, B, C eta D deituko diegu eta zuhaitz-diagrama bat eraikiko dugu konfigurazio posibleak lortzeko.

Kontuan hartu behar dena:

- Elementuen ordena.
- Konfigurazio berean ez dagoela elementu errepikaturik.

Guztira 4 . 3 = 12. Horiei *4 elementuren 2nakako aldakuntzak* deitzen zaie eta erabiltzen den sinboloa hauxe da: ${}_{4}^{2}A$

Hiru sari baleude, kopurua hauxe litzateke: 4 . 3 . 2 = 24 eta honela adieraziko genuke: ${}_{4}^{3}A$

Oro har, n elementuren k-nakako aldakuntza kopurua ${}_{n}^{k}A$ sinboloaz adierazten da eta emaitza hauxe da:

$${}_{n}^{k}A = n.(n-1).(n-2).\dots.(n-k+1)$$

Adibidea

24 ikasleen artean ordezkaria eta ordezkariordea aukeratu behar dira. Zenbat eratan aukera daitezke?

- Kontuan hartu behar da ordena, bi karguak desberdinak baitira.
- Ezin dira elementu errepikatuak agertu. Horrela balitz ikasle berberak bi karguak izango lituzke.

24 elementuren 2nakako aldakuntzak kalkulatu behar dira:

$${}_{24}^{2}A = 24 \,.\, 23 = 552$$

2. Aldakuntza errepikadunak

Demagun orain aurreko sari-banaketan pertsona bakar batek bi sariak hartzeko aukera duela.

1. saria	2. saria	
A	A	AA
	B	AB
	C	AC
	D	AD
B	A	BA
	B	BB
	C	BC
	D	BD
C	A	CA
	B	CB
	C	CC
	D	CD
D	A	DA
	B	DB
	C	DC
	D	DD
4 .	4 =	16

Kontuan hartu behar dena:

- Elementuen ordena
- Konfigurazio berean elementuak errepikaturik ager daitezkeela.

Guztira 4 . 4 = 16. Horiei *4 elementuren 2nakako aldakuntza errepikadunak* deitzen zaie eta ${}_4^2A'$ da beraren sinboloa.

Oro har, n elementuren k-nakako aldakuntza errepikadunen kopurua ${}_n^kA'$ sinboloaz adierazten da eta emaitza hauxe da:

$$ {}_n^kA' = n^k $$

Adibidea.
Txanpon bat hiru aldiz jaurtitzen da. Zenbat emaitza desberdin lor daitezke?

Txanpona jaurtitzen dugun bakoitzean, bi emaitza hauetako bat lortuko dugu: aurpegia ala gurutzea

- Kontuan hartu behar da ordena.
- Elementuak errepikaturik ager daitezke (aab, aba, aaa…)

Beraz, 2 elementuren 3nakako aldakuntza errepikadunak kalkulatu behar dira. Emaitza posibleak ${}_2^3A' = 2^3 = 8$ dira.

Ariketak.

1. Hiru zifrako zenbat zenbaki desberdin idatz daitezke 2, 3, 4, 5,6 eta 7 digituekin?
   - digituak errepikatu gabe
   - digituak errepikatuta.

2. Zenbaki-sistema bitarrean 0 eta 1 zifrak erabiltzen dira soilik. Lau zifrako zenbat zenbaki desberdin idatz daitezke?

3. Zazpi letra desberdineko zenbat hitz idatz daitezke (esanahidunak edo esanahirik gabeak) A, B, C, D, E, F, G, H eta I letrekin, baldin letrak errepikaten ez badira? Horietako zenbat amaitzen dira D letraz? Eta DA letrez?

3. Permutazioak

1.lib.	2.lib.	3.lib.	
1	2	3	123
	3	2	132
2	1	3	213
	3	1	231
3	1	2	312
	2	1	321
3 .	2 .	1 =	6

Apalategi batean zenbat modu desberdinetan ordena ditzakegu hiru liburu?
Liburuak 1etik 3ra zenbakituta, konfigurazio edo modu bakoitza 1, 2 eta 3 digituez eratutako hiru zifrako zenbaki batez adieraz daiteke.
Horrela 3 . 2 . 1 = 6 modu lortuko ditugu, eta horiexek dira 3 elementuren (hiru liburu baitaude) permutazioak.

- Konfigurazio bakoitzean elementu guztiek hartzen dute parte.
- Elementuen ordenak eragina du.

Liburuen kopurua 4 balitz, ordenazio posibleak 4 . 3 .2 .1 = 24 lirateke. 5 liburu baleude 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120 ...

Oro har, **n** elementuren permutazioak bi eratan adierazten dira: ${}_nP$ sinboloaz edota *n faktorial* (*n!*) eta era honetan kalkulatzen da:

$${}_nP = n! = n.(n-1).(n-2). \ ... \ .2.1$$

Ikus dezakezunez, izatez, *n* elementuren permutazioak elementu guztien arteko aldakuntzak dira:

$${}_nP = n! = {}_n^nA$$

Adibideak

1. Jaialdi batean lau parte-hartzaile dira. Zenbat era desberdinetan programa daiteke agerraldien ordena?

$${}_4P = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

2. Zenbat eratan jar daitezke sei pertsona lerroan? Eta zirkuluan?

- Lerroan, ${}_6P = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$ ordenazio posible.
- Zirkuluan, behin era jakin batean kokatu ondoren, guztiak noranzko berean posizio bat desplazatuz gero, hasierako kokapen berbera lortzen da. Horregatik, pertsona baten posizio finkatu eta beste guztiak permutatzearekin aski da. ${}_5P = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$

n elementu zirkuluan kokatzeko moduei ***permutazio zirkularrak*** esaten zaie,eta beraren balioa ${}_{n-1}P$ da.

0 eta 1 zenbakien faktorialak 1! = 1 ; 0! = 1

Ariketak.
(Kalkulagailua erabili dezakezu. Gehienetan sakatu beharreko tekla ondoko sinboloetako batez adierazten da: **!** edo **x!**)

1. Zenbat da 10!
2. Zein zenbakiren faktoriala da 5040 zenbakia.
3. Zenbat eratan eser daitezke mahai zirkular batean zazpi kongresukide? Horietako bakoitzak diskurtso laburra irakurtzen badu, zenbat eratan ordena daitezke hitzaldiak?

4. **Permutazio errepikadunak**

Demagun orain apalategi batean bost liburu lerrokatu nahi ditugula, horietako bi txikiak (T) eta tamaina berekoak, eta hiru handiak (H) eta horiek ere tamaina berekoak.

Tamaina bakarrik kontuan hartuta, hauek dira lerrokatzeko moduak: TTHHH, HTHTH, THTHH, HTHHT, THHTH, HHTTH, THHHT, HHTHT, HTTHH, HHHTT.
Horiexek dira **5** elementuren **permutazio errepikadunak**,non **2**tan,**3**tan errepikatzen diren. Bere sinboloa ${}_5P^{2,3}$ da eta balioa $\dfrac{5!}{2!\,.\,3!}$

Oro har, n elementuren permutazio errepikadunak, non n_1, n_2, ...,n_k errepikatzen diren hauxe da:

$${}_nP^{n_1,n_2,\dots n_k} = \frac{n!}{n_1!\,.\,n_2!\,.\;\dots\;.n_k!}$$

Adibidea

Kode sekretu batean, **.** (puntua) eta **—** (marra) konbinatuz lortzen dira letrak. Zenbat letra desberdin lor ditzakegu bi puntu eta lau marra erabilita?

$${}_6P^{2,4} = \frac{6!}{2!\,.\,4!} = \frac{6.5.4!}{2!\,.\,4!} = \frac{6.5}{2!} = 15 \text{ letra}$$

```
Ariketa
Zenbat hitz desberdin idatz daitezke (esanahidunak zein esanahirik
gabeak) BIDELAGUN hitzaren letra guztiak erabilita? Eta BIRIBILA
hitzaren letra guztiak erabilita?
```

5. **Konbinazioak**

4 pertsonaren artean 2 laguneko taldeak egin behar dira. Zenbat modu desberdinetan antola daitezke taldeak?

Lau pertsonak A, B, C eta D letrez adierazita, talde bakoitza bi letraz adieraziko dugu. Hona hemen sei posibleak: AB, AC, AD, BC, BD eta CD.

- Elementuen ordena ez da kontuan hartu behar; hau da, AB = BA
- Konfigurazio berean ez dago elementu errepikaturik.

Horiei *4 elementuren 2nakako konbinazioak* deitzen zaie eta erabiltzen den sinboloa hauxe da:
${}_4^2K$

Konbinazioen kalkulurako formula hau da : ${}_4^2K = \dfrac{{}_4^2A}{{}_2P} = \dfrac{4.3}{2!} = 6$

Oro har, n elementuren k-nakako konbinazioen kopurua ${}_n^kK = \dfrac{{}_n^kA}{P_k}$ da.

Adibidea. Zenbat triangelu lor daitezke exagono baten erpinekin?

Triangelua determinatzeko hiru puntu ezberdin behar ditugu eta ez da kontuan hartu behar puntuen kokapen-ordena (ABC=ACB=CBA...). Beraz, 6 elementuren (exagonoaren sei erpinak) 3nakako konbinazioen kopurua kalkulatu behar dugu.

$${}_6^3K = \frac{{}_6^3A}{P_3} = \frac{6.5.4}{3.2.1} = 20 \text{ triangelu.}$$

5.1 Zenbaki konbinatoriak

${}_n^kK$ adierazpena eta $\binom{n}{k}$ berdina da. Azken honi ***zenbaki konbinatorioa*** deitzen zaio eta **n gain k** irakurtzen da. Beraren balioa $\frac{n!}{k!\,.\,(n-k)!}$ zatiketa eginda lortzen da. Beraz,

$${}_n^kK = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,.\,(n-k)!}$$

Esate baterako, 4 pertsonaren artean zenbat talde egin ahal dira 2 lagunekoak?

$${}_4^2K = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,.\,(4-2)!} = 6$$

Adibidea

Zenbat dira $\binom{12}{3}$ eta $\binom{6}{4}$?

12 gain 3: $\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!\,.\,(12-3)!} = \frac{12!}{3!\,.\,9!}$ Eragiketa egin baino lehen, sinplifikatzea komeni da; egin honela: $\frac{12!}{3!\,.\,9!} = \frac{12.11.10.9!}{3!\,.\,9!} = \frac{12.11.10}{3!} = \frac{12.11.10}{6} = 2.11.10 = 220$

6 gain 4: $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,.\,2!} = \frac{6.5.4!}{4!\,.\,2!} = \frac{6.5}{2!} = 15$

k = 0 den kasuan, $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,.\,(n-0)!} = \frac{n!}{1\,.\,n!} = 1$

Ariketa.
Sinplifikatu eta kalkulatu ondoko adierazpenen balioak:

$\frac{1000!}{998!}$; $\frac{14!}{11!\,.\,3!\,.\,2!}$; $\frac{n!}{(n-2)!}$; $\binom{12}{2}$; $\binom{12}{0}$

5.2 Zenbaki konbinatorioen propietateak

- $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n} = 1$ (Froga itzazu)

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Adibidez, $\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$ edo $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$, $\binom{100}{10} = \binom{100}{90}$ ...
  (Egiazta ezazu horietako bat).

- $\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = \binom{7}{4}$; $\binom{100}{47} + \binom{100}{48} = \binom{101}{48}$ ...

KONBINATORIA

KONTUTAN HARTU BEHARREKOA	ELEMENTU ERREPIKATURIK EZ	ELEMENTU ERREPIKATUAK BAI
ELEMENTUEN ORDENA BAI, ELEMENTU GUZTIEK PARTE HARTU GABE.	ALDAKUNTZAK ${}_{n}^{k}A = n(n-1)(n-2)....(n-k+1)$ AD.: Ikasleen artean delegatua eta delegatu-ordea aukeratzea. Zenbat eratan aukera daitezke?	ALDAKUNTZA ERREPIKADUNAK ${}_{n}^{k}A' = n^k$ AD.: Txanpon bat hiru aldiz jaurtikitzea. Zenbat emaitza ezberdin lor daitezke?
ELEMENTUEN ORDENA BAI, ELEMENTU GUZTIEK HARTUZ	PERMUTAZIOAK ${}_{n}P = n! = n(n-1)(n-2)....3\cdot 2\cdot 1$ AD.: Kontzertu baten partaideak lau dira, zenbat era ezberdinetan antolatu daitezke?	PERMUTAZIO ERREPIKADUNAK ${}_{n}P^{n_1,n_2,...,n_k} = \dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...\cdot n_k!}$ AD.: Lau lerro eta bi punturekin zenbat konbinaketa ezberdin lor daitezke?
ELEMENUTEN ORDENA EZ	KONBINAZIOAK ${}_{n}^{k}K = \dfrac{{}_{n}^{k}A}{P_k} = \underbrace{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}_{ngaink} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ AD.: Zenbat triangelu lor daitezke hexágono baten erpinekin?	

Ariketa ebatziak

1.- 18 auzokideko etxe batean, zenbat eratan hauta daitezke lehendakaria, idazkaria eta diruzaina, auzokide bakoitzak kargu bakarra izan behar badu?

Hona hemen konfigurazio posible batzuk: $A_1A_2A_3$, $A_2A_1A_3$, A_2,A_7,A_5 ... ,non A_1, A_2 ... hemezortzi auzokideak diren.

- Kontuan hartu behar al da elementuen ordena? Bai, karguak desberdinak baitira.
- Konfigurazio guztietan elementu guztiak al daude? Ez, 18 auzokideetatik 3 hautatu behar baitira.
- Errepika al daitezke elementuak? Ez, auzokideek kargu bakarra izan baitezakete.

Beraz, 3naka harturiko 18 elementuren **aldakuntzak** dira.

$${}^{3}_{18}A = 18 \,.\, 17 \,.\, 16 = 4896 \text{ posibilitate daude.}$$

2.- Aurreko adibideko auzokideen arazo bat konpontzeko, zortzi auzokidek osatutako batzordea eratu behar bada, zenbat eratara osa daiteke batzordea?

Hona hemen konfigurazio posible batzuk: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, $A_1A_2A_9A_4A_7A_{11}A_3A_6$ ...

- Kontuan hartu behar al da elementuen ordena? Ez, karguak berdinak baitira.
- Errepika al daitezke elementuak? Ez, zortzi auzokide izan behar badira.

Beraz, 8naka harturiko 18 elementuren **konbinazioak** dira.

$${}^{8}_{18}K = \binom{18}{8} = 43758 \text{ konbinazio desberdin era daitezke.}$$

(Oh.: Batzuetan, bilatu beharreko konfigurazioek, aldi berean, beren azpikonfigurazioak dituzte, eta horietako bakoitza irizpide bereziez era daiteke)

3.- Diplomatikari-talde batean 6 alemaniar, 5 frantziar eta 7 italiar daude. Zenbat eratan antola daiteke batzorde bat, herrialde bakoitzak bi ordezkari izan ditzan?

Bilatu nahi ditugun konfigurazioak, aukeran ditugun 18 pertsonetariko 6 hautatuz lortzen dira, baina herrialde bakoitzetik bi egonik.

Ikus dezakezunez, hautaketa egitean ez da kontuan hartu behar ordena eta ezin dira errepikatu elementuak. Beraz, konbinazioak dira.

- 6 alemaniarren artean 2 ordezkari hautatzeko moduak: ${}^{2}_{6}K = \binom{6}{2} = 15$
- 5 frantziarren artean 2 ordezkari hautatzeko moduak: ${}^{2}_{5}K = \binom{5}{2} = 10$
- 7 italiarren artean 2 ordezkari hautatzeko moduak: ${}^{2}_{7}K = \binom{7}{2} = 21$

Lehen motako 15 azpikonfigurazioak bigarren motako 10ekin osa daitezke, eta hauek hirugarren motako 21ekin. Beraz, batzorde posibleen kopurua ondokoa izango da:

15 . 10 . 21 = 3150

4.- 1 eta 5 bitarteko zifrak erabilita, bost zifra desberdineko zenbat zenbaki desberdin era daitezke? Zenbaki horiek txikienetik handienera ordenatuz, zenbatgarren tokian dago 34215 zenbakia?

Lehenik, 1, 2, 3, 4 eta 5 zifrekin bost zifra desberdineko zenbat zenbaki era daitezkeen kalkulatu behar dugu.

Kontuan hartu behar da ordena, zeren 12345 eta 12435 desberdinak baitira.

Zifra guztiek hartzen dute parte.

Zenbakietan ez dago elementu errepikaturik, bost zifra desberdinez eratutako zenbakiak kontsideratu behar baititugu.

Beraz, 5 elementuren permutazioak kalkulatu behar ditugu: ${}_5P = 5! = 120$

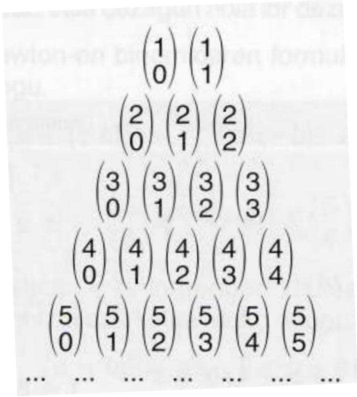
Orain, behin txikienetik handienera ordenatu ondoren, zenbaki horien artean 34215 baino txikiagoak diren zenbakiak kontatu behar ditugu.

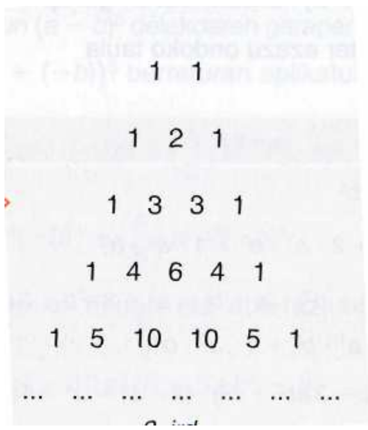
Kontuan hartu beharrekoak, hasieran 1 , 2 , 31 , 32 eta 341 zifrak dituzten zenbaki guztiak izango dira.

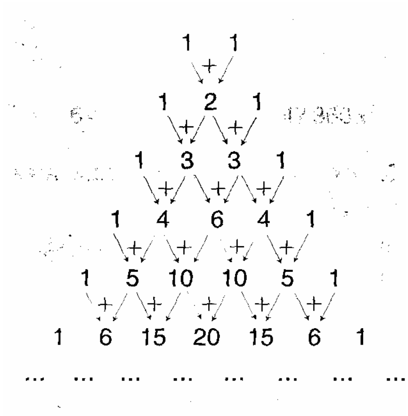
- 1 zifratik hasten direnak: ${}_4P = 4! = 24$
- 2 zifratik hasten direnak: ${}_4P = 4! = 24$
- 31 zifretatik hasten direnak: ${}_3P = 3! = 6$
- 32 zifretatik hasten direnak: ${}_3P = 3! = 6$
- 341 zifretatik hasten direnak: ${}_2P = 2! = 2$

Guztira: 24 + 24 + 6 + 6 + 2 = 62 zenbaki daude 34215 zenbakia baino txikiagoak. Beraz, 34215 zenbakia **63. tokian dago.**

5.3 Tartaglia-ren triangelua







Ohar zaitez ezaugarri hauetaz:

- Errenkada bakoitzeko muturrak beti dira 1 zenbakia; hau da $\binom{n}{0}$ edo $\binom{n}{n}$
- Errenkada bakoitzeko bigarren eta azken bigarren zenbakiak elkarren berdinak dira, baita hirugarrena eta azken hirugarrena...ere
- Barnealdeko zenbaki bakoitza, gainean dauzkan bi zenbakien batura da.

5.4 Newton-en binomioa

$(a + b)^n$ binomiaren garapena

Azter ezazu ondoko taula:

	Koekizienteak
$(a + b)^1 = a + b = \mathbf{1}\, a^1 b^0 + \mathbf{1}\, a^0 b^1$	1 1
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \mathbf{1}\, a^2 b^0 + \mathbf{2}\, a^1 b^1 + \mathbf{1}\, a^0 b^2$	1 2 1
$(a + b)^3 = (a + b)^2 . (a + b) = \mathbf{1} a^3 b^0 + \mathbf{3}\, a^2 b^1 + \mathbf{3}\, a^1 b^2 + \mathbf{1}\, a^0 b^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4 = (a + b)^3 . (a + b) = \mathbf{1} a^4 b^0 + \mathbf{4}\, a^3 b^1 + \mathbf{6}\, a^2 b^2 + \mathbf{4}\, a^1 b^3 + \mathbf{1}\, a^0 b^4$	1 4 6 4 1

Horiek guztiek ondoko ezaugarriak dituzte:

- $(a + b)^n$ gaien kopurua $n+1$ da
- Koefizienteen balioak Tartaglia-ren triangeluko *n*-garren errenkadako elementuak dira; hots, $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, ... , $\binom{n}{n}$
- **a**-ren berretzaileak *n*-tik *0*-rako balioa osoak dira, ordena beherakorrean
- **b**-ren berretzaileak *0*-tik *n*-rako balio osoak dira, ordena gorakorrean.

Era orokorrean:

$$\mathbf{(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + ... + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n}$$

Ariketa ebatzia

Erabili Newton-en binomioaren formula $(4 + 3x)^4$ kalkulatzeko.

$$(4 + 3x)^4 = \binom{4}{0} 4^4 . (3x)^0 + \binom{4}{1} 4^3.(3x)^1 + \binom{4}{2} 4^2 . (3x)^2 + \binom{4}{3} 4^1.(3x)^3 + \binom{4}{4} 4^0$$

$.(3x)^4 =$

$$= 4^4 + 4 . 4^3 . 3x + 6 . 4^2 . 3^2 . x^2 + 4 . 4 . 3^3 . x^3 + 3^4 . x^4 =$$

$$= 256 + 768\, x + 864\, x^2 + 432\, x^3 + 81x^4$$

<u>$(a - b)^n$ binomiaren garapena</u>. Adibidez, kalkula dezagun $(3x – 2)^6$

$$(3x-2)^6 = \binom{6}{0}(3x)^6 \cdot (-2)^0 + \binom{6}{1}(3x)^5 \cdot (-2)^1 + \binom{6}{2}(3x)^4 \cdot (-2)^2 + \binom{6}{3}(3x)^3 \cdot (-2)^3$$
$$+ \binom{6}{4}(3x)^2 \cdot (-2)^4 + \binom{6}{5}(3x)^1 \cdot (-2)^5 + \binom{6}{6}(3x)^0 \cdot (-2)^6 =$$

$$= \binom{6}{0}(3x)^6 \cdot 2^0 - \binom{6}{1}(3x)^5 \cdot 2^1 + \binom{6}{2}(3x)^4 \cdot 2^2 - \binom{6}{3}(3x)^3 \cdot 2^3 +$$
$$\binom{6}{4}(3x)^2 \cdot 2^4 - \binom{6}{5}(3x)^1 \cdot 2^5 + \binom{6}{6}(3x)^0 \cdot 2^6 =$$

$$= 1 \cdot 729\, x^6 \cdot 1 - 6 \cdot 243\, x^5 \cdot 2 + 15 \cdot 81\, x^4 \cdot 4 - 20 \cdot 27\, x^3 \cdot 8 + 15 \cdot 9\, x^2 \cdot 16 - 6 \cdot 3\, x \cdot 32 + 1 \cdot 1 \cdot 64 =$$

$$= 729\, x^6 - 2916\, x^5 + 4860\, x^4 - 4320\, x^3 + 2160\, x^2 - 576\, x + 64$$

<u>Ariketa.</u> Kalkula itzazu ondoko berreturak:

a) $(2x + 3)^4$ Em.: $16\, x^4 + 96\, x^3 + 216\, x^2 + 216\, x + 81$

b) $\left(\frac{x^2}{2} - 2y\right)^5$ Em.:

$$\frac{x^{10}}{32} - \frac{5}{8}x^8 y + 5x^6 y^2 - 20x^4 y^3 + 40x^2 y^4 - 32y^5$$

ARIKETAK

1. Kalkula itzazu:

   $_8^6A$; $_8^6A'$; $_8^6K$; $_8P^{4,2,1}$

2. Idatz itzazu *a, b, c* eta *d* letrak binaka hartuta, era daitezkeen aldakuntza guztiak, aldakuntza errepikadun guztiak eta konbinazio guztiak.

3. Zenbat era desberdinetan bana daitezke kontzertu baterako hiru sarrera-txartel 40 pertsonaren artean, bakoitzari txartel bakarra emanik?

4. Zenbat eratan bana daitezke urreko, zilarrezko eta brontzezko dominak lasterketa batean parte hartuko duten 12 atleten artean?

5. Kalkula ezazu zenbat era desberdinetan eser daitezkeen bost pertsona:
   a) Bost eserleku dituen banku batean
   b) Mahai biribil baten inguruan, eserlekuak zenbakituta daudela suposatuz.
   c) Mahai biribil baten inguruan, kontuan hartu beharreko gauza bakarra ezker eta eskuinaldeko lagunak izanik

6. Dekagono erregular baten erpinak puntutzat hartuta, zenbat zuzen desberdin eta zenbat triangelu desberdin era daitezke?

7. Zenbat tren-txartel desberdin inprimatu behar dira zortzi geltoki dituen ibilbide bateko bidaia posible guztiak adierazteko, txartel bakoitzean hasierako eta amaierako geltokiak adierazi behar badira?

8. 4 biko, 2 bosteko eta hiruko bat dauzkaten zazpi zifrako zenbat zenbaki daude?

9. 2, 3 eta 4 *zenbakiak* erabiliz, lau zifrako zenbat zenbaki era daitezke?

10. Hiru faktore desberdineko zenbat biderketa desberdinak egin daitezke 2, 3, 5, 6 eta 8 zenbakiekin?

11. Loteria primitibo apustu bat egiteko, gurutze batez markatu behar dira 1 eta 49 zenbakien arteko (biak barne) sei zenbaki. Zenbat apustu desberdin egin daitezke loteria primitiboan? Zenbat apustu posiblek hartzen dituzte barnean 17, 23 eta 42 zenbakiak?

12. Ikastalde batean 12 mutil eta 16 neska daude. Zenbat eratan aukera daiteke sei pertsonako batzordea, hiru mutil eta hiru neska egonik?

13. Literatura-lehiaketa batean 25 pertsona aurkeztu dira. Hiru sari hiru pertsona desberdini emateko asmoa dagoela kontuan harturik:
   a) Zenbat eratara aukera daitezke sarituak, hiru sariak desberdinak izanik?
   b) Eta hiru sariak berdinak izanik?
   c) Eta lehen saria berezia eta bigarren eta hirugarren sariak bi akzesit berdin izanik?

14. Txanpon bat zortzi aldiz jaurti da airera, eta era ordenatuan idatzi dira emaitzak. Zenbat eratan lor daitezke 5 aurpegi eta 3 gurutze? Eta 2 aurpegi eta 6 gurutze?

Em.: 56 ; 28

15. 1, 2, 3, 4, 5 eta 6 zifrak erabilita, sei zifra desberdineko zenbat zenbaki era daitezke? Horietako zenbat daude 300000 eta 500000 zenbakien artean?

Em.: 720; 240

16. 1 eta 6 bitarteko zifrak erabilita, lau zifra desberdineko zenbat zenbaki desberdin era daitezke? Zenbaki horiek txikienetik handienera ordenatuz, zenbatgarren tokian dago 3542 zenbakia?

Em.: 360; 164

17. Demagun auto-matrikulak 4 zifraz eta ondoren 2 letraz osatzen direla. Alfabetoak 26 letra dituela jakinda, zenbat auto matrikulatu ahal dira metodo horrekin?

18. Zenbat modu desberdinetan bete daiteke futbol-kiniela? Zenbatean egongo dira zehazki 7 bateko, 5 ixa eta 2 biko?

19. Zenbat eratan ordena ditzakegu KONSPIRAZIOA hitzaren letrak, bokalen lekuan kontsonanterik ipini ezin bada, ez eta alderantziz ere?

Em.: 64800

20. Kalkula itzazu ondoko berreturak:

a) $(x + 2y)^5$; b) $(1 - x)^6$

PROBABILITATEA

Mahai gainera dado bat botatzen badugu, ez dakigu zein puntuazio agertuko den. Emaitza **aleatorioa** da.

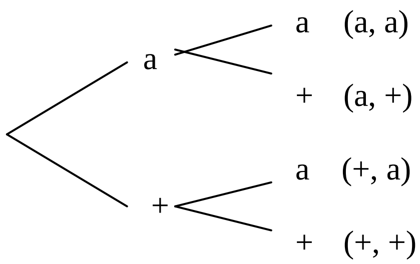
Esperimentu aleatorio batean, emaitza posible guztien multzoari **lagin-espazioa** deitzen zaio eta Ω letra grekoz adierazten da.

Dado batean, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Txanpon batean, $\Omega = \{a\ ,+\}$

Hiru txanponekin, $\Omega = \{aaa\ ,\ aa+\ ,\ a+a\ ,\ +aa\ ,\ a++\ ,\ +a+\ ,\ ++a\ ,\ +++\}$

Esperimentu konposatuak
Esperimentu bat konposatua dela esango dugu, baldin aldi berean edo ondoz ondo egindako zerbait esperimentu bakunez osaturik badago.
Adibidez, txanpona airera jaurtitzea esperimentu bakuna da; baina txanpon bat eta dado bat airera jaurtitzea, edo bi txanpon jaurtitzea… esperimentu konposatuak dira.
Esperimentu konposatu baten lagin-espazioa bilatzeko, oso egokia da zuhaitz-diagramak erabiltzea. Kasurako, bi txanpon airera jaurtitzean:



Ω = { (a, a) , (a, +) , (+, a) , (+, +) }

Ω-ren edozein azpimultzori **gertaera** esaten zaio eta letra larriz adierazten da. Esaterako, dadoa jaurtitzean *zenbaki bikoitia ateratzea* gertaera A = {2 , 4 , 6} da.

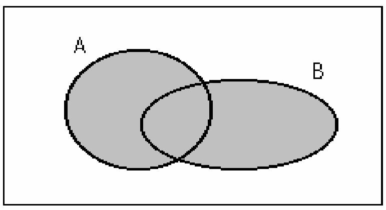
Gertaera ziurra, beti jasotzen dena da eta Ω lagin-espazio bera da izatez. Adibidez, dadoa jaurtitzean *6 zenbakia edo txikiagoa ateratzea*: A = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6}.

Ezinezko gertaera ez da inoiz jasotzen. ϕ multzo hutsa da.

Gertaeren arteko eragiketak

Bilketa: $A \cup B$

Ω

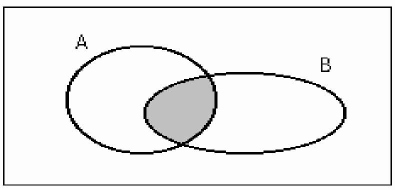


A edo *B* jazotzen denean.

A eta *B*ko elementu guztiekin osatzen da.

Ebaketa: $A \cap B$

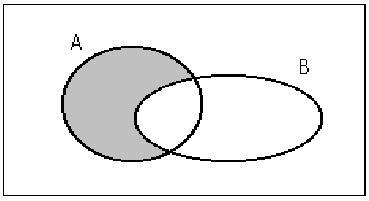
Aldi berean *A* eta *B* jazotzen direnean.



*A*koak eta *B*koak diren elementuekin osatzen da.

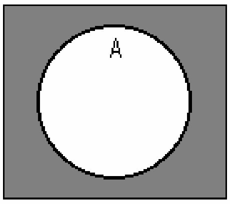
Kenketa edo diferentzia: $A - B$

A jazotzean *B* gertaera ez denean.



A multzokoak izanik *B*koak ez diren elementuekin osatzen da.

Osagarria: $\overline{A}$



A gertaera jazotzen ez denean.

Ariketa.
Karta-sorta batetik karta bat ateratzen da. Kontsidera ditzagun ondoko gertaerak:

A: urrea atera ; *B: erregea atera*

Deskriba itzazu ondoko hauek:

$A \cup B$

$A \cap B$

$\overline{A}$

$A - B$

$A \cup (B \cap A)$

$\overline{A \cup B}$

$\overline{A} \cap \overline{B}$

Morgan-en legeak: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Ariketak

1. Dado bat jaurti eta kontsidera ditzagun ondoko gertaerak:

A: 2 edo 3 atera ; *B: 4 baino handiagoa atera*

Egiazta ezazu Morgan-en legeak betetzen direla.

2. Zenbat da?

$A \cup \phi$; $A \cap \phi$; $\overline{\overline{A}}$; $A \cup \overline{A}$; $A \cap \overline{A}$

3. Egiazta itzazu grafikoki ondoko berdintzak:

$A \cup (B \cap A) = A$

$A \cap (B \cup A) = A$

$A - B = A \cap \overline{B}$

Morgan-en formulak

Dado bat jaurtitzean har ditzagun ondoko gertaerak:

A = {2 , 3} ; B = {1 , 2} eta C = {4 , 5}

2 zenbakia ateratzen bada, *A* eta *B* aldi berean gertatzen dira. Gertaera horiek **bateragarriak** dira. $A \cap B \neq \phi$

Aldiz, *A* eta *C* ezin dira aldi berean gerta; **bateraezinak** dira. $A \cap C = \phi$

Ariketa

Loteriako zozketa batean sari nagusiaren azkeneko zifra zein den begiratzen dugu.

a) Zein da lagin-espazioa?

b) Idatzi gertaera hauek:

A=4 baino txikiagoa; B= bikoitia; C=5 baino handiagoa

c) Aurkitu:

$A \cup B$; $A \cap C$; $\overline{A} \cap B$; $B - A$; $\overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A} \cap B \cap C$; $(C \cup B) \cap \overline{A}$

PROBABILITATEA

Txanpon bat 100 aldiz botatzen dugu airera. Demagun 55 aldiz aurpegia ateratzen dela eta 45 aldiz gurutzea.

"Aurpegia irtetzea" gertaeraren maiztasun absolutua 55 da eta maiztasun erlatiboa $\frac{55}{100} = 0{,}55$ da; ordea, *"gurutze irtetzea"*-ren maiztasun erlatiboa 0,45 da.

Txanpona, zenbat eta gehiagotan jaurti (1000, 10000,...), maiztasun erlatiboak geroz eta gehiago hurbiltzen dira balio batera, 0,5 baliora.

Zenbaki horri, **probabilitatea** deitzen zaio.

Laplace-ren definizioa: $p(A) = \frac{aldeko\ kasuak}{kasu\ posibleak}$

Ariketak.

1. 40 kartako karta-sorta batetik karta bat ateratzen da. Zein da probabilitate hauen balioa?:
   a) Urrea izatea.
   b) Urrea edo kopa izatea.
   c) Bastoa ez izatea.

2. Dado bat jaurtitzean, zein da 4 irtetzeko probabilitatea?

3. Ontzi batean bost bola zuri, hiru bola gorri eta lau bola beltz daude. Ontzitik bola bat zoriz ateratzen bada, kalkula itzazu ondoko gertaeren probabilitateak:

A: bola beltza ; B: bola zuria edo beltza; C: bola urdina

4. Bi txanpon airera jaurtitzen ditugu. Idatzi lagin-espazioa. Zein da bi aurpegi ateratzeko probabilitatea ?

5. Bi dado jaurtitzean, zein da puntuen batura zortzi izateko probabilitatea?

Zera betetzen da:

$0 \le p(A) \le 1$

$p(E) = 1$; $p(A) + p(\overline{A}) = 1$; $p(\phi) = 0$

Ariketak.

1. Dado bat jaurtitzen dugu airera.Eman ditzagun gertaera hauek: A = {2 , 4 , 6} ; B = {1 , 2 , 3} ; C = {3 , 5}
Kalkulatu:

p(A) ; p(B) ; p(C) ; $p(\overline{C})$; $p(A \cap B)$; $p(A \cup B)$; $p(A \cup C)$

Gertaera **bateragarriak** direnean ondokoa betetzen da:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

(Egiazta ezazu aurreko ariketan)

Gertaera **bateraezinak** direnean, $A \cap B = \phi$ da eta $p(A \cap B) = 0$.

Orduan, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

2. Demagun $p(A) = \frac{1}{2}$; $p(B) = \frac{1}{4}$ eta $p(A \cap B) = \frac{1}{16}$ direla. Kalkula itzazu:

$p(\overline{A})$; $p(A \cap \overline{A})$; $p(A \cup B)$; $p(A - B)$ edo $p(A \cap \overline{B})$; $p(\overline{A} \cup \overline{B})$; $p(\overline{A \cup B})$

3. Demagun p(A)= 0,4 ; p(B)= 0,5 eta $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3$ direla.
Kalkulatu: $p(A \cup B)$ eta $p(A \cap B)$

Sol: 0,7 ; 0,2

4. Dakigunez, ikasle batek Matematika gaindituta edukitzeko probabilitatea 0,45 da; Hizkuntza gaindituta edukitzekoa 0,4; eta bietako bat gaindituta edukitzekoa 0,7. Ikasle bat zoriz aukeratuz, zein da ikasle horrek bi gaindituta edukitzeko probabilitatea?

5. Mirenek eta Rakelek azterketa bat egin dute. Mirenek azterketa gainditzeko probabilitatea 0,6 da, Rakelek 0,3 eta biek (Mirenek eta Rakelek) gainditzekoaren probabilitatea 0,1. Kalkula itzazu:
   a) Mirenek edo Rakelek gainditzeko probabilitatea.
   b) Mirenek gainditu, baina Rakelek ez gainditzeko probabilitatea.

6. Gazte-elkarte bateko %35 bazkidek *A* musika-taldearen zaleak dira; %30 *B* taldearen zaleak; eta %15 bi taldeak atsegin dituzte. Bazkide bat zoriz aukeratuz gero, kalkula itzazu ondoko probabilitateak:
   a)Ez *A* ez *B* taldeak gustoko izatea.
   b)B taldekoa zalea izatea, baina ez *A* taldekoa.

7. Herri batean biztanleen %40k ilea beltza dute, %25ek begi marroiak eta %50ek ez dute ile beltzik ez eta begi marroirik. Herri horretako pertsona bat zoriz aukeratzen badugu, zein da:
   a)Begi marroiak ez edukitzeko probabilitatea.
   b)Ile beltza bai, baina begi marroirik ez edukitzeko probabilitatea?

	Begi marroiak	Begi marroiak ez	
Ile beltza			40
Ile beltza ez		50	
	25		100

8. Ikastetxe batean 250 ikasle daude. Horietatik, 150 Eibarkoak dira, eta 80 ikasleei ez zaie gustatzen musika modernoa. Gainera, 60 ikasle ez dira Eibarkoak, baina gustatzen zaie musika modernoa. Ikasle bat zoriz aukeratuta, zein da:
   a) Musika modernoa gustoko izateko probabilitatea.
   b) Eibarkoa ez izan eta musika modernoa gustoko ez izateko probabilitatea.
   c) Ikaslea Eibarkoa dela badakigu. Zein da musika modernoa gustoko izateko probabilitatea?

Probabilitate baldintzatua

Batzuetan gertaera bati buruz aldez aurreko informaioa edukitzeak gertaeraren probabilitatea aldarazten du.

"*B*-k baldintzaturiko *A* gertaeraren probabilitatea". Formula: $\boxed{p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}}$

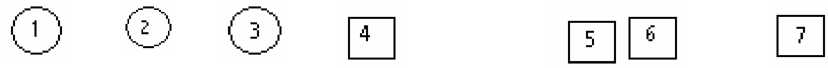
$$p(A \cap B) = p(A/B).p(B)$$

Aurreko adibidean, musika modernoa gustatzea Eibarkoak direnen artean: *p(M/E)*.

Formula aplikatuz, $p(M/E) = \dfrac{p(M \cap E)}{p(E)} = \dfrac{\frac{110}{250}}{\frac{150}{250}} = \dfrac{110}{150}$

Ariketak.

1. Poltsa batean forma biribilak eta laukiak ditugu, eta zenbakituta daude, ondoren adierazten den bezala:



Bat zoriz ateratzean, zein da probabilitatea:

a) Bikoitia izatea.
b) Biribila dela jakinda, bikoitia izatea.
c) Laukia dela jakinda, bikoitia izatea.

2. Herri batean bi egunkari saltzen dira: A eta B. Badakigu herri horretako biztanleen %55ek A egunkaria irakurtzen dutela, %40k B egunkaria, eta %25ek ez bata ez bestea. Biztanle bat zoriz aukeratuta, zeintzu dira probabilitate hauek:

a) Egunkari biak irakurtzea.
b) A bakarrik irakurtzea.
c) Egunkarietako bat bakarrik irakurtzea.
d) Badakigu biztanle horrek A irakurtzen duela. Zein da B ere irakurtzearen probabilitatea?
e) Badakigu egunkariren bat irakurtzen duela. Zein da A bai eta B ez izateko probabilitatea?

3. Diskoteka batera joaten diren %80 neska-mutilek 20 urte baino gutxiago dituzte. Bestalde, %45 mutilak dira, eta 20 urte baino gazteago diren neskak %50 dira. Gazte bat zoriz aukeratuz gero:

a) Zein da neska izateko probabilitatea?
b) Zein da 20 urte baino zaharragoa izateko probabilitatea, neska dela jakinik.
c) Zein da 20 urte baino gazteagoa izateko probabilitatea, mutila dela jakinik.

Esperimentu konposatuak

Menpeko esperientziak (dependenteak) eta esperientzia askeak (independenteak)

Gaiaren hasieran esan zen moduan, txanpon bat bi aldiz jaurti esperimentua konposatua da, (“txanpon bat jaurti eta “bestea jaurti). Poltsa batetik bi bola atera ere esperimentu konposatua da baina kasu honetan ondo bereizi beharreko bi mota aurkituko ditugu:

- Itzuleradun ateraldiak: ateraldi bakoitzaren ondoren, ateratako elementua berriro multzoan sartzen da.
- Itzulera gabeko ateraldiak: ateraldiak elkarren atzean egiten dira, baina ateratako elementuak multzoan berriro sartu gabe.

Bi esperientzia edo gehiagori **askeak** direla esaten zaie esperientzia bakoitzaren emaitza besteen emaitzen menpekoa ez denean. Adibidez, txanpon bat bi aldiz jaurti eta ondoz ondoko itzuleradun ateraldiak esperientzia askeak dira.
Bi esperientzia edo gehiagori **menpekoak** direla esaten zaie esperientzia bakoitzaren emaitzak besteen emaitzatan eragina duenean. Adibidez, ondoz ondoko itzulera gabeko ateraldiak esperientzia menpekoak dira.

1. adibidea.

Txanpon bat bi aldiz jaurtitzean, lehenengo jaurtialdian *aurpegia ateratzea* gertaerak ez du eraginik bigarren jaurtialdian berriro *aurpegia ateratzea* gertaerarekin.

Kasu honetan, gertaera bat jazotea ez dago baldintzatuta beste gertaera jazotzen den ala ez.

Gertaera independenteak direla esango dugu eta ondokoa beteko da:

$$p(A \cap B) = p(A)\,.\,p(B)$$

Txanpona bi aldiz botatzean, biak aurpegia ateratzeko probabilitatea:

$$p(A \cap B) = \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

2. adibidea.

48 kartako karta-sorta batetik hiru karta ateratzen ditugu. Kalkulatu hirurak bastoiak izateko probabilitatea ondoko bi kasuetan:

a) Atera ondoren, berriro sortara sartuta.
b) Karta atera eta gero, sortan berriro sartu gabe.

a) $\frac{12}{48}\,.\,\frac{12}{48}\,.\,\frac{12}{48}$ (gertaera independenteak)

b) $\frac{12}{48}\,.\,\frac{11}{47}\,.\,\frac{10}{46}$ (gertaera dependenteak)

Ariketa.

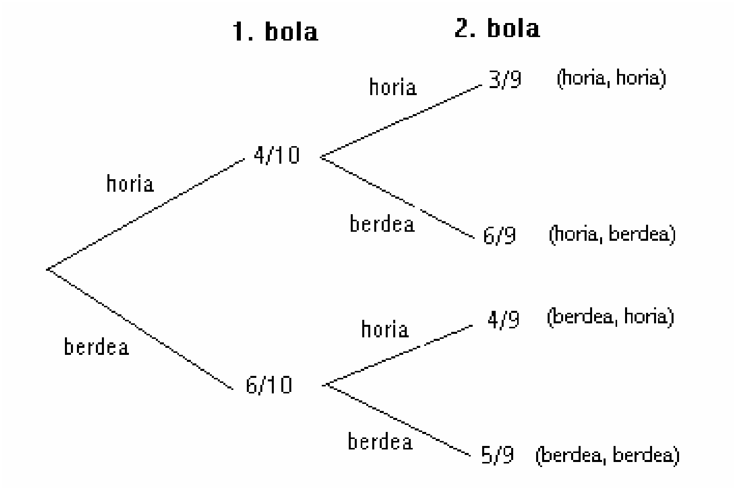
Zein probabilitate dago erruletan jokatzean hiru aldiz segidan gorria ateratea? Erruletak 18 gelaxka gorri, 18 gelaxka beltz eta zuri bat ditu.

Em.: 0,115

Zuhaitz-diagrama

1. adibidea. Kutxa batean lau bola hori eta sei berde daude. Bi bola aldi berean ateratzen baditugu, zein da:

a) Biak horiak izateko probabilitatea?
b) Gutxienez bat horia izateko probabilitatea?



a) Biak horiak izateko probabilitatea: $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$

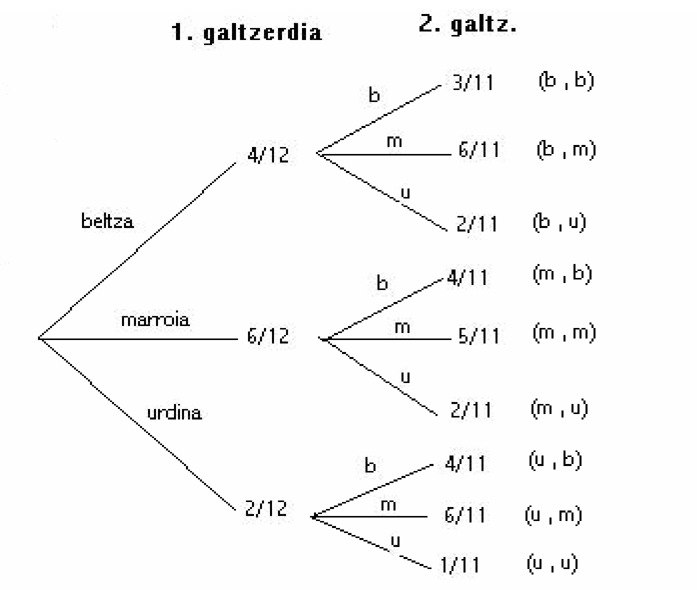
b) Gutxienez bat horia izateko probabilitatea. Bi eratan egin ahal da:

I) $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$

II) Probabilitate zihurra - p(berdea, berdea) $= 1 - \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = 1 - \frac{30}{90} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$

2. adibidea

Kajoi batean lau galtzerdi beltz, sei marroi eta bi urdin daude. Bi galtzerdi hartzen ditugu zoriz. Zein da biak kolore berekoak izateko probabilitatea?



Biak kolore berekoak izateko probabilitatea: (b , b) + (m , m) + (u , u) =
$\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} + \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{44}{132} = 0{,}3333$

Ariketak

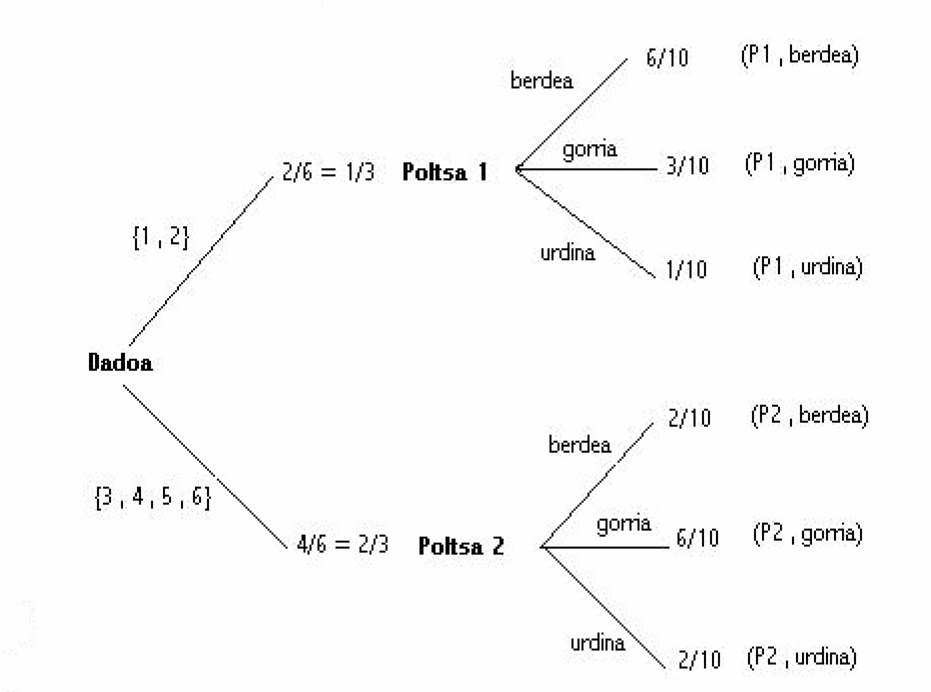
1.- Idoiak geografiako 22 unitateetatik 18 dakizki. Azterketarako bi aterako dituzte, zoriz. Zein da gutxienez unitate bat jakiteko probabilitatea.

2.- Txanpon bat hiru aldiz jaurtitzen da. Zein da:
a)Hiru aurpegi ateratzeko probabilitatea
b)Gutxienez bi aurpegi ateratzeko probabilitatea
c)Gutxienez aurpegi bat ateratzeko probabilitatea.

3. adibidea.

P_1 poltsa batean 6 bola berde, 3 gorri eta 1 urdina dauzkagu, eta P_2 poltsan 2 berde, 6 gorri eta 2 urdin. Dado bat jaurtitzen dugu; 1 edo 2 irtetzen bada bola bat aterako dugu P_1 poltsatik, eta 3, 4, 5 edo 6 irtetzen bada P_2 poltsatik aterako dugu bola.
Zoriz kutxa bat aukeratu eta bola bat ateratzen dugu. Zein da:

a) Gorria izateko probabilitatea?
b) Berdea izateko probabilitatea?
c) Urdina ez izateko probabilitatea?
d) Berdea dela jakinda, zein da lehen poltsatik ateratakoa izateko probabilitatea? (Baldintzatua)



a) Gorria izateko probabilitatea: $\frac{1}{3}.\frac{3}{10}+\frac{2}{3}.\frac{6}{10}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$

b) Berdea izateko probabilitatea: $\frac{1}{3}.\frac{6}{10}+\frac{2}{3}.\frac{2}{10}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

c) Urdina ez izateko probabilitatea: $1-(\frac{1}{3}.\frac{1}{10}+\frac{2}{3}.\frac{2}{10})=1-\frac{5}{30}=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$

e) Badakigu berdea dela; beraz, kasu posibleak $\frac{1}{3}.\frac{6}{10}+\frac{2}{3}.\frac{2}{10}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ dira.

Horietatik, aldeko kasuak (lehen poltsakoak izatea) $\frac{1}{3}.\frac{6}{10}$ dira. Beraz:

$$p(Poltsa_1 / berdea)=\frac{\frac{1}{3}.\frac{6}{10}}{\frac{1}{3}.\frac{6}{10}+\frac{2}{3}.\frac{2}{10}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{5}$$

Ariketak.

1.- Txanpon bat eta bi dado (A eta B) ditugu. A dadoak lau aurpegi zuri eta bi beltz ditu, eta B dadoak hiru aurpegi beltz eta hiru zuri. Txanpona jaurti, eta aurpegia ateraz gero, segidan A dadoa jaurtitzen da; gurutzea ateraz gero, B dadoa jaurtitzen da. Kalkula itzazu:

a) Beltza ateratzeko probabilitatea

b) A jaurti izanaren probabilitatea, beltza atera dela jakinik.

Em.: a) 0,417 ; b) 0,4

2.- Etxe batean hiru giltza-sorta daude: *A, B* eta *C*. *A*k 5 giltza ditu, *B*k 7 eta *C*k 8, baina sorta bakoitzean giltza bakarrak irekitzen du kaleko atea. Giltza-sorta bat zoriz aukeratzen dugu eta bertatik giltza bat hartzen dugu kaleko atea irekitzeko asmoarekin. Zein da:

a) Giltza egokia aukeratzeko probabilitatea?

b) *B* sortako giltza aukeratu eta egokia ez izatearen probabilitatea?

c) Aukeratutako giltza egokia bada, zein da probabilitatea *A* sortakoa izatea?

Konbinatoria eta Probabilitatea

1. Lau txanpon airera botata, zein da lau aurpegi ateratzeko probabilitatea?

2. Apalategi batean hamar kutxa daude 1etik 10era zenbakiturik, eta hamar bola ditugu, horiek ere 1etik 10era zenbakiturik. Kutxa bakoitzean bola bana zoriz sartuz gero, zein da bola bakoitza bere zenbaki bereko kutxan erortzeko probabilitatea?

   Em.: 2,756 . 10^{-7}

3. Zein da futbol kiniela bateko apustu batean hamabostekoa asmatzeko probabilitatea?

4. 40 kartako sorta batetik hiru karta desberdin hartzen ditugu. Kalkulatu zein den hiru beltz (txanka, zaldi edo errege) ateratzeko probabilitatea.

5. 1, 2, 3 eta 4 digituekin egin daitezkeen lau zifrako zenbaki guztiak osatzen ditugu, zifrak errepikatu gabe. Horietako bat zoriz aukeratuta, zein da zenbakiaren 1. zifra 3 izateko probabilitatea?

ARIKETAK

1. Zer da probableago, jaiotako 20 umetik 14 neskak izatea ala 90 umetik 63 neska izatea?

2. 40 kartako karta-sorta batetik karta bat ateratzen dugu. Zein da probabilitatea:
   a) Txanka, zaldia edo erregea izatea?
   b) Batekoa edo kopa izatea?
   c) Badakigu urrea dela. Zein da bateko urrea izateko probabilitatea?

3. Dado bat bi aldiz jaurtitzen dugu. Ze probabilitate dago bigarren jaurtialdian lehenengoan baino puntuazio handiagoa lortzeko?

4. A eta B gertaerek ondokoa betetzen dute:
   $$p(A \cup B) = \frac{3}{4} \quad ; \quad p(\overline{B}) = \frac{2}{3} \quad ; \quad p(A \cap B) = \frac{1}{4}$$
   Kalkulatu: $p(B) \quad ; \quad p(A) \quad ; \quad p(\overline{A} \cap B) \quad ; \quad p(B - A)$

5. *A* eta *B* gertaerek ondokoa betetzen dute:
   $$p(A) = 0{,}4 \quad ; \quad p(B) = 0{,}5 \quad ; \quad p(B / A) = 0{,}25$$
   Kalkulatu $p(A \cap B)$ eta $p(A \cup B)$

6. Parakaidista batek jausgailuak huts egiteko probabilitatea kalkulatu du, eta 0,0001 balioa lortu du. Guztiz ikaratuta, salto bakoitzean ordezko beste jausgailu berdin bat ere eramatea erabaki du, badaezpada. Zein da jausgailu biek huts egiteko probabilitatea?

7. Ikasleek maila gainditzeko duten probabilitatea 0,7 da. Zoriz aukeratutako bost ikasleko talde batean, zein dira ondoko gertaeren probabilitateak?
   a) Ikasmaila inork ez gainditzea.
   b) Guztiek ikasmaila gainditzea.

8. Bi haur dituen familia batean, zein da bata mutila eta bestea neska izateko probabilitatea? Eta biak neskak izatekoa?

9. Kutxa batean bost bola gorri eta hiru zuri daude. Bi bola aldi berean ateratzen ditugu.
   a) Zein da probabilitatea biak gorriak izateko?
   b) Zein da gutxienez bat gorria izateko probabilitatea?

10. Azterketa batean, programako hamar gaien artean zoriz bi gai aukeratu behar dira. Ikasle batek 6 gai dakizki. Ze probabilitate dago ikasle horrek:
    a) Aukeratutako bi gaiak jakiteko?
    b) Gai bat bai, baina bestea ez jakiteko?

11. Bonbilla-fabrika batean egiaztatu denez, %80 bonbillek 90 egun baino gehiago irauten dute piztuta. Zein da bi bonbilla erosi eta biek 90 egun baino gutxiago irauteko probabilitatea?

12. Produktu batek bi zati ditu: *A* eta *B*. Fabrikazio prozesuaren arabera *A* zatian akatsa egoteko probabilitatea 0,06 da eta *B* zatian egotekoa 0,07. Zein da produktuak akatsak ez izateko probabiltatea?

13. Kutxa batean 10 bola zuri, 6 beltz eta 4 gorri daude. Hiru bola ateratzen baditugu, gero kutxara itzuliz, zein da hirurak kolore berdinekoak izateko probabilitatea?

14. Ikasgela batean 20 mutil eta 10 neska daude. Mutilen erdiek eta nesken erdiek matematika gainditu dute. Ikasle bat zoriz aukeratuta, zein da probabiltatea?
    a) Matematika gainditu ez duen mutila izateko?
    b) Mutila dela jakinda, matematika gainditu duen bat izateko?

15. Ikasle batek bi proba egin ditu egun berean. Lehenengo proba gainditzeko daukan probabilitatea 0,6 da, bigarrena gainditzeko probabilitatea 0,8 da, eta biak gainditzekoa 0,5. Aurkitu:
    a) Proba bat gutxienez gainditzeko daukan probabilitatea.
    b) Proba bat ere ez gainditzeko daukan probabilitatea.
    c) Lehenengo proba gainditu badu, bigarrena ere gainditzeko daukan probabilitatea.
    d) Lehenengo proba gainditu ez badu, bigarrena gainditzeko daukan probabilitatea.

16. Urte batean 10.000 auto aztertu dira: *A* markakoak 7.000 eta *B* markakoak 3.000. Horietatik 1.000 autok istripu larriren bat izan dute. Gainera, istripurik jasan ez duten *A* markako auto kopurua 6.200 izan da. Auto bat zoriz aukeratuta:
    a) Zein da *B* markakoa izan eta istripu larririk jasan gabeko autoa izateko probabilitatea?
    b) Aukeratutako autoa istripu larriren bat edukitako horietariko bat da. Zein da *A* markakoa izateko probabilitatea?
    c) Zein da markarik seguruena? Marka bakoitzean, kalkula ezazu istripurik gabeko autoen portzentaia.

17. Ikastetxe bateko ikasleen %20k futbolean egiten dute; %15ek saskibaloian, eta %10ek bi kirolak praktikatzen dituzte. Ikastetxeko ikasle bat zoriz aukeratuz gero, kalkulatu ondoko probabilitateak:
    a) Futbolean egiteko probabilitatea, saskibaloian egiten ez duela jakinik.
    b) Bi kirolak praktikatzeko probabilitatea, bietakoren bat praktikatzen duela jakinik.

18. *A* kutxan 999 bola zuri eta bola gorri bat daude. *B* kutxak 999 bola gorri eta bola zuri bat dauzka. Kutxa bat aleatorioki aukeratu eta bertatik bola bat aterako dugu. Zein da ateratako bola *A* kutxakoa izateko probabilitatea, zuria izan dela jakinik?

19. Bi karta-sorta ditugu: *A* eta *B*. *A* sortan 8 urre eta 5 ezpata daude, eta *B* sortan 4 urre eta 7 ezpata. Sorta beretik bi karta atera eta biak ezpatak dira. Aurkitu zein den *B* sortatik ateratakoak izateko probabilitatea?

----

20. *A*, *B*, *C* eta *D* lagunak banku batean eseritzen dira. Zein da bankuaren bi izkinetan eserita daudenak *A* eta *B* izateko probabilitatea ?

21. 1, 2, 3 eta 4 digituekin 3 zifra desberdineko zenbakiak osatzen ditugu. Bat zoriz aukeratuta, zein da azkeneko bi zifrak 12 izateko probabilitatea ?

22. Apustu bat egin dugu Loteria Primitiboan.
    a) Zein da sei zenbakiak asmatzeko probabilitatea ?
    b) Eta zenbakia bat bera ere ez asmatzeko probabilitatea ?